Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 47, 1997

Μία προσέγγιση του μήκους μιας καμπύλης γραμμής με το ορισμένο ολοκλήρωμα

Δημήτρης Ντρίζος

Στο σχολικό βιβλίο της Ανάλυσης της Γ΄ Λυκείου (Ο.Ε.Δ.Β. 1997) και όχι μόνο, το ορισμένο ολοκλήρωμα αισθητοποιείται κυρίως, ως η μαθηματική έκφραση του εμβαδού κλειστών περιοχών· έχει δηλαδή έναν, ας πούμε, "δισδιάστατο χαρακτήρα". Το ορισμένο ολοκλήρωμα όμως, έχει όπως είναι γνωστό και άλλες (περισσότερες) εφαρμογές· όπως είναι για παράδειγμα ο υπολογισμός του όγκου κάποιων στερεών, αλλά και του μήκους ορισμένων καμπυλών. Μπορεί δηλαδή να εκφράσει το μέτρο (όγκου - μήκους) από τρισδιάστατα και μονοδιάστατα αντικείμενα.

Σε τούτο το άρθρο - και δεδομένης μόνον της μαθηματικής υποδομής που δημιουργεί η Ανάλυση που διδάσκεται στη Γ΄ Λυκείου - θα επιχειρήσουμε μία βήμα προς βήμα προσέγγιση του τρόπου με τον οποίο το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να εκφράσει το μήκος μιας καμπύλης γραμμής· και έπειτα θα παρουσιάσουμε μία σειρά αξιοσημείωτων εφαρμογών.

Αξίζει να αναφέρουμε εδώ, ότι η κεντρική ιδέα (το ερέθισμα) για το γράψιμο αυτού του άρθρου ήταν οι απορίες και αναζητήσεις μαθητών της 1ης Δέσμης σε μια ενδιαφέρουσα συζήτηση μέσα στην τάξη. Οι συνήθεις αυτές αναζητήσεις προκύπτουν στην πορεία του μαθήματος· και δεν έχουν προκαθορισμένο θέμα. Κάποια εφαρμογή ή κάποια απόδειξη μας οδηγούν σε αναζητήσεις, αλλά (μερικές φορές) και σε κάποιες επεκτάσεις.

Εν προκειμένω, συζητούσαμε για τη γεωμετρική ερμηνεία και τις εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος· και η ερώτηση (πυρήνας) που έδωσε την ώθηση στη συζήτηση, ήταν η εξής :

"Είδαμε τον υπολογισμό του εμβαδού ($E = \pi \cdot \rho^2$) του κυκλικού δίσκου :

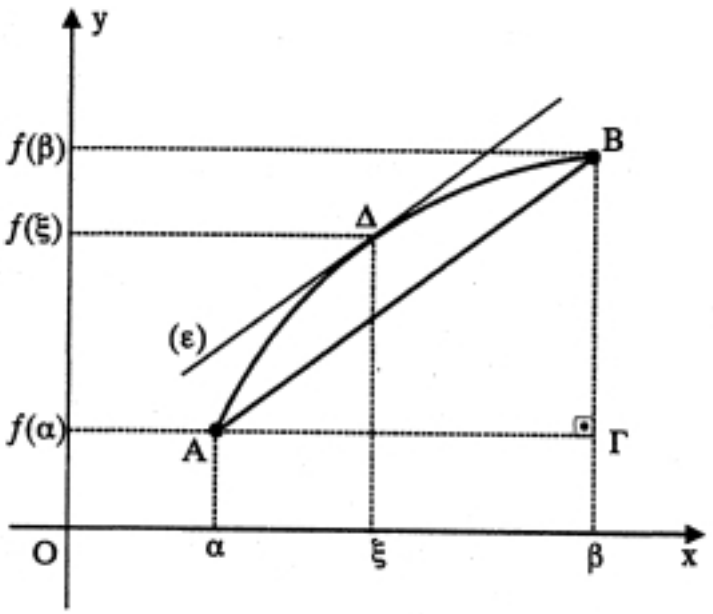
$$x^2 + y^2 = \rho^2,\ \rho > 0.$$

Μήπως θα μπορούσαμε με ανάλογες διαδικασίες να υπολογίσουμε και το μήκος αυτού του κύκλου ; "

Τούτο το άρθρο μας, δεν έρχεται να απαντήσει μεμονωμένα σ'αυτή την ερώτηση. Πρέπει να φτιάξουμε την υποδομή, να δούμε το θεωρητικό υπόβαθρο, που απαιτείται για τη διατύπωση μιας τεκμηριωμένης απάντησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy του επιπέδου θεωρούμε μία συνεχή καμπύλη γραμμή AB με μήκος L_{AB} και το ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος (AB), σχήμα 1.



Σχήμα 1

Ισχύει $(AB)^2 = (A\Gamma)^2 + (\Gamma B)^2$, εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$

ή $(AB) = \sqrt{(A\Gamma)^2 + (\Gamma B)^2}$, (1).

Υποθέτουμε τώρα ότι η καμπύλη γραμμή AB είναι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς στο [α, β] συνάρτησης f. Τότε η ισότητα (1) γράφεται :

$$(AB) = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + [f(\beta) - f(\alpha)]^2}\,, \quad (2)$$

Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], τότε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Delta(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB, σχήμα 1. Θα ισχύει δηλαδή : $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)\cdot(\beta - \alpha)$.

Έτσι η ισότητα (2) γίνεται :

$$(AB) = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + [f'(\xi)\cdot(\beta-\alpha)]^2}$$

$$\text{ή} \quad (AB) = (\beta-\alpha)\cdot\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}$$

Αν τώρα οι αριθμοί α και β είναι "πολύ κοντινοί μεταξύ τους", τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ***το μήκος L_{AB} της γραφικής παράστασης της f προσεγγίζεται από το μήκος (AB) του ευθύγραμμου τμήματος AB.***

Έτσι γράφουμε : $L_{AB} \approx (\beta-\alpha)\cdot\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}$ όταν $(\beta - \alpha) \to 0$

ή ισοδύναμα : $L_{AB} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\,\Delta x$, ***όπου*** $\Delta x = \beta - \alpha$ (3).

ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω η συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο f' σε κάθε σημείο του διαστήματος [α, β],

μία διαμέριση :

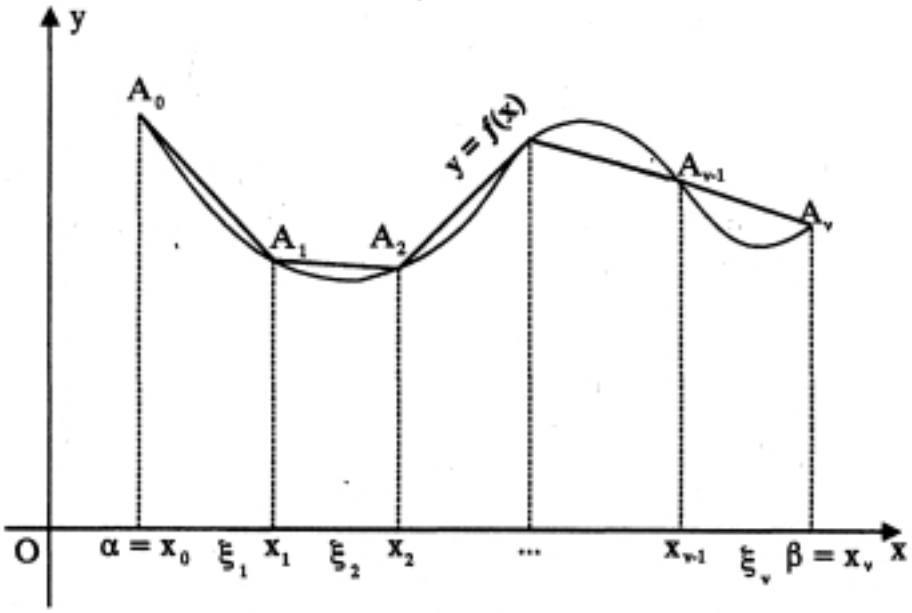
$$P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu = \beta \quad \text{με} \quad \Delta_x = x_\varkappa - x_{\varkappa-1} = \frac{\beta-\alpha}{\nu}, \varkappa = 1, 2, \ldots, \nu$$

και $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ οποιαδήποτε σημεία του $[\alpha, \beta]$ με $x_{\varkappa-1} < \xi_\varkappa < x_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu$.

Τότε, όταν $\nu \to +\infty$ έχουμε (ισοδύναμα) $\Delta_x \to 0$.

Γεωμετρικά αυτό απλά σημαίνει ότι όταν χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε διαρκώς και περισσότερα ($\nu \to +\infty$) υποδιαστήματα μήκους $\Delta_x = x_\varkappa - x_{\varkappa-1}$, τότε το μήκος καθενός από τα υποδιαστήματα αυτά μικραίνει ($\Delta_x \to 0$).

Με αυτές τις προϋποθέσεις και καθώς $\Delta_x \to 0$, ***ορίζουμε ως μήκος της γραφικής παράστασης της f μεταξύ των σημείων της $A_0(\alpha, f(\alpha))$ και $A_\nu(\beta, f(\beta))$ την περίμετρο της τεθλασμένης γραμμής $A_0A_1A_2 \ldots A_\nu$ της οποίας οι κορυφές A_i είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f με αντίστοιχες τετμημένες x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$.***



Σχήμα 2

Για το μήκος $L_{A_0A_\nu}$ της γραφικής παράστασης της f στο $[\alpha, \beta]$ έχουμε :

$$L_{A_0A_\nu} = L_{A_0A_1} + L_{A_1A_2} + \ldots + L_{A_{\nu-1}A_\nu} \qquad \textit{(σχήμα 2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_1)\right]^2}\,\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_2)\right]^2}\,\Delta x + \ldots +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_\nu)\right]^2}\,\Delta x \qquad \textit{λόγω της (3)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \sqrt{1+\left[f'(\xi_\kappa)\right]^2}\,\Delta x =$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \sqrt{1+\left[f'(\xi_\kappa)\right]^2}\,\Delta x.$$

Επομένως $L_{A_0A_\nu} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$, ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης $\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$ στο $[\alpha, \beta]$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

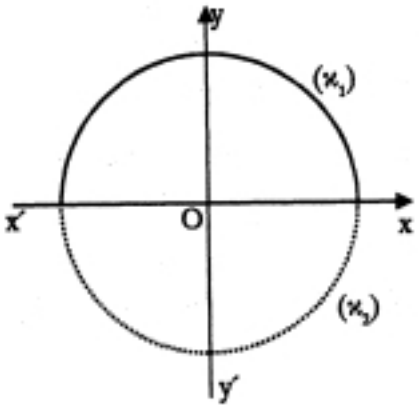
1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

Να υπολογιστεί το μήκος L του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = \varrho^2$, $\varrho > 0$.

Λύση :

Το ημικύκλιο (κ_1) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = \sqrt{\varrho^2 - x^2},\ x \in [-\varrho, \varrho].$$



Είναι φανερό ότι $L = 2L_1$, όπου L_1 είναι το μήκος του ημικυκλίου (κ_1).

Επομένως :

$$L = 2\cdot\int_{-\varrho}^{\varrho} \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2\cdot\int_{-\varrho}^{\varrho} \sqrt{1+\left[\frac{-2x}{2\sqrt{\varrho^2-x^2}}\right]^2}\,dx = 2\cdot\int_{-\varrho}^{\varrho} \sqrt{1+\frac{x^2}{\varrho^2-x^2}}\,dx.$$

Τελικά, $L = 2\cdot\int_{-\varrho}^{\varrho} \sqrt{\frac{\varrho^2}{\varrho^2-x^2}}\,dx.$

Θέτουμε $x = \varrho\cdot\text{ημ}u$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $dx = \varrho\cdot\text{συν}u\,du$.

Με $x = -\rho$ προκύπτει ότι $\eta\mu u = -1$, άρα $u = -\frac{\pi}{2}$.

και με $x = \rho$ προκύπτει ότι $\eta\mu u = 1$, άρα $u = \frac{\pi}{2}$.

Η συνεχής συνάρτηση $\rho\cdot\eta\mu u$ είναι "1 - 1" στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως γνήσια αύξουσα, αφού είναι $(\rho\cdot\eta\mu u)' = \rho\cdot\sigma\upsilon\nu u > 0$ για κάθε $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως $L = 2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2\left(1-\eta\mu^2 u\right)}}\cdot\rho\cdot\sigma\upsilon\nu u du = 2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{|\sigma\upsilon\nu u|}\cdot\rho\cdot\sigma\upsilon\nu u du =$

$$= 2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho du = 2\rho\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi\rho.$$

2. *ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΜΙΑΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ*

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση την $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ 0<\beta<\alpha$.

Αν L είναι το μήκος της έλλειψης, τότε $L = 2\alpha\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\eta\mu^2 u}\,du$, ***όπου ε είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης.***

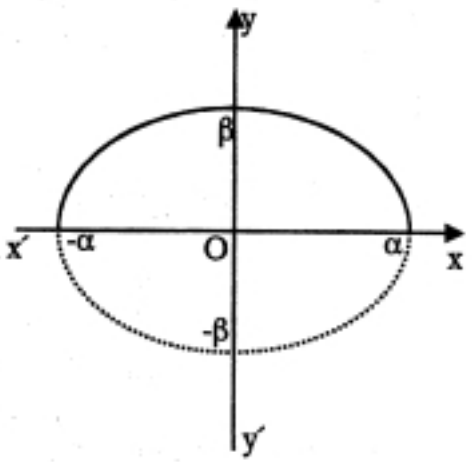
Λύση :

Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται :

$\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$

ή $\quad y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2-x^2\right)$

ή $\quad y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2},\ x\in[-\alpha,\ \alpha]$



Το τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται "πάνω" από τον άξονα x΄x (δηλαδή τα σημεία της έλλειψης με $y \geq 0$) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $x\in[-\alpha, \alpha]$ και έχει μήκος (έστω) L_1.

Είναι φανερό ότι $L = 2\cdot L_1$, αφού η έλλειψη έχει τον x΄x άξονα συμμετρίας της.

Έχουμε : $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $x\in[-\alpha, \alpha]$, $f'(x) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{-x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$, $x\in(-\alpha, \alpha)$.

Οπότε $1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2 - x^2}$.

Επομένως $L_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2 - x^2}}\,dx$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος L_1 θέτουμε :

$x = \alpha\cdot\eta\mu u$, $u = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $dx = \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu u du$

Με $x = -\alpha$ προκύπτει $\eta\mu u = -1$, άρα $u = -\frac{\pi}{2}$.

Με $x = \alpha$ προκύπτει $\eta\mu u = 1$, άρα $u = \frac{\pi}{2}$.

Η συνεχής συνάρτηση $\alpha\cdot\eta\mu u$ είναι "1 - 1" στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως γνησίως αύξουσα, αφού για κάθε $u\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $(\alpha\cdot\eta\mu u)' = \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu u > 0$.

Επομένως :

$$L_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2\cdot\eta\mu^2 u}{\alpha^2\left(1-\eta\mu^2 u\right)}}\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu u du =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\eta\mu^2 u}{\sigma\upsilon\nu^2 u}}\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu u du =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 u}\cdot\left(\alpha^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 u+\beta^2\cdot\eta\mu^2 u\right)}\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu u du =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\alpha^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 u+\beta^2\cdot\eta\mu^2 u}\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\alpha^2\left(1-\eta\mu^2 u\right)+\beta^2\cdot\eta\mu^2 u}\,du =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\alpha^2 - \left(\alpha^2 - \beta^2\right) \cdot \eta\mu^2 u}\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \cdot \eta\mu^2 u\right)}\, du$$

$$= \alpha \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2 u}\, du.$$

Τελικά $L = 2\alpha \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2 u}\, du$(*).

---

3. ***Δίνεται η συνάρτηση*** $f(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $a \neq 0$. ***Να υπολογιστεί το μήκος L του τμήματος της γραφικής παράστασης της f που βρίσκεται μεταξύ των σημείων της :*** $A(0, a)$ ***και*** $B(t, f(t))$, $t > 0$.

Λύση :

Για τον υπολογισμό του μήκους L, έχουμε :

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right),\ x \in [0, t]^{(**)}$$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) \text{ άρα } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right).$$

Οπότε :

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(e^{\frac{x}{\alpha}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2 - 2\right] = \frac{1}{4} \cdot \left[4 + \left(e^{\frac{x}{\alpha}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2 - 2\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(e^{\frac{x}{\alpha}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2 + 2e^{\frac{x}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{x}{\alpha}}\right] = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2.$$

(*) Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2 u}\, du$ δεν εντάσσεται στους στόχους αυτού του άρθρου.

(**) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ στη βιβλιογραφία συναντάται με το όνομα αλυσσοειδής συνάρτηση.

Επομένως $L=\int_0^t\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_0^t\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^t\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^t\left[\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}}\right)'-\alpha\left(e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)'\right]dx=$$

$$=\frac{\alpha}{2}\cdot\left[e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]_0^t=\frac{\alpha}{2}\cdot\left(e^{\frac{t}{\alpha}}-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right).$$

---

4. ***Να υπολογιστεί το μήκος L της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :***

$$f(x)=1-\ln(\sigma\upsilon\nu x),\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}.$$

Λύση :

Έχουμε $f'(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'$, άρα $f'(x)=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi x$.

Οπότε $1+[f'(x)]^2=1+\varepsilon\varphi^2x=1+\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$.

Επομένως $L=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{|\sigma\upsilon\nu x|}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$ θέτουμε : $x=\frac{\pi}{2}-u$ άρα $dx=-du$.

Με $x=0$ προκύπτει $u=\frac{\pi}{2}$, ενώ με $x=\frac{\pi}{4}$ προκύπτει $u=\frac{\pi}{4}$.

Η συνεχής συνάρτηση $\frac{\pi}{2}-u$ είναι "1 - 1" στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ ως γνησίως φθίνουσα, αφού $\left(\frac{\pi}{2}-u\right)'=-1<0$ για κάθε $u\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως $L=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=-\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}du=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu u}du=$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{2\eta\mu\frac{u}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{u}{2}}du=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\frac{\eta\mu\frac{u}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{u}{2}}\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{u}{2}\right)}du=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{u}{2}}\cdot\left(\varepsilon\varphi\frac{u}{2}\right)'du=\left[\ln\left|\varepsilon\varphi\frac{u}{2}\right|\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=\ln\left|\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}\right|=^{(*)}\ln 1-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}=$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

---

5. ***Να υπολογιστεί το μήκος L της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :***

$$f(x)=\alpha\cdot\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)-\frac{x^2}{8\alpha},\ 0<\beta\le x\le\gamma\ \text{ και }\ \alpha\ne 0.$$

Λύση :

Είναι $f(x)=\alpha\cdot\ln\left(\frac{1}{\beta}\cdot x\right)-\frac{1}{8\alpha}\cdot x^2, x\in[\beta,\gamma]$ και $f'(x)=\alpha\cdot\frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{x}{\beta}}-\frac{1}{8\alpha}\cdot 2x=\frac{\alpha}{x}-\frac{x}{4\alpha}$.

Οπότε $1+\left[f'(x)\right]^2=1+\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{4\alpha}\right)^2-\frac{1}{2}=\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{4\alpha}\right)^2+2\cdot\frac{\alpha}{x}\cdot\frac{x}{4\alpha}=$

$$=\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{x}{4\alpha}\right)^2.$$

(*) Βρίσκουμε $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ εφαρμόζοντας τον τύπο : $\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ για $\alpha=\frac{\pi}{8}$.

Επομένως $L=\int_{\beta}^{\gamma}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_{\beta}^{\gamma}\left(\alpha\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{4\alpha}\cdot x\right)dx=$

$$=\left[\alpha\cdot\ln x+\frac{1}{4\alpha}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{\beta}^{\gamma}=\alpha\cdot\ln\gamma+\frac{1}{8\alpha}\cdot\gamma^2-\alpha\cdot\ln\beta-\frac{1}{8\alpha}\cdot\beta^2=$$

$$=\alpha\cdot\ln\frac{\gamma}{\beta}+\frac{1}{8\alpha}\cdot\left(\gamma^2-\beta^2\right).$$

---

6. ***Να υπολογιστεί το μήκος L της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :***

$$f(x)=\frac{x^3}{3a^2}+\frac{a^2}{4x},\ 0<a\le x\le 2a.$$

Λύση :

Είναι $f(x)=\frac{1}{3\alpha^2}\cdot x^3+\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1}{x},\ x\in[\alpha,2\alpha]$

και $f'(x)=\frac{1}{3\alpha^2}\cdot 3x^2-\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{4x^2}.$

Οπότε $1+[f'(x)]^2=1+\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{\alpha^2}{4x^2}\right)^2-\frac{1}{2}=\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{\alpha^2}{4x^2}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2}{4x^2}=$

$$=\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{4x^2}\right)^2.$$

Επομένως $L=\int_{\alpha}^{2\alpha}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_{\alpha}^{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2}\cdot x^2+\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx=$

$$=\left[\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{2\alpha}=\frac{8\alpha}{3}-\frac{\alpha}{8}-\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{4}=\frac{59\alpha}{24}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] GEORGE B. THOMAS - ROSS L. FINNEY : CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY, 6th edition, by Addison Welsey Publishing, 1986

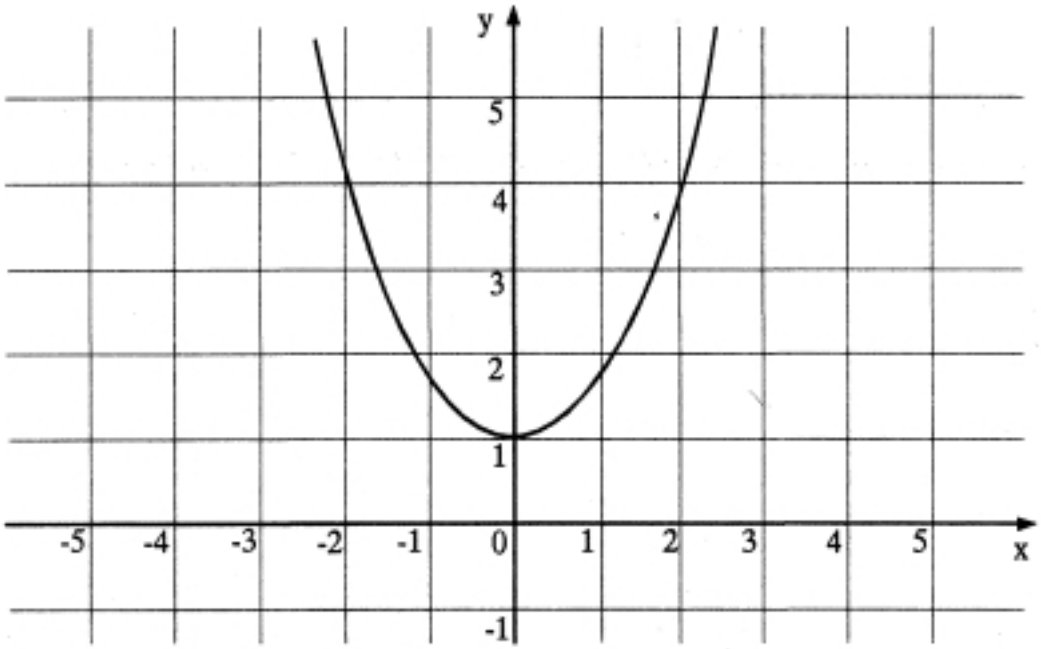
[2] LOUIS BRAND : Μαθηματική Ανάλυση, Ε.Μ.Ε. 1884

[3] PISKOUNOV N. : CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL, Editions Mir - Moscou, 1976

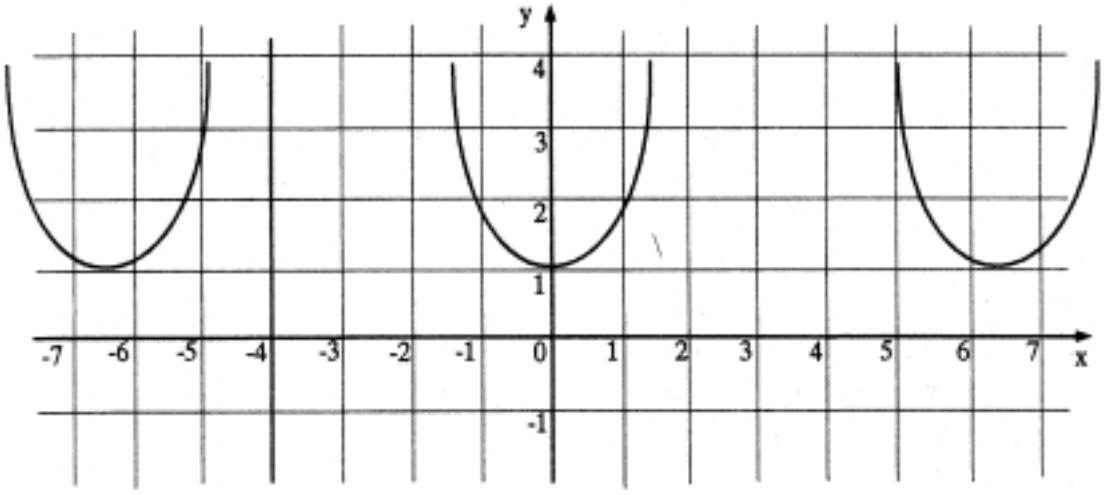
[4] ΣΙΑΧΟΥΔΗΣ ΗΛ. : Γενικά Μαθηματικά, Θεσ/νίκη 1970.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

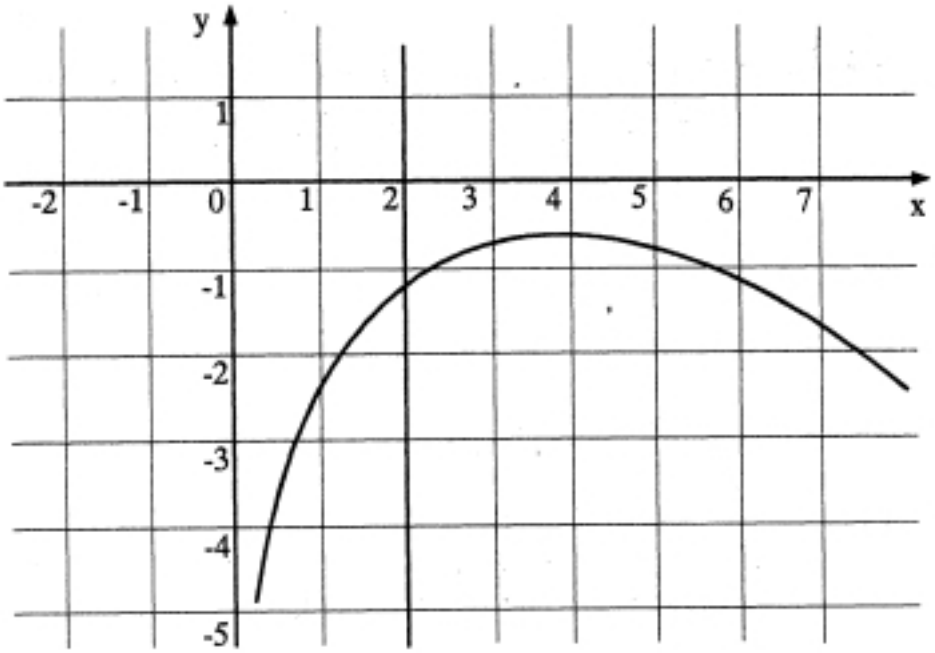
Γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}} \right)$ για $\alpha = 1$



Γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - \ln(\sigma\upsilon\nu x)$



Γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{1}{\beta} \cdot x\right) - \frac{1}{8\alpha} \cdot x^2$ για $\alpha = 2, \beta = 3$



Γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{3\alpha^2} \cdot x^3 + \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{1}{x}$ για $\alpha = 2$