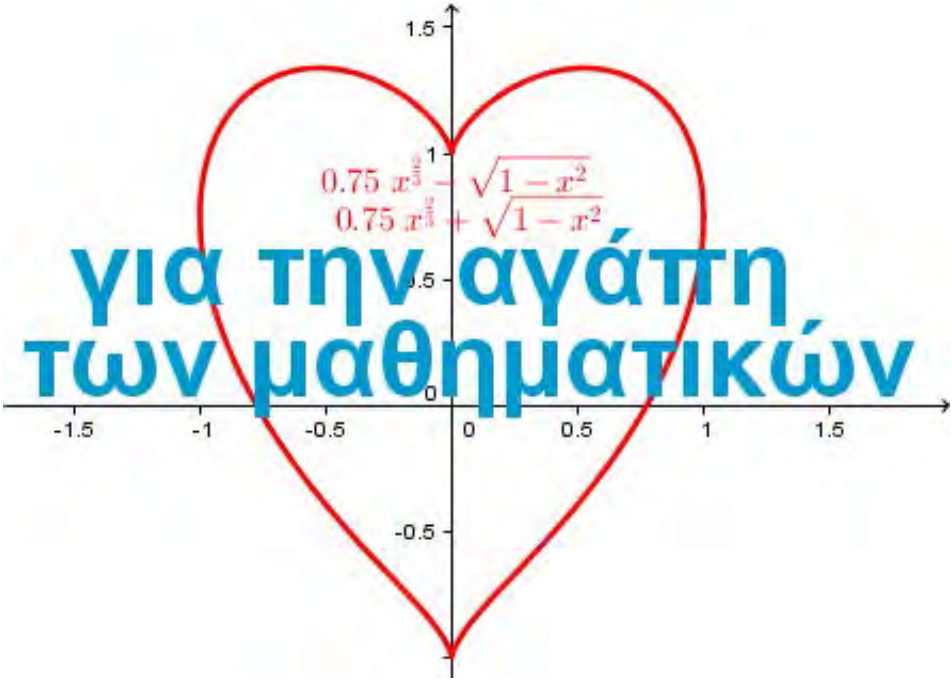
ΣΤΕΛΙΟΥ ΠΑΧΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

β΄ εκδοση

για τους μαθητες του λυκειου και τους υποψηφιους για τις ανωτατες σχολες

εκδοσεις δημοκριτος



https://parmenides51.blogspot.gr

ΣΤΕΛΙΟΥ ΠΑΧΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

β' εκδοση

για τους μαθητες του λυκειου, τους υποψηφιους για τις ανώτατες σχολες και τους φοιτητες των θετικων επιστημων

εκδοσεις δημοκριτος

Κανένα μέρος τοῦ βιβλίου αὐτοῦ δέν μπορεῖ νά ἀναπαραχθεῖ μέ ὁποιοδήποτε μέσο, μηχανικό, ἠλεκτρονικό ἤ φωτοαντιγραφικό χωρίς τήν ἔγγραφη ἄδεια τοῦ συγγραφέα καί τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου. Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο εἶναι ὑπογραμμένο ἀπό τόν συγγραφέα καί σφραγισμένο μέ τή σφραγίδα τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου.

εκδοσεις δημοκριτος

Κωλέττη 33, Ἀθήνα 141, τηλ. 3624042
Μαυρομιχάλη 140, Ἀθήνα 708, τηλ. 6463535

"Τά μαθηματικά προικίζουν τό
μαθηματικό μέ μιά καινούργια αἴσθηση".

Κάρολος Νταρούϊν

Στη συντροφο της ζωης μου,
Λελα

η μαθηματικη επαγωγη

Εισαγωγή

1. Ἡ διανοητική ἐργασία, πού ἀπό μιά ἤ ἀπό περισσότερες δοσμένες λογικές προτάσεις παράγουμε μέ λογική συνέπεια ἄλλη πρόταση, διάφορη σέ ὕλη καί σέ εἶδος, ἤ καί τά δύο, λέγεται στή Λογική συλλογισμός.

Κατά τήν πορεία τῆς διανόησης, οἱ συλλογισμοί διαιροῦνται, σέ δύο κατηγορίες, τούς παραγωγικούς συλλογισμούς καί τούς ἐπαγωγικούς συλλογισμούς.

Α) Ὁ Παραγωγικός συλλογισμός ἤ παραγωγή προχωρεῖ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἀπό τό ὅλο νά συμπεραίνει γιά τά ἐπί μέρους.

Σάν ἀρχή ὁ παραγωγικός συλλογισμός ἔχει μιά λογική πρόταση, ἡ ὁποία ὑποτίθεται ὅτι ἰσχύει (ὁρισμός, θεώρημα πού ἔχει ἀποδειχτεῖ κ.τ.λ.) καί μέ τή βοήθεια ἑνός ἄκόμη δεδομένου καταλήγει σέ μιά πρόταση πού γίνεται φανερή σάν ἀναγκαία συνέπεια τῶν ἀρχῶν ἀπό τίς ὁποῖες ξεκινήσαμε.

Παράδειγμα: Ὅλα τά πολύεδρα εἶναι στερεά (γενική παραδοχή).

Ὁ κύβος εἶναι πολύεδρο (δοσμένη πρόταση).

Ἄρα: Ὁ κύβος εἶναι στερεό (εἰδική πρόταση).

Μέ τόν παραγωγικό συλλογισμό ἀποδείχνουμε κάτι τό συγκεκριμένο καί εἰδικό, σάν λογικό συμπέρασμα ἑνός γενικοῦ καί ἀφηρημένου (ὁρισμός, θεώρημα πού ἔχει ἀποδειχτεῖ κ.τ.λ.), πού διέπει ὅλα τά ὅμοια του. Ἡ ἀπόδειξη στά μαθηματικά εἶναι ἕνα εἶδος παραγωγικοῦ συλλογισμοῦ.

Β) Ὁ Ἐπαγωγικός συλλογισμός ἤ ἐπαγωγή προχωρεῖ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε νά βεβαιωνόμαστε ἔστω καί μέ

ἐπιφύλαξη ὅτι τά συμπεράσματά μας εἶναι ἀληθινά γενικά ὅταν ἀληθεύουν γιά ἕνα πλῆθος ὁμοειδῶν περιπτώσεων. Δηλαδή μέ τίς ἐπί μέρους παρατηρήσεις βγάζουμε ἕνα συμπέρασμα πού τό θεωροῦμε γενικά ὅτι ἰσχύει. Δηλαδή, ἡ ἐπαγωγή ἔχει μονάχα πιθανότητα γιά τή γενική ἀλήθεια.

Παράδειγμα: Ὁ κύβος εἶναι πολύεδρο.

Ἡ πυραμίδα εἶναι πολύεδρο.

Τό πρίσμα εἶναι πολύεδρο.

Ὁ κύβος, ἡ πυραμίδα, τό πρίσμα εἶναι στερεά.

Ἄρα: Ὅλα τά στερεά εἶναι πολύεδρα. Πράγμα πού δέν ἀληθεύει. Ἡ Λογική χαρακτηρίζει τήν ἐπαγωγή τοῦ παραπάνω παραδείγματος, ἀτελή, γιατί τά συμπεράσματά της δέν εἶναι ἀναγκαῖες συνέπειες τῶν ὑποθέσεών μας.

Στό παράδειγμά μας δέν ἔχουμε διαπιστώσει ὅτι, καί ὅσα στερεά δέν ἔχουμε ὡς τώρα ἐξετάσει ὅτι εἶναι πολύεδρα, ἄρα τό συμπέρασμά μας εἶναι ἀμφίβολης ἀλήθειας.

2. Ἡ Μαθηματική ἐπαγωγή, ἡ τέλεια ἐπαγωγή δέν κάνει χρήση τοῦ ἐπαγωγικοῦ συλλογισμοῦ, ὅπως χρησιμοποιεῖται αὐτός στή Λογική, δηλ. νά συμπεραίνει γενικές ἀλήθειες ἀπό μερικές περιπτώσεις.

Ἡ Μαθηματική ἐπαγωγή, ἔχει ἀπόλυτη βεβαιότητα: Τό γεγονός αὐτό ἀποτελεῖ μία ἐξαιρετική δύναμη τῆς μεθόδου αὐτῆς, πού καμμιά ἄλλη ἐπιστήμη, ἐκτός ἀπό τά Μαθηματικά δέν κατέχει.

Τήν τέλεια ἐπαγωγή μεταχειρίστηκε στά Μαθηματικά μέ ἀκρίβεια καί πληρότητα πρῶτος ὁ Ἑλληνοϊταλός Francesco Maurolyko (Μεσσήνη 1491-1575) καί πῆρε τό ὄνομα της ἀπό τόν J. Wallis καί De Morgan.

3. Κάθε συμπέρασμα στά Μαθηματικά βγαίνει ὄχι μονάχα ἀπό τούς νόμους τῆς Λογικῆς, ἀλλά καί ἀπό τά ἀξιώματα πού βάζουμε ἤ ἀπό ὑποθέσεις ἤ ἀπό ἀποδειχθέντα θεωρήματα.

Ἡ ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν ἀναφέρει πολλά σφάλματα πού ἔγιναν, γιατί χρησιμοποιηθήκανε ἔννοιες πού δέν εἶχαν ὁριστεῖ ἐπακριβῶς, ἤ γίνανε παραδεκτές προτάσεις πού

ἡ ἀλήθεια τους ἦταν φανερή χωρίς ἀπόδειξη.

Π.χ. Ὁ Fermat τό 1640 ἰσχυρίστηκε πώς ὁ ἀριθμός $2^{2^\nu}+1$ γιά $\nu=1,2,3,4,\ldots$ δίνει πρώτους ἀριθμούς $\forall\nu\in N$. Τό 1730 ὁ Euler ἔδειξε πώς αὐτό εἶναι λάθος, γιατί γιά $\nu=5$ δίνει τόν σύνθετο ἀριθμό 6416700417.

Ἐπίσης ἄν στό πολυώνυμο τοῦ Euler: $f(\nu)=\nu^2+\nu+41$ θέσουμε $\nu=1,2,3,4,5$, βρίσκουμε τούς πρώτους ἀριθμούς 43,47,53,61,71, ἄρα δίνει πρώτους ἀριθμούς. Τό συμπέρασμα αὐτό δέν εἶναι ἀληθινό, γιατί ἄν συνεχίσουμε νά δίνουμε στό ν τιμές ἀπό 6 καί πάνω μέχρι τό 39, τό $f(\nu)$ δίνει πρώτους ἀριθμούς. Γιά $\nu=40$ ὅμως τό $f(\nu)$ δηλ. ὁ $f(40)$ εἶναι ὁ σύνθετος ἀριθμός 1725.

Τά σφάλματα αὐτά γιννήκανε ἀφορμή, ὥστε τά Μαθηματικά νά θεμελιώνονται ὁλοένα καί σέ ποιό στέρεες βάσεις.

4. Τή μέθοδο τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς χρησιμοποιοῦμε γιά νά δείξουμε προτάσεις, πού ἐξαρτιοῦνται ἀπό ἕνα ἤ καί πιό πολλούς φυσικούς ἀριθμούς καί παρουσιάζεται σέ δύο μορφές.

Ἡ πρώτη μορφή βασίζεται στό ἀξίωμα τοῦ Peano, ἡ δεύτερη στήν ἀρχή τοῦ ἐλάχιστου φυσικοῦ.

Ἀλλά, ἐπειδή οἱ δύο αὐτές προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες, μποροῦμε νά ἰσχυριστοῦμε ὅτι ἡ μέθοδος τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς στηρίζεται στό ἀξίωμα τοῦ Peano.

5. Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατά τόν Peano.

Τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐφοδιασμένο μέ τίς παρακάτω ἰδιότητες ἤ ἀξιώματα τοῦ Peano.

Ἀξίωμα I: Ὁ 1 εἶναι φυσικός ἀριθμός δηλ. $1\in N$.

Ἀξίωμα II: Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ὑπάρχει "ἕνας καί μόνον ἕνας" ὁ ἑπόμενος φυσικός ἀριθμός, δηλ.

$$\forall\nu\in N \iff \nu+1\in N.$$

Ἀξίωμα III: Δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν μέ ἑπόμενο τοῦ τόν 1 δηλ. $\nu+1\neq 1$ (ἤ ἀκριβέστερα $\nu+1>1$) $\forall\nu\in N$.

Ἀξίωμα IV: Δύο φυσικοί ἀριθμοί, πού ἔχουν τόν ἴδιο ἑπόμενο εἶναι ἴσοι δηλ. $\forall\nu\in N\wedge\mu\in N$ μέ $\nu+1=\mu+1 \implies \nu=\mu$.

Ἀξίωμα V: Κάθε σύνολο φυσικῶν ἀριθμῶν στό ὁποῖο ἀνή-

κει ὁ 1 καί μαζί μέ ὁποιονδήποτε φυσικό ἀριθμό ἀνήκει σ' αὐτό καί ὁ ἐπόμενός του ν+1, συμπίπτει μέ τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν N δηλ. ἄν $1\in A$ καί $\forall\nu\in A \Longrightarrow \nu+1\in A \Longrightarrow A\equiv N$.

Τό ἀξίωμα V χαρακτηρίζεται σάν "ἀρχή τῆς τέλειας ἤ Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς" καί μέ τή βοήθειά του ἀποδείχνουμε τό θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

6. Ἄν σέ κάθε φυσικό ἀριθμό μ ἀντιστοιχεῖ μιά μόνο πρόταση F_μ, τότε καί μόνο τότε λέμε ὅτι οἱ προτάσεις $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ ἀποτελοῦν ἀκολουθία προτάσεων καί τή συμβολίζουμε μέ $\{F_\mu\}$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό βγαίνει ὅτι ὅταν λέμε ὅτι ἡ πρόταση F_μ ἰσχύει γιά κάθε φυσικό μ, ἐννοοῦμε ὅτι ὅλες οἱ προτάσεις $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ ἰσχύουν.

7. Ἁπλή τέλεια ἐπαγωγή (Πρώτη μορφή) θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς: "Ἄν μιά πρόταση F(ν), πού ἐξαρτιέται ἀπό τόν φυσικό ἀριθμό ν, ἀληθεύει γιά ν=1, καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά $\nu=\kappa\in N$ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἀληθεύει γιά $\nu=\kappa+1$, τότε ἡ πρόταση ἀληθεύει καί γιά κάθε φυσικό ἀριθμό".

Ἔστω A τό σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πού ἀληθεύει ἡ πρόταση. Στό σύνολο A ἀνήκει προφανῶς ὁ φυσικός ἀριθμός 1 δηλ. $1\in A$, ἀφοῦ ἀπό τήν ὑπόθεσή μας, ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά ν=1, δηλ. τό $A\neq\emptyset$. Ἐπί πλέον, ἄν $\kappa\in A$, τότε καί $(\kappa+1)\in A$, γιατί ἄν $\kappa\in A$, αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ F(κ) ἀληθεύει γιά ν=κ. Ἄρα ἔνεκα τῆς ὑποθέσεώς καί ἡ F(κ+1) εἶναι ἀληθής, ἄρα καί $(\kappa+1)\in A$.

Τό A λοιπόν ἔχει τίς ἰδιότητες τοῦ V ἀξιώματος, ἄρα συμπίπτει μέ τό σύνολο N. Ἐπομένως ἡ πρόταση F(ν) ἀληθεύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό.

Πολλές φορές μιά πρόταση F(ν) μπορεῖ νά ἔχει νόημα γιά τιμές τοῦ ν μεγαλύτερες ἤ ἴσες ἑνός ὁρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν. Τότε τό θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἰσχύει ὑπό τήν ἑξῆς διατύπωση:

"Ἄν μιά πρόταση F(ν), πού ἐξαρτιέται ἀπό ἕνα φυσικό ἀριθμό ν, ἀληθεύει γιά $\nu=\nu_0\in N$ καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἀληθεύει γιά $\nu=\kappa>\nu_0$ ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, τότε ἡ πρόταση F(ν) ἀληθεύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu>\nu_0$.

Τό παραπάνω θεώρημα διατυπώνεται σύντομα μέ χρήση συμβόλων τῆς Λογικῆς ὡς ἑξῆς:

Α μορφή: $F(1)\wedge[F(\kappa)\text{ἀληθής}\Longrightarrow F(\kappa+1)]\text{ ἀληθής}\Longrightarrow F(\nu)\text{ἀληθής }\forall\nu\in N.$

Β μορφή: $\{F(\nu_0)\wedge[F(\kappa)\text{ἀληθής}\Longrightarrow F(\kappa+1)]\text{ἀληθής}\Longrightarrow F(\nu)\text{ἀληθής }\forall\nu-N\geq\nu_0.$

Σημείωση Α.

Γιά νά δείξουμε μιά πρόταση F(ν) μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Ἀποδείχνουμε ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά ν=1, μιά καί ἡ πρόταση ἔχει νόημα γιά ν=1, ἤ γιά τόν ἐλάχιστο φυσικό ἀριθμό ν_0 γιά τόν ὁποῖο ἔχει νόημα.

β) Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ πρόταση εἶναι ἀληθινή γιά ν=κ∈N καί δείχνουμε μέ τή βοήθεια τῆς ἀλήθειας τῆς F(κ), ἴσως δέ καί τῆς F(1)τήν ἀλήθεια τῆς F(κ+1).

γ) Συμπεραίνουμε τότε σύμφωνα πρός τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά κάθε ν∈N.

Σημείωση Β.

Ἡ ἀπόδειξη τῆς ἀλήθειας τῆς πρότασης F(ν) γιά ν=κ+1 μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά ν=κ, δέν ἀρκεῖ νά συμπεράνουμε ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά ∀ν∈N. Εἶναι ἀπαραίτητο νά γίνεται ἡ ἀπόδειξη γιά ν=1 (ἤ καί γιά τόν ἐλάχιστο φυσικό ἀριθμό ν_0 γιά τόν ὁποῖο ἔχει νόημα ἡ F(ν)).

8. Ἀρχή τοῦ ἐλάχιστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Σέ κάθε σύνολο φυσικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντα ἕνας ἐλάχιστος. Δηλ. ἄν $A\neq\emptyset\wedge A\subseteq N\Longrightarrow\exists\,\nu_0\leq\nu\in N\ \forall\nu\in A.$

Ἀπόδειξη

Ἄν τό A⊆N καί γενικώτερα, ἄν τό 1∈A, τότε τό θεώρημα ἰσχύει, γιατί τότε ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός τοῦ συνόλου A εἶναι τό 1. Ἔστω ὅτι δέν συμβαίνει τό παραπάνω, καί ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο

$$B=\{\nu\in N\wedge\nu<\mu\ \forall\ \mu\in A\}$$

δηλ. τό ὑποσύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πού τά στοιχεῖα του εἶναι μικρότερα ἀπό κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου A. Εἶναι φανερό ὅτι τό B≠∅ γιατί σ'αὐτό ἀνήκει ὁ 1. Γιά τό σύνολο B δέν ἰσχύει ὅτι $\forall\nu\in A\Longrightarrow\nu+1\in A$, δηλ. ἄν a∈A, τότε δέν ἔπεται πάντα ὅτι καί a+1∈A, γιατί ἄν συνέβαινε αὐτό τότε B⊆N, ἄρα τό A=∅ τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο. Ὑπάρχει λοιπόν

ένα φυσικός αριθμός μεΒ μέ μ+1∈Β. Θέτουμε μ+1=μ$_0$. Ὁ μ$_0$ ἀνήκει στό Α. Πραγματικά, ἀρχικά ἰσχύει γι'αὐτόν, ἐπειδή εἶναι ἀμέσως ἑπόμενος τοῦ μ προφανῶς α>μ$_0$ γιά κάθε α∈Α, ἀφ'ἑτέρου δέ ἰσχύει α>μ$_0$ γιά κάθε α∉Α, γιατί τότε ἔπρεπε νά εἶναι μ$_0$∈Β, ὥστε ἰσχύει α=μ$_0$ γιά ἕνα τουλάχιστον α∈Α δηλ. μ$_0$∈Α. Ἐπειδή δέ α≥μ$_0$ ∀α∈Α, ὁ μ$_0$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου Α ο.ε.δ.

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί

Α)Νά δειχτεῖ ὅτι $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$ (1) ∀ν∈Ν.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά ν=1 ἀληθεύει. Γιατί, ἄν θέσουμε ν=1 τό πρῶτο μέλος τῆς (1) ἔχει μονάχα ἕνα ὅρο καί ἡ (1) γίνεται: $1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2=1$ ἡ ὁποία εἶναι ἀληθινή.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει γιά ν=κ∈Ν δηλ. ὅτι ἰσχύει:

$$\Sigma_\kappa=1^3+2^3+3^3+\ldots+\kappa^3=\left[\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right]^2 \quad (2)$$

Θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\Sigma_{\kappa+1}=1^3+2^3+3^3+\ldots+\kappa^3+(\kappa+1)^3=\left[\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}\right]^2$$

Ἀλλά $\Sigma_{\kappa+1}=\Sigma_\kappa+(\kappa+1)^3=\left[\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right]^2+(\kappa+1)^3=(\kappa+1)^2\left[\frac{\kappa^2}{4}+\kappa+1\right]=\left[\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}\right]^2$

Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα κατά τήν ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύει γιά ∀ν∈Ν.

Β) Ἄν ν∈Ν∧ν>2, νά δειχτεῖ ὅτι: $\nu^{\nu+1}>(\nu+1)^\nu$ (1)

Ἀπόδειξη

Γιά ν=3 ἡ (1) γίνεται $3^4>4^3$ τό ὁποῖο ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει γιά ν=κ∈Ν δηλ. ὅτι $\kappa^{\kappa+1}>(\kappa+1)^\kappa$ (2). Θά δείξουμε ὅτι μέ τήν προϋπόθεση αὐτή, ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$(\kappa+1)^{\kappa+2}>(\kappa+2)^{\kappa+1}$$

Πολ/ζουμε καί τά δύο μέλη (2) ἐπί $(\kappa+1)^{\kappa+2}$ καί ἔχουμε:

$$\kappa^{\kappa+1}(\kappa+1)^{\kappa+2}>(\kappa+1)^{2\kappa+2}\Rightarrow(\kappa+1)^{\kappa+2}>\frac{(\kappa+1)^{2\kappa+2}}{\kappa^{\kappa+1}}$$

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $\frac{(\kappa+1)^{2\kappa+2}}{\kappa^{\kappa+1}}>(\kappa+2)^{\kappa+1}\Rightarrow$

$(\kappa+1)^{2\kappa+2}>(\kappa+2)^{\kappa+1}\cdot\kappa^{\kappa+1}$ ἤ $(\kappa+1)^2>\kappa(\kappa+2)$ τό ὁποῖο ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1. Ἄρα κατά τήν ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἀληθεύει καί γιά ∀ν∈Ν.

Σημείωση

Ἄν ἔχουμε νά ἀποδείξουμε μέ τήν ἐπαγωγική μέθοδο μιά ἀνισότη-

τα, πρέπει νά δοκιμάζουμε άρχικά τόν παραπάνω τρόπο, δηλ. νά δημιουργοῦμε μέ κατάλληλους μετασχηματισμούς ἕνα ἐκ τῶν μελῶν τῆς ὑποτιθέμενης σάν ἀληθινῆς καί τῆς ἀποδεικτέας ἴσα. Θά ἔχουμε τότε νά ἀποδείξουμε ὅτι: ἄν A>B τότε καί A>Γ. Γι'αὐτό ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι B≥Γ. Γιατί ἀφοῦ A>B καί B≥Γ ἀναγκαστικά θά εἶναι A>Γ.

Εἶναι φανερό ὅτι εἶναι δυνατό ἄν ἀληθεύει ἡ A<B νά ἀληθεύει καί ἡ A<Γ χωρίς νά εἶναι B<Γ.

Ὅμοια,γιά νά δείξουμε ὅτι ἡ A>B $\Longrightarrow$ τήν Γ>B ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι Γ>A.

9. Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς (Δεύτερη μορφή).

"α) Ἄν μιά πρόταση F(ν), πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό φυσικό ἀριθμό ν ἀληθεύει γιά ν=1, β) καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει ∀ν∈N μικρότερο ἀπό τυχόντα κ∈N μέ κ>1 ἀληθεύει καί γιά ν=κ, τότε θά ἀληθεύει καί γιά∀ν∈N.

Ἀπόδειξη

Ἔστω A≠∅ τό σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, γιά τούς ὁποίους δέν ἀληθεύει ἡ πρόταση F(ν). Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ ἐλάχιστου φυσικοῦ στό σύνολο A θά ὑπάρχει ἕνας ἐλάχιστος, ἔστω ὁ κ καί γιά τόν ὁποῖο προφανῶς δέν ἰσχύει ἡ πρόταση, θά εἶναι δέ κ≥2 γιατί γιά ν=1 ἡ πρόταση ἰσχύει. Ἀφοῦ ὁ κ εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικός ἀριθμός γιά τόν ὁποῖο ἡ πρόταση δέν ἀληθεύει ἔπεται ὅτι ἡ πρόταση θά ἰσχύει γιά τούς μικρότερούς του, ἄρα θά ἰσχύει καί γιά ν=κ-1. Ἐπειδή ὅμως ἡ F(ν) ἀληθεύει ∀ν∈N μικρότερο ἀπό τόν τυχαῖο κ∈N>1, θά ἀληθεύει γιά ν=κ-1, ἄρα θά ἀληθεύει καί γιά ν=κ, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί γιά τόν κ ἡ F(ν) δέν εἶναι ἀληθής. Ἄρα A=∅ καί ἐπομένως ἡ F(ν) ἀληθεύει ∀ν∈N.

Σημείωση A

Πολλές φορές μιά πρόταση F(ν) ἔχει νόημα γιά τιμές τοῦ ν μεγαλύτερες ἤ ἴσες ἑνός ὁρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ $ν_0$>1. Στήν περίπτωση αὐτή τό πιό πάνω θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἰσχύει ἐπίσης ὑπό τήν ἑξῆς διατύπωση:

""Ἄν μιά πρόταση F(ν) πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό φυσικό ἀριθμό ν, ἀληθεύει γιά ν=$ν_0$∈N καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν μικρότερο ἀπό τόν τυχόντα φυσικό ἀριθμό κ>$ν_0$, ἀληθεύει καί γιά ν=κ, τότε ἡ F(ν) θά ἀληθεύει καί γιά κάθε φυσικό ν>$ν_0$".

Σημείωση Β.

α) Γιά νά ἀποδείξουμε μιά πρόταση F(ν) μέ τή μέθοδο τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς (δεύτερη μορφή) ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά ν=1 ἄν ἡ πρόταση ἔχει νόημα ἤ γιά τόν ἐλάχιστο φυσικό ἀριθμό $ν_0$, γιά τόν ὁποῖο ἔχει νόημα.

β) Δεχόμαστε ὅτι ἡ πρόταση F(ν) ἀληθεύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν μικρότερο ἀπό τόν τυχόντα φυσικό κ καί ἀποδεικνύουμε ἀπό τήν ὑπόθεση αὐτή ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει γιά ν=κ.

γ) Συμπεραίνουμε τότε σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά κάθε ν∈N.

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί

α) Νά δειχτεῖ ὅτι $3^ν>ν^2$ (1) $\forall ν\in N$, μέ ν≥4.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=4 ἡ (1) γίνεται $3^4>4^2$ πού ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει $\forall κ\in N$ καί κ≥4. Τότε ἔχουμε: $3^κ>κ^2$ (2). Πολ/ζουμε καί τά δύο μέλη τῆς (2) ἐπί 3 καί ἔχουμε:

$$3^{κ+1}>3κ^2=3(κ+1)^2\frac{κ^2}{(κ+1)^2}=3κ^2$$

δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1. Ἐπειδή ἡ (1) ἀληθεύει γιά ν=1, καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἀληθεύει γιά κάθε ν∈N<τοῦ τυχόντα φυσικοῦ κ>1, δείχτηκε ὅτι ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1 $\Longrightarrow$ ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει $\forall ν\in N$ ὅπου ν≥4.

β) Νά δειχτεῖ ὅτι $5^{2^{ν-2}}-1=$πολ.$2^ν$ (1) $\forall ν\in N$ μέ ν≥2.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=2 ἔχουμε $5^{2^0}-1=5-1=4=$πολ.2^2 πού ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει γιά ν=κ, κ∈N∧κ≥2 δηλ. ὅτι $5^{2^{κ-2}}-1=$πολ.$2^κ$ (2). Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ὅτι ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. ὅτι

$$5^{2^{κ-1}}-1=\text{πολ.}2^{κ+1} \qquad (3)$$

Ἡ (2) γράφεται: $5^{2^{κ-2}}=$πολ.$2^κ+1$ καί ὑψώνοντας καί τά δύο μέλη της στό τετράγωνο ἔχουμε: $(5^{2^{κ-2}})^2=(\text{πολ.}2^κ+1)^2\Longrightarrow$

$$5^{2^{κ-2}.2}=\text{πολ.}2^κ+2\text{πολ.}2^κ+1=\text{πολ.}2^{κ+1}+1 \Longrightarrow 5^{2^{κ-1}}=\text{πολ.}2^{κ+1}+1$$

$$\Longrightarrow 5^{2^{κ-1}}-1=\text{πολ.}2^{κ+1}$$ δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall ν\in N$ μέ ν≥2.

11. Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς (Τρίτη μορφή).

"α) Ἂν μιά πρόταση $F(\nu)$ πού ἐξαρτᾶται ἀπό τόν φυσικό ἀριθμό ν ἀληθεύει γιά $\nu=1$ καί $\nu=2$. β) καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει γιά $\nu=\kappa-2$, καί $\nu=\kappa-1$ ὅπου $\kappa\in N$ καί $\kappa>2$, ἀποδειχτεῖ ὅτι ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa$, τότε ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει καί γιά $\forall\nu\in N$".

Ἀπόδειξη

Ἔστω $A\neq\emptyset$ τό σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γιατί τούς ὁποίους δέν ἀληθεύει ἡ πρόταση $F(\nu)$. Στό σύνολο A θά ὑπάρχει ἕνας ἐλάχιστος, ἔστω ὁ κ, καί γιά τόν ὁποῖο προφανῶς δέν ἀληθεύει ἡ πρόταση, θά εἶναι δέ $\kappa>2$, γιατί γιά $\nu=1$ καί $\nu=2$ ἡ πρόταση ἀληθεύει. Ἀφοῦ λοιπόν ὁ κ εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικός γιά τόν ὁποῖο ἡ πρόταση δέν ἀληθεύει ἕπεται ὅτι γιά τούς μικρότερούς του, ἡ πρόταση θά ἀληθεύει, ἄρα θά ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa-1$ καί $\nu=\kappa-2$. Ἐπειδή ὅμως ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa-2$ καί $\nu=\kappa-1$ ἕπεται ὅτι θά ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa$, πού εἶναι ἄτοπο, γιατί γιά $\nu=\kappa$ ἡ πρόταση δέν ἀληθεύει. Ἄρα $A=\emptyset$ καί ἐπομένως ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει $\forall\nu\in N$.

Γιά νά ἀποδείξουμε μιά πρόταση $F(\nu)$ μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς (τρίτη μορφή) ἐργαζόμαστε ὅπως στή §7 καί 9.

Ἐφαρμογαί

α) Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση $x^\nu+y^\nu$ γιά $\nu\geq2$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν ἀκέραιο πολύωνυμο ὡς πρός $S=x+y$ καί $P=xy$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$. Γιά $\nu=3$ ἔχουμε:

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=S^3-3PS.$$

Ἄρα ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά $\nu=2$ καί $\nu=3$. Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά $\nu=\kappa$ καί $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$x^\kappa+y^\kappa=\Pi(S,P)\quad(1)\quad\text{καί}\quad x^{\kappa+1}+y^{\kappa+1}=\Lambda(S,P)\quad(2).$$

Πολ/ζουμε καί τά δύο μέλη τῆς (2) ἐπί $x+y$ καί ἔχουμε:

$$(x^{\kappa+1}+y^{\kappa+1})(x+y)=(x+y)\Lambda(S,P)\ \text{ἤ}$$

$$x^{\kappa+2}+y^{\kappa+2}+xy^{\kappa+1}+x^{\kappa+1}y=S\Lambda(S,P)\ \text{ἤ}$$

$$x^{\kappa+2}+y^{\kappa+2}+xy(x^\kappa+y^\kappa)=S\Lambda(S,P)\Longrightarrow$$

$$x^{\kappa+2}+y^{\kappa+2}=S\Lambda(S,P)-P\Pi(S,P)=F(S,P)$$

Ἄρα ἡ πρόταση ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa+2$ καί κατά συνέπεια $\forall\nu\in N$.

β) Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός $\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^\nu-(1-\sqrt{2})^\nu]$ $\nu\in N$ εἶναι φυσικός.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})]=\frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=2\in N$, ἀληθεύει.

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2]=\frac{1}{\sqrt{2}}4\sqrt{2}=4\in N$, ἀληθεύει. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει γιά $\nu=\kappa$ καί $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^\kappa-(1-\sqrt{2})^\kappa]\in N \quad \text{καί} \quad \alpha_{\kappa+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^{\kappa+1}-(1-\sqrt{2})^{\kappa+1}]\in N$$

θά δείξουμε ὅτι ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa+2$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_{\kappa+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^{\kappa+2}-(1-\sqrt{2})^{\kappa+2}]\in N.$$

Ἔχουμε ὅτι: $2\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}[\,2(1+\sqrt{2})^{\kappa+1}-2(1-\sqrt{2})^{\kappa+1}+(1+\sqrt{2})^\kappa-(1-\sqrt{2})^\kappa]=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^\kappa(2+2\sqrt{2}+1)-(1-\sqrt{2})^\kappa(2-2\sqrt{2}+1)]=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^\kappa(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^\kappa(1-\sqrt{2})^2]=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^{\kappa+2}-(1-\sqrt{2})^{\kappa+2}]=\alpha_{\kappa+2}$ δηλ. $\alpha_{\kappa+2}=2\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa$

καί ἐπειδή $\alpha_{\kappa+1}\wedge\alpha_\kappa\in N$ ἕπεται ὅτι καί $\alpha_{\kappa+2}\in N$. Ἄρα $\alpha_\nu\in N$, $\forall\nu\in N$.

12. Δ ι π λ ή τ έ λ ε ι α έ π α γ ω γ ή.

Ἄν μιά πρόταση $P(\mu,\nu)$ πού ἐξαρτᾶται ἀπό δυό φυσικούς ἀριθμούς μ καί ν, καί ζητᾶμε νά δείξουμε ὅτι ἀληθεύει γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς (ἤ γιά ὅλους τούς φυσικούς μ καί ν τούς πιό μεγάλους ἀντίστοιχα τῶν φυσικῶν μ_0 καί ν_0) τότε ἔχουμε τή διπλή τέλεια ἐπαγωγή, πού στηρίζεται στήν ἀρχή τοῦ ἐλάχιστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ ἀρχή αὐτή μᾶς δίνει ἀμέσως τήν παρακάτω ἀποδεικτική πορεία.

α) Ἀποδείχνουμε τήν πρόταση γιά $\nu=1$ δηλ. τήν $P(\mu,1)$ $\forall\mu$. Γι'αὐτό ἀποδείχνουμε πρῶτα τήν $P(1,1)$ καί μετά μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἀληθεύει ἡ $P(\mu,1)$ δείχνουμε μέ ἁπλή ἐπαγωγή ὅτι ἀληθεύει ἡ $P(\mu+1,1)$ μέ $\mu\in N$.

β) Κάνουμε ἁπλή τέλεια ἐπαγωγή ὡς πρός ν, δηλ. μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἀληθεύει ἡ $P(\mu,\nu)$ ἀποδείχνουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ $P(\mu,\nu+1)$ ὅπου $\mu,\nu\in N$ αὐθαίρετοι.

Τά παραπάνω ἀφοροῦν προτάσεις, πού ἡ ἐλάχιστη τιμή

τῶν μ καί ν εἶναι 1. Ἐφαρμόζουμε ὅμως τά παραπάνω καί ὅταν οἱ μ καί ν δέν καλύπτουν ὅλο τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ ὅμως νά δειχτεῖ ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά τίς ἐλάχιστες τιμές τῶν μ καί ν.

Ἡ μέθοδος αὐτή ἐφαρμόζεται καί γιά προτάσεις μέ μορφή $F(\mu,\nu,\rho,\sigma,\ldots)$ ὅπου $\mu,\nu,\rho,\sigma\in N$.

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί

α) Ἄν $\mu,\nu\in N$ νά δειχτεῖ ὅτι $x^{\mu}\cdot x^{\nu}=x^{\mu+\nu}$ $(x\neq 0)$.

Ἀπόδειξη

Ἀπό τόν ὁρισμό τῶν δυνάμεων εἶναι: $x^{\mu}.x^{1}=x^{\mu}.x=x^{\mu+1}$. Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει $\forall\mu\in N$ καί $\nu=1$.

Ἔστω ὅτι: $x^{\mu}\cdot x^{\nu}=x^{\mu+\nu}$ ὅπου $\mu,\nu\in N$. Τότε ἐπειδή:

$x^{\mu}\cdot x^{\nu+1}=x^{\mu}(x^{\nu}\cdot x)=(x^{\mu}\cdot x^{\nu})x=x^{\mu+\nu}\cdot x=x^{\mu+\nu+1}$, ἕπεται ὅτι ἀληθεύει ἡ $F(\mu,\nu+1)$. Ἄρα ἡ $F(\mu,\nu)$ ἀληθεύει $\forall\mu,\nu\in N$.

β) Νά δειχτεῖ ὅτι $(x+y)^{\nu}>x^{\nu}+\nu x^{\nu-1}y$ (1) $\forall\nu\in N>1$, $x,y>0$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $(x+y)^2>x^2+2xy$ πού ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι $(x+y)^{\kappa}>x^{\kappa}+\kappa x^{\kappa-1}y$ (2).

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ.. ὅτι:

$$(x+y)^{\kappa+1}>x^{\kappa+1}+(\kappa+1)x^{\kappa}y \quad (3)$$

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow (x+y)^{\kappa+1}>(x+y)(x^{\kappa}+\kappa x^{\kappa-1}y)$ (4). Ἀπό τίς (3) καί (4) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι: $(x+y)(x^{\kappa}+\kappa x^{\kappa-1}y)\geq x^{\kappa+1}+(\kappa+1)x^{\kappa}y\Longrightarrow\kappa x^{\kappa-1}y^2\geq 0$ πού ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N>1$.

13. Ἐ π α γ ω γ ή τ ο ῦ C a u c h y (1). Ὁ Cauchy τροποποίησε τήν ἐπαγωγή, βλέποντας ὅτι κάθε φυσικός ἀριθμός $\nu\geq 2$ μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ μορφή $2^{\kappa}-\lambda$, ὅπου $\lambda,\mu\in N$. Ἔτσι δημιούργησε τήν ἀποδεικτική μέθοδο, πού ἐφαρμόζεται σέ γενικές προτάσεις $F(\nu)$ μέ $\nu\geq 2$ καί φέρει τό ὄνομά του "μ έ θ ο δ ο ς τ ῆ ς τ έ λ ε ι α ς έ π α γ ω γ ῆ ς κ α τ ά C a u c h y" καί στηρίζεται στό πιό κάτω θεώρημα.

14. Θ ε ώ ρ η μ α τ ο ῦ C a u c h y "Κάθε φυσικός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ μορφή $\nu=2^{\mu}-\lambda$, ὅπου $\lambda,\mu\in N$ καί $\lambda<2^{\mu}$.

(1) Αὔγουστος Λουδοβῖκος de Cauchy. Γάλλος μαθηματικός (1789-1857).

Απόδειξη

Αρκεῖ νά δείξουμε, ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν, ὑπάρχει φυσικός μ τέτοιος ὥστε $2^{\mu}>\nu$ (1) γιατί τότε ὑπάρχει καί ὁ φυσικός λ, γιατί, ἄν θέσουμε $2^{\mu}-\nu=\lambda$, θά ἔχουμε καί $\nu=2^{\mu}-\lambda$ καί $\lambda=2^{\mu}-\nu<2^{\mu}$. Ἀπό τήν (1) $\Longrightarrow \mu\log 2>\log\nu \Longrightarrow \mu>\frac{\log\nu}{\log 2}$. Ἄρα ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός μ, πού ἐπαληθεύει τήν σχέση $2^{\mu}>\nu$ καί εἶναι κάθε φυσικός μ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{\log\nu}{\log 2}$.

15. Θεώρημα τοῦ Cauchy. "Ἄν μιά πρόταση $F(\nu)$, πού ἐξαρτιέται ἀπό τόν φυσικό ἀριθμό ν, α) ἀληθεύει γιά $\nu=2$, β) μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ $F(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$, ἰσχύει καί γιά $\nu=2\kappa$ γ) μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ $F(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu=\kappa+1$, ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa$, τότε ἡ $F(\nu)$ ἰσχύει $\forall\nu\in N$".

Απόδειξη

Ἀπό τῆς προϋποθέσεις (α) καί (β) ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει γιά $\nu=2,2^2,2^3,\ldots,2^{\mu}$ δηλ. γιά κάθε ν, πού εἶναι δύναμη τοῦ 2. Γι'αὐτό, δηλ.ὅτι ἡ $F(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε ν πού εἶναι δύναμη τοῦ 2, καί ἀπό τήν προϋπόθεση (γ) ἔπεται ὅτι ἡ $F(\nu)$ θά ἰσχύει γιά $\nu=2^{\mu},2^{\mu}-1,2^{\mu}-2,\ldots,2^{\mu}-\lambda$. Ἄρα ἡ $F(\nu)$ θά ἰσχύει καί γιά $\forall\nu\in N>2$.

Σημείωση

Ἡ ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης $F(\nu)$ μέ τήν ἀποδεικτική μέθοδο τοῦ Cauchy γίνεται μέ τόν παρακάτω τρόπο:

α) Ἀποδείχνουμε τήν πρόταση γιά $\nu=2$.

β) Δεχόμαστε τήν $F(\nu)$ σάν ἀληθινή γιά $\nu=\kappa\in N$ καί μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ἀποδείχνουμε τήν $F(2\kappa)$.

γ) Δεχόμαστε τήν $F(\kappa+1)$ σάν ἀληθινή καί ἀποδείχνουμε τήν ἀλήθεια τῆς $F(\kappa)$.

Ἄρα ἡ πρόταση λόγω τῶν (α) καί (β) ἰσχύει γιά κάθε $\nu=2^{\mu}$, λόγω ὅμως τῆς (γ) ἰσχύει καί γιά κάθε φυσικό $2^{\mu}-\lambda$, ἄρα ἡ $F(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu\geq 2$.

Ἐφαρμογαί

"Νά δειχτεῖ ὅτι τό γινόμενο ν θετικῶν παραγόντων εἶναι μικρότερο ἤ ἴσο μέ τή νυοστή δύναμη τοῦ μέσου ὅρου τους".

Απόδειξη

Ἔστω $x_1,x_2,\ldots,x_{\nu}$ ν τό πλῆθος θετικοί ἀριθμοί. Θά δείξουμε

ότι: $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{x_1x_2\ldots x_\nu}$ (1)

Γιά ν=2 ή (1) γράφεται: $\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}\Rightarrow(x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2\Rightarrow(x_1-x_2)^2\geq 0$ πού ίσχύει. Δηλ. ή (1) ίσχύει γιά ν=2.

Έστω ότι ή (1) ίσχύει γιά ν=κ. Θά έχουμε ότι οί άνισώσεις:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}\geq\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa},\qquad \frac{x_{\kappa+1}+x_{\kappa+2}+\ldots+x_{2\kappa}}{\kappa}\geq\sqrt[\kappa]{x_{\kappa+1}x_{\kappa+2}\ldots x_{2\kappa}}$$

ίσχύουν.

Προσθέτουμε αύτές κατά μέλη καί βρίσκουμε:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}+\ldots+x_{2\kappa}}{\kappa}\geq\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}+\sqrt[\kappa]{x_{\kappa+1}x_{\kappa+2}\ldots x_{2\kappa}}\qquad(2)$$

Έπειδή είναι:

$$\frac{\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}+\sqrt[\kappa]{x_{\kappa+1}x_{\kappa+2}\ldots x_{2\kappa}}}{2}\geq\sqrt{\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\sqrt[\kappa]{x_{\kappa+1}x_{\kappa+2}\ldots x_{2\kappa}}}\Rightarrow$$

$$\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}+\sqrt[\kappa]{x_{\kappa+1}x_{\kappa+2}\ldots x_{2\kappa}}\geq 2\sqrt[2\kappa]{x_1x_2\ldots x_{2\kappa}}$$ όπότε λόγω τής (2) έχουμε:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2\kappa}}{2\kappa}\geq\sqrt[2\kappa]{x_1x_2\ldots x_{2\kappa}}$$

Έστω ότι ή (1) ίσχύει γιά ν=κ+1 καί άποδείχνουμε ότι ίσχύει καί γιά ν=κ. Έπειδή ή (1) ίσχύει γιά ν=κ+1 (άμα θεωρήσουμε τούς K+1 τό πλήθος άριθμούς $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa,\ \frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}$) θά ίσχύει ή άνίσωση.

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}{\kappa+1}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}\Rightarrow\qquad(3)$$

$$\frac{\kappa(x_1+x_2+\ldots+x_\kappa)+(x_1+x_2+\ldots+x_\kappa)}{\kappa(\kappa+1)}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\sqrt[\kappa+1]{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}\Rightarrow$$

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\sqrt[\kappa+1]{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}\Rightarrow$$

$$\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}{\sqrt[\kappa+1]{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\Rightarrow\sqrt[\kappa+1]{\frac{\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}\right)^{\kappa+1}}{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}}}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa}$$

$$\Rightarrow\sqrt[\kappa+1]{\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}\right)^\kappa}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\Rightarrow\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}\geq\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}$$

Ισχύει λοιπόν ή πρόταση καί γιά ν=κ∈N. Έπειδή ή (1) ίσχύει γιά ν=2, καί έπειδή μέ τήν προϋπόθεση ότι ίσχύει γιά ν=κ καί ν=κ+1, άντίστοιχα θά γιά ν=2κ καί ν=κ, θά ίσχύει κατά Cauchy ∀ν∈N.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

Β ομαδα

1. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} \quad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται $1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1 \iff 1=1$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=k (k∈N) δηλ. ὅτι

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=k+1.

Πραγματικά ἔχουμε:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\kappa^2+(\kappa+1)^2=\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6}+(\kappa+1)^2=$$

$$=\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)+6(\kappa+1)^2}{6}=\frac{(\kappa+1)(2\kappa^2+7\kappa+6)}{6}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)2\kappa+3)}{6}$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1, ἄρα καί γιά $\forall\nu\in N$.

2. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^\nu=2(2^\nu-1) \quad (1) \quad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται $2=2(2-1)=2 \iff 2=2$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=k (k∈N) δηλ. ὅτι

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^\kappa=2(2^\kappa-1) \quad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. δηλ. ὅτι:

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^\kappa+2^{\kappa+1}=2(2^{\kappa+1}-1) \quad (3)$$

Ἡ (3) λόγω τῆς (2) γίνεται $2(2^\kappa-1)+2^{\kappa+1}=2(2^{\kappa+1}-1)$.

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1. Ἄρα ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

3. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\nu-1)^3=\nu^2(2\nu^2-1) \qquad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $1^3=1^2(2\cdot1^2-1)=1^2\cdot1 \Leftrightarrow 1=1$. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=k$ $(k\in N)$ δηλ. ὅτι

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1) \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$. Προσθέτοντας καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $(2k+1)^3$ βρίσκουμε:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k+1)^3=k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3=$$

$$=2k^4+8k^3+12k^2+8k+2-(k^2+2k+1)=2(k+1)^4-(k+1)^2=$$

$$=(k+1)^2[2(k+1)^2-1].$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

4. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1} \qquad (1) \quad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=k$ $(k\in N)$ δηλ. ὅτι

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$. Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ καί ἔχουμε

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{1}{k+1}\left[k+\frac{1}{k+2}\right]=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k^2+2k+1}{k+2}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

5. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}=1-\frac{1}{2^\nu} \qquad (1) \quad \forall\nu\in N\wedge\nu\geq1.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=k$ $(k\in N)$ δηλ. ὅτι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $\frac{1}{2^{\kappa+1}}$ καί ἔχουμε:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^\kappa}+\frac{1}{2^{\kappa+1}}=1-\frac{1}{2^\kappa}+\frac{1}{2^{\kappa+1}}=$$

$$1-\frac{1}{2^\kappa}\left(1-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2^\kappa}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^{\kappa+1}}$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1 ἄρα καί γιά $\forall\nu\in N$.

A3

6. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+\nu\cdot 2^\nu=2+(\nu-1)2^{\nu+1} \quad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται: $1\cdot 2=2+(1-1)2^{1+1}=2 \iff 2=2$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. ὅτι

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+\ldots+k\cdot 2^\kappa=2+(k-1)2^{\kappa+1} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1. Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $(k+1)2^{\kappa+1}$ καί ἔχουμε:

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+\ldots+k\cdot 2^\kappa+(k+1)2^{\kappa+1}=2+(k-1)2^{\kappa+1}+(k+1)2^{\kappa+1}=$$

$$=2+2^{\kappa+1}(k-1+k+1)=2+2^{\kappa+1}2^\kappa=2+k\cdot 2^{\kappa+2}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1, ἄρα καί γιά $\forall\nu\in N$.

7. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{\nu-1}\nu^2=(-1)^{\nu-1}\frac{\nu(\nu+1)}{2} \quad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται $1=(-1)^0\cdot 1 \iff 1=1$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=k (k∈N) δηλ. ὅτι

$$S_\kappa=1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{\kappa-1}k^2=(-1)^{\kappa-1}\frac{k(k+1)}{2} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1.

Ἀλλά $S_{\kappa+1}=S_\kappa+(-1)^\kappa(k+1)^2=(-1)^{\kappa-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^\kappa(k+1)^2=$

$$=(-1)^\kappa\left[(k+1)-\frac{k}{2}\right](k+1)=(-1)^\kappa\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=k+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

8. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}=\frac{\nu(\nu+2)}{(\nu+1)^2} \qquad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Για ν=1 η (1) ισχύει. Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ(κ∈N)δηλ. ότι:

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2\kappa+1}{\kappa^2(\kappa+1)^2}=\frac{\kappa(\kappa+2)}{(\kappa+1)^2} \qquad (2)$$

Με την προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι η (1) ισχύει καί για ν=κ+1.

Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη της (2) τό $\frac{2(\kappa+1)+1}{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}$ καί έχουμε:

$$S_\kappa+\frac{2(\kappa+1)+1}{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}=\frac{\kappa(\kappa+2)}{(\kappa+1)^2}+\frac{2\kappa+3}{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}=\frac{\kappa(\kappa+2)^3+2\kappa+3}{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}=$$

$$=\frac{(\kappa+1)^2(\kappa^2+4\kappa+3)}{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+3)}{(\kappa+2)^2}\ .$$

Άρα η (1) ισχύει καί για ν=κ+1. Άρα καί για $\forall\nu\in N$.

9. Νά δειχτεῖ ότι

$$1\cdot 2+2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\nu(\nu+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}(\nu^2+5\nu+8) \qquad (1)$$

$\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Για ν=1 η (1) ισχύει. Έστω ότι ισχύει για ν=κ (κ∈N) δηλ. ότι

$$S_\kappa=1\cdot 2+2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\kappa(\kappa+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1}=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1}(\kappa^2+5\kappa+8) \qquad (2)$$

Με την προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι η (1) ισχύει καί για ν=κ+1. δηλ. ότι:

$$1\cdot 2+2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\kappa(\kappa+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1}+(\kappa+1)(\kappa+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}=$$

$$=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}(\kappa^2+7\kappa+14) \qquad (3)$$

Η (3) λόγω της (2) γίνεται:

$$16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1}(\kappa^2+5\kappa+8)+(\kappa+1)(\kappa+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}=$$

$$=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}(\kappa^2+5\kappa+8)-(\kappa^2+3\kappa+2)\right]=$$

$$=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}(\kappa^2+7\kappa+14).$$

Άρα η (1) ισχύει καί για ν=κ+1, άρα καί $\forall\nu\in N$.

10. Νά δειχτεῖ ότι

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{\nu^2}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)}=\frac{\nu(\nu+1)}{\nu(2\nu+1)} \qquad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ(κ∈N) δηλ. ὅτι

$$S_\kappa=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{\kappa^2}{(2\kappa-1)(2\kappa+1)}=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2(2\kappa+1)} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1.

Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $\frac{(\kappa+1)^2}{(2\kappa+1)(2\kappa+3)}$ καί ἔχουμε:

$$S_\kappa+\frac{(\kappa+1)^2}{(2\kappa+1)(2\kappa+3)}=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2(2\kappa+1)}+\frac{(\kappa+1)^2}{(2\kappa+1)(2\kappa+3)}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2(2\kappa+3)}$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

11. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} \qquad (1)$$

$\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{24}$ καί $\frac{1}{18}-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{24}=\frac{1}{24}$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιάν ν=κ (κ∈N) δηλ. ὅτι

$$S_\kappa=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}=$$

$$=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}$ καί ἔχουμε:

$$S_\kappa+\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=$$

$$=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}+\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=$$

$$=\frac{1}{18}-\frac{\kappa+1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

12. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1\cdot\nu+2(\nu-1)+3(\nu-2)+\ldots+2(\nu-1)+1\cdot\nu=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(\nu+2) \qquad (1)$$

$\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 ή (1) ίσχύει.

Έστω ότι ή (1) ίσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. ότι

$$S_\kappa=1\cdot\kappa+2(\kappa-1)+3(\kappa-2)+\ldots+2(\kappa-1)+1\cdot\kappa=\frac{1}{6}\cdot\kappa(\kappa+1)(\kappa+2) \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι ή (1) ίσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ.

$$S_{\kappa+1}=1(\kappa+1)+2\cdot\kappa+3(\kappa-1)+\ldots+2\kappa+1(\kappa+1)=\frac{1}{6}(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3) \qquad (3)$$

Από τήν (3) άφαιρούμε τή (2) καί έχουμε:

$$S_{\kappa+1}-S_\kappa=(\kappa+1)+\kappa+(\kappa-1)+\ldots+3+2+1=\frac{1}{2}(\kappa+1)(\kappa+2)\Rightarrow$$

$$S_{\kappa+1}=\frac{1}{6}\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)+\frac{1}{2}(\kappa+1)(\kappa+2)=\frac{1}{6}(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$$

Άρα ή (1) ίσχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N.

13. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+\nu\cdot\nu!=(\nu+1)!-1 \qquad (1)$$

ὅπου τό σύμβολο ν! παριστάνει τό γινόμενο 1·2·3...ν.

Απόδειξη

Γιά ν=1 έχουμε 1·1!=(1+1)!-1=2-1=1. Άρα ή (1) ίσχύει. Έστω ότι ή (1) ίσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. ότι

$$1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+\kappa\cdot\kappa!=(\kappa+1)!-1 \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι ίσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι

$$1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+\kappa\cdot\kappa!+(\kappa+1)(\kappa+1)!=(\kappa+2)!-1 \qquad (3)$$

Ή (3) λόγω τῆς (2) γίνεται:

$$(\kappa+1)!-1+(\kappa+1)(\kappa+1)!=(\kappa+2)!-1=$$

$$(\kappa+1)![1+\kappa+1]-1=(\kappa+2)!-1 \text{ διότι } (\kappa+1)!(\kappa+2)-1=(\kappa+2)!-1.$$

Άρα ή (1) ίσχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N.

14. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1\cdot2\cdot3\ldots(x+1)+2\cdot3\cdot4\ldots(x+2)+3\cdot4\cdot5\ldots(x+3)+\ldots+\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(x+\nu)=$$

$$=\frac{1}{x+2}\cdot\nu(\nu+1)\ldots(\nu+x+1) \qquad (1)$$

∀ν∈N ∧ x∈N.

Απόδειξη

Γιά ν=1 ή (1) γίνεται

$$1\cdot2\cdot3\ldots(x+1)=\frac{1}{x+2}\cdot1\cdot2\ldots(1+x+1)=1\cdot2\cdot3\ldots(x+1)$$

Άρα ή (1) ίσχύει γιά ν=1. Έστω ότι ή (1) ίσχύει γιά ν=κ δηλ.

$$1\cdot2\cdot3\ldots(x+1)+2\cdot3\cdot4\ldots(x+2)+\ldots+\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(x+\kappa)=$$

$$=\frac{1}{x+2}\kappa(\kappa+1)\ldots(\kappa+\kappa+1) \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2)θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ.

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(\kappa+1)+2\cdot 3\cdot 4\ldots(\kappa+2)+3\cdot 4\cdot 5\ldots(\kappa+3)+\ldots+\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa)+(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa+1)=\frac{1}{\kappa+2}(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa+2).$$

Ἀλλά ἀπό τήν (2) ἔχουμε:

$$\frac{1}{(\kappa+2)}\kappa(\kappa+1)\ldots(\kappa+\kappa+1)+(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa+1)=$$
$$=(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa+1)\left[\frac{\kappa}{\kappa+2}+1\right]=$$
$$=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa+1)(\kappa+\kappa+2)}{\kappa+2}=$$
$$=\frac{1}{\kappa+2}(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\kappa+1)(\kappa+\kappa+2).$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

15. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots 2\nu}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}=2^{\nu} \qquad (1) \qquad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\frac{1+1}{1}=2^1 \Leftrightarrow 2=2$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in N$) δηλ. ὅτι

$$\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots 2\kappa}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\kappa-1)}=2^{\kappa} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι

$$\frac{(\kappa+2)(\kappa+3)\ldots 2\kappa\cdot(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\kappa-1)(2\kappa+1)}=2^{\kappa+1} \qquad (3)$$

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow \frac{(\kappa+2)(\kappa+3)\ldots 2\kappa}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\kappa-1)}=\frac{2^{\kappa}}{\kappa+1}$

καί τότε ἡ (3) γίνεται

$$\frac{2^{\kappa}}{\kappa+1}\cdot\frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{2\kappa+1}=\frac{2^{\kappa}\cdot 2(\kappa+1)}{\kappa+1}=2^{\kappa+1}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

16. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1} \qquad (1)$$

$\forall\nu\in N\wedge\nu\geqslant 1$ (Catalan)

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\frac{1}{1}=1 \Leftrightarrow 1=1$

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ δηλ. ότι

$$\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa+1}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{\kappa+1}+\frac{1}{\kappa+2}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{\kappa} \qquad (2)$$

Προσθέτουμε στά μέλη της (2) τό $\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}$ καί έχουμε

$$\frac{1}{\kappa+1}+\frac{1}{\kappa+2}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}+\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}\ .$$

Άρα η (1) ισχύει καί για ν=κ+1, άρα καί $\forall \nu\in N$.

17. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^\nu})=\frac{1-x^{2^{\nu+1}}}{1-x} \qquad (1)\quad \forall \nu\in Z^+.$$

Απόδειξη

Για ν=0 η (1) γίνεται

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x} \iff 1+x=1+x.$$

Έστω ότι η ισχύει για ν=κ(κ∈N) δηλ. ότι

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^\kappa})=\frac{1-x^{2^{\kappa+1}}}{1-x} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι ισχύει καί για ν=κ+1. Πολλαπλασιάζουμε τά μέλη της (2) επί $1+x^{2^{\kappa+1}}$ καί έχουμε:

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^\kappa})(1+x^{2^{\kappa+1}})=\frac{1-x^{2^{\kappa+1}}}{1-x}(1+x^{2^{\kappa+1}})=\ )=$$

$$=\frac{1+x^{2^{\kappa+1}}-x^{2^{\kappa+1}}-x^{2^{\kappa+1}}}{1-x}=\frac{1-x^{2^{\kappa+1}}}{1-x}.$$

Άρα η (1) ισχύει καί για ν=κ+1, άρα καί $\forall \nu\in Z^+$.

18. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)\ldots(x^{2^\nu}-x^{2^{\nu+1}}+1)=x^{2^{\nu+1}}+x^{2^\nu}+1 \qquad (1)$$

$\forall \nu\in N$.

Απόδειξη

Για ν=1 έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x^2+1)^2-x^2=x^4+x^2+1$ δηλαδή ισχύει.

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ (κ∈N) δηλ. ότι

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)\ldots(x^{2^\kappa}-x^{2^{\kappa+1}}+1)=x^{2^{\kappa+1}}+x^{2^\kappa}+1 \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1.

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $x^{2^{\kappa+1}}-x^{2^\kappa}+1$ καί ἔχουμε

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\dots(x^{2^\kappa}-x^{2^{\kappa-1}}+1)(x^{2^{\kappa+1}}-x^{2^\kappa}+1)=$$

$$=(x^{2^{\kappa+1}}+x^{2^\kappa}+1)(x^{2^{\kappa+1}}-x^{2^\kappa}+1)=\left[(x^{2^{\kappa+1}}+1)+x^{2^\kappa}\right]\left[(x^{2^{\kappa+1}}+1)-x^{2^\kappa}\right]=$$

$$=(x^{2^{\kappa+1}}+1)^2-(x^{2^\kappa})^2=x^{2^{\kappa+2}}+x^{2^{\kappa+1}}+1.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

19. Ἄν

$$\Sigma_\nu=\alpha_1+(\alpha_1+1)\alpha_2+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\alpha_3+\dots+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_{\nu-1}+1)\alpha_\nu$$

νά δειχτεῖ ὅτι

$$\Sigma_\nu=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_\nu+1)-1 \qquad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε $\Sigma_1=\alpha_1+(\alpha_1+1)-1$ δηλ. ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N).

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Πραγματικά ἔχουμε

$$\Sigma_{\kappa+1}=\Sigma_\kappa+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_{\kappa+1}+1)\alpha_{\kappa+1}=$$

$$=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_\kappa+1)-1+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_\kappa+1)\alpha_{\kappa+1}=$$

$$=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_\kappa+1)(\alpha_{\kappa+1}+1)-1.$$

Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

20. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$2\cdot6\cdot10\cdot14\dots(4\nu-6)(4\nu-2)=(\nu+1)(\nu+2)\dots(2\nu-1)2\nu \qquad (1)$$

$\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=2 ἔχουμε 2·6=(2+1)(2+2) δηλ. ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. ὅτι

$$2\cdot6\cdot10\cdot14\dots(4\kappa-6)(4\kappa-2)=(\kappa+1)(\kappa+2)\dots(2\kappa-1)2\kappa$$

Γιά ν=κ+1 ἔχουμε

$$2\cdot6\cdot10\dots(4\kappa-6)(4\kappa-2)(4\kappa+2)=(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(2\kappa+1)(2\kappa+2)=$$

$$=(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(2\kappa+1)\,2(\kappa+1)=(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(2\kappa+1)\cdot2=$$

$$=(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(4\kappa+2).$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

21. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\dots+(-1)^\nu\frac{x(x-1)\dots(x-\nu-1)}{\nu!}=(-1)^\nu\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-\nu)}{\nu!} \qquad (1)$$

$\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Για ν=1 έχουμε: $1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1}$.

Για ν=2 έχουμε:

$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}$ δηλ. ισχύει.

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ (κ∈N) δηλ. ότι

$$S_\kappa=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^\kappa\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa-1)}{\kappa!}=$$

$$=(-1)^\kappa\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\kappa)}{\kappa!} \quad (2)$$

Με την προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι ισχύει καί για ν=κ+1. Προσθέτουμε καί στά δυό μέλη της (2) τόν αριθμό

$$(-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa)}{(\kappa+1)!}$$

καί έχουμε:

$$S_\kappa+(-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa)}{(\kappa+1)!}=$$

$$=(-1)^\kappa\cdot\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\kappa)}{\kappa!}+(-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa)}{(\kappa+1)!}=$$

$$=(-1)^{\kappa+1}\cdot\left[\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\kappa)}{\kappa!}\right]\left[\frac{x}{\kappa+1}-1\right]=$$

$$=(-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\kappa)(x-\kappa+1)}{(\kappa+1)!}$$

Άρα η (1) ισχύει καί για ν=κ+1, άρα καί $\forall\nu\in N$.

22. Νά δειχτεῖ ότι

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^\nu}{1+x^{2^\nu}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\nu+1}}{1-x^{2^{\nu+1}}} \quad (1) \qquad \forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Για ν=0 η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$$

άρα ισχύει.

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ (κ≠0) δηλ. ότι

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^\kappa}{1+x^{2^\kappa}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\kappa+1}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}$$

Με την προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι ισχύει καί για ν=κ+1. Προσθέτουμε στά μέλη της (2) τό $\frac{2^{\kappa+1}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}$ καί έχουμε:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^\kappa}{1+x^{2^\kappa}}+\frac{2^{\kappa+1}}{1+x^{2^{\kappa+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\kappa+1}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}+\frac{2^{\kappa+1}}{1+x^{2^{\kappa+1}}}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\kappa+2}}{1-x^{2^{\kappa+2}}}.$$

Άρα ή (1) ισχύει και για ν=κ+1, άρα και $\forall \nu\in N$.

23. Να δειχτεί ότι

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{\nu-1}}}{1-x^{2^\nu}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^\nu}}{1-x^{2^\nu}} \qquad (1)$$

$\forall \nu\in N$.

Απόδειξη

Για ν=1 ή (1) γίνεται: $\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}$ άρα ισχύει.

Έστω ότι ή (1) ισχύει για ν=κ($\kappa\in N$) δηλ. ότι:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\ldots+\frac{x^{2^{\kappa-1}}}{1-x^{2^\kappa}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^\kappa}}{1-x^{2^\kappa}} \qquad (2)$$

Με τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1. Προσθέτουμε στά μέλη τής (2) τό $\frac{x^{2^\kappa}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}$ και έχουμε:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\ldots+\frac{x^{2^{\kappa-1}}}{1-x^{2^\kappa}}+\frac{x^{2^\kappa}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^\kappa}}{1-x^2}+\frac{x^{2^\kappa}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^{\kappa+1}}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}$$

Άρα ή (1) ισχύει και για ν=κ+1, άρα και $\forall \nu\in N$.

24. Να δειχτεί ότι

$$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha+1}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha\beta\gamma}+\ldots+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)(\kappa+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa\lambda}=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\kappa+1)(\lambda+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa\lambda} \qquad (1)$$

Απόδειξη

Έχουμε: $1+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+1}{\alpha}$, $1+\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha+1}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+1}{\alpha}+\frac{\alpha+1}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha\beta}$

Ας υποθέσουμε ότι:

$$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha+1}{\alpha\beta}+\ldots+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa}=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)(\kappa+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa} \qquad (2)$$

Προσθέτουμε και στά δύο μέλη τής (2) τόν όρο

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)(\kappa+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa\lambda}$$

και έχουμε:

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)(\kappa+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa}+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)(\kappa+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa\lambda}=$$

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\kappa+1)(\lambda+1)}{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\kappa\lambda}$$

Άρα ή (1) ισχύει για κάθε φυσικό ν.

25. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός:

$$I(\nu)=3^{4\nu+2}+2\cdot 4^{3\nu+1}=\text{πολ.}17 \qquad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: I(1)=1241=πολ.17.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. ὅτι:

$$F(\kappa)=3^{4\kappa+2}+2\cdot 4^{3\kappa+1}=17\rho \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1.

Ἔχουμε: $F(\kappa+1)=3^{4(\kappa+1)+2}+2\cdot 4^{3(\kappa+1)+1}=3^{4\kappa+6}+2\cdot 4^{3\kappa+4}=$

$=3^{4\kappa+2}\cdot 3^4+2\cdot 4^{3\kappa+1}4^3=81\cdot 3^{4\kappa+2}+64\cdot 2\cdot 4^{3\kappa+1}=$

$=3^{4\kappa+2}(64+17)+2\cdot 4^{3\kappa+1}64=$

$=3^{4\kappa+2}17+64(3^{4\kappa+2}+2\cdot 4^{3\kappa+1}) \qquad (3)$

Ἀλλά ἡ (3) λόγω τῆς (2) γίνεται: $F(\kappa+1)=17\cdot 3^{4\kappa+2}+64\cdot 17\rho=\text{πολ.}17.$

26. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $F(\nu)=7^{2\nu}+16\nu-1=\text{πολ.}64 \quad (1)\ \forall\nu\in N.$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: F(1)=64 δηλ. ἡ (1) ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. $7^{2\kappa}+16\kappa-1=64\lambda \quad (2)$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1.

Ἔχουμε τότε $7^{2\kappa+2}+16(\kappa+1)-1=49\cdot 7^{2\kappa}+16\kappa+15=$

$=49(64\lambda-16\kappa+1)+16\kappa+15=$

$=49\cdot 64\lambda-49\kappa+49+16\kappa+15=$

$=49\cdot 64\lambda-48\cdot 16\kappa+64=$

$=49\cdot 64\lambda-12\cdot 64\kappa+64=\text{πολ.}64.$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί γιά ∀ν∈N.

27. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $F(\nu)=2^{2\nu}+15\nu-1=\text{πολ.}9 \quad (1)\ \forall\nu\in N.$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: F(1)=18=πολ.9.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N) ὁ F(κ) διαιρεῖται γιά 9 δηλ. ὅ-

τι: $F(\kappa)=2^{2\kappa}+15\kappa-1=\text{πολ.}9 \qquad (2)$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι:

$F(\kappa+1)=\text{πολ.}9 \qquad (3)$

Ἔχουμε: $F(\kappa+1)=2^{2\kappa+2}+15(\kappa+1)-1=4\cdot 2^{2\kappa}+15\kappa+14 \qquad (4)$

Προσθέτοντας καί ἀφαιροῦντας ἀπό τό δεύτερο μέλος τῆς (4) ἔχουμε:

$F(\kappa)-F(\kappa+1)=45\kappa-18=9(5\kappa-2)=\pi o\lambda.9$

Άρα ή (4) ισχύει, άρα και ή (1) ισχύει $\forall \nu\in N$.

28. Αν ὁ ν είναι άρτιος νά δειχτεῖ ὅτι $8/\nu^2+2\nu$ (1) $\forall \nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=2 ἔχουμε: $2^2+2\cdot 2=8=\pi o\lambda.8$.

Ἔστω ὅτι γιά ν=κ ισχύει $8/\kappa^2+2\kappa$. Θά δείξουμε ὅτι ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+2, δηλ. ὅτι $8/(\kappa+2)^2+2(\kappa+2)$ ἤ $8/\kappa^2+6\kappa+8$.

Άλλά $\kappa^2+6\kappa+8=\kappa^2+2\kappa+4\kappa+8=\pi o\lambda.8+4\kappa+8=\pi o\lambda.8+4\kappa$.

Άλλά εἶναι $\kappa=2\lambda$, ἄρα $4\kappa=\pi o\lambda.8$.

Άρα ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+2, ἄρα καί $\forall \nu\in N$ μέ ν=2λ.

29. Νά δειχτεῖ ὅτι $11/F(\nu)=2\cdot 4^{2\nu+1}+3^{3\nu+1}$ (1) $\forall \nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 εἶναι $F(1)=209=\pi o\lambda 11$.

Ἔστω ὅτι $11/F(\kappa)$ $(\kappa\in N)$ δηλ. ὅτι: $11/2\cdot 4^{2\kappa+1}+3^{2\kappa+1}$ (2)

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι $11/F(\kappa+1)$.

Ἔχουμε: $F(\kappa+1)=2\cdot 4^{2\kappa+3}+3^{3\kappa+4}=2\cdot 4^{2\kappa+1}4^2+3^{3\kappa+1}$.

Άλλά $F(\kappa+1)-F(\kappa)=2\cdot 4^{2\kappa+1}(4^2-1)+3^{3\kappa+1}(3^3-1)=$

$=2\cdot 4^{2\kappa+1}15+3^{3\kappa+1}26=2\cdot 4^{2\kappa+1}(11+4)+3^{3\kappa+1}(22+4)=$

$=11(2\cdot 4^{2\kappa+1}+3^{3\kappa+1}2)+4(2\cdot 4^{2\kappa+1}+3^{3\kappa+1})$.

Ή διαφορά $F(\kappa+1)-F(\kappa)$ εἶναι διαιρετή γιά 11, ἐπειδή ὅμως ὁ $F(\kappa)$ διαιρεῖται διά 11 ἄρα καί ὁ $F(\kappa+1)$ διαιρεῖται γιά 11. Άρα ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί γιά $\forall \nu\in N$.

30. Νά δειχτεῖ ὅτι: $11/F(\nu)=2^{2\nu-1}\cdot 3^{\nu+2}+1$ (1) $\forall \nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: $F(1)=55=\pi o\lambda.11$.

Ἔστω ὅτι ή (1) ισχύει γιά ν=κ $(\kappa\in N)$ δηλ. ὅτι:

$$2^{2\kappa-1}3^{\kappa+2}+1=\pi o\lambda.11=11\rho\ (\rho\in N) \Longrightarrow 2^{2\kappa-1}=\frac{11\rho-1}{3^{\kappa+2}} \quad (2)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $2^2\cdot 3^{\kappa+3}$ καί ἔχουμε:

$$2^{2\kappa+1}3^{\kappa+3}=\frac{(11\rho-1)2^2\cdot 3^{\kappa+3}}{3^{\kappa+2}}=(11\rho-1)\cdot 12=11(12\rho-1)-1$$

$$2^{2\kappa+1}\cdot 3^{\kappa+3}+1=11(12\rho-1).$$

Άρα ή πρόταση ισχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall \nu\in N$.

31. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $F(\nu)=2^{2\nu+1}+1=$πολ.3 (1) $\forall\nu\in Z$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=0 ἀπό τήν (1) $\Longrightarrow F(0)=2+1=3$ δηλ. ἰσχύει.

Γιά ν=κ (κ∈N) ἔχουμε: $2^{2\kappa+1}+1=3\lambda$ (λ∈Z). (2)

Γιά ν=κ+1 ἔχουμε: $2^{2(\kappa+1)+1}+1=3\rho$ (ρ∈Z) (3)

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow 2^{2\kappa+1}=3\lambda-1$.

Ἄρα: $2^{2(\kappa+1)+1}+1=2^{2\kappa+1}2^2+1=(3\lambda-1)4+1=3\cdot4\lambda-4+1=3(4\lambda-1)$.

Ἀλλά $4\lambda-1\in Z$, ἄρα $2^{2(\kappa+1)+1}+1=2\rho$. Ἄρα ἡ (3) ἀληθεύει καί τότε $F(\nu)=$πολ.3 $\forall\nu\in Z$.

32. Νά δειχτεῖ ὅτι $288/7^{2\nu+1}-48\nu-7$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται: $7^3-48\cdot1-7=288=$πολ.288, δηλ. ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. ὅτι:

$$7^{2\kappa+1}-48\kappa-7=\text{πολ.}288 \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι $7^{2(\kappa+1)+1}-48(\kappa+1)-7=$πολ.288. Ἔχουμε τότε:

$$7^{2(\kappa+1)+1}-48(\kappa+1)-7=7^{2\kappa+1+2}-48(\kappa+1)-7=7^2\cdot7^{2\kappa+1}-48\kappa-48-7=$$
$$=49\cdot7^{2\kappa+1}-48\kappa-7-48=(48+1)\cdot7^{2\kappa+1}-48\kappa-7-48=$$
$$=48\cdot7^{2\kappa+1}+7^{2\kappa+1}-48\kappa-7-48=48\cdot7^{2\kappa+1}-48+(7^{2\kappa+1}-48\kappa-7)=$$
$$=48(7^{2\kappa+1}-1)+\text{πολ.}288 \qquad (3)$$

Ἡ παράσταση $7^{2\kappa+1}-1$ διαιρεῖται γιά 7-1 $\forall\kappa\in N$, ἄρα $7^{2\kappa+1}-1=6\rho$. Ἡ (3) λοιπόν γράφεται $7^{2(\kappa+1)+1}-48(\kappa+1)-7=48$πολ.6+πολ.288=

=πολ.288+πολ.288=πολ.288. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

33. Ἄν ν⩾0 νά δειχτεῖ ὅτι:

$$133/F(\nu)=11^{\nu+2}+12^{2\nu+1} \qquad (1) \quad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=0 ἡ (1) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ (κ∈N)δηλ. ὅτι: $133/F(\kappa)$ (2) θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Ἀλλά $F(\kappa+1)=11^{\kappa+3}+12^{2(\kappa+1)+1}=11^{\kappa+3}+12^{2\kappa+3}=$

$$=11\cdot11^{\kappa+2}+144\cdot12^{2\kappa+1}=11\cdot11^{\kappa+2}+133\cdot12^{2\kappa+1}+11\cdot12^{2\kappa+1}=$$
$$=11(11^{\kappa+2}+12^{2\kappa+1})+133\cdot12^{2\kappa+1}=11F(\kappa)+133\cdot12^{2\kappa+1} \qquad (3)$$

Ἡ (3) εἶναι ἄθροισμα δύο ὅρων, πού ὁ καθένας διαιρεῖται μέ τό 133. Ἄρα $133/F(\kappa+1)$ καί γιά ν=κ+1. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει γιά $\forall\nu\in N$.

34. Νά δειχτεῖ ὅτι $2^\nu/\Pi_\nu=(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-1)2\nu$ (1) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 έχουμε $\Pi_1=2=$πολ.2. Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά ν=κ(κ∈ℕ) δηλ. ότι $\Pi_\kappa=(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(2\kappa-1)2\kappa=$πολ.$2^\kappa$ (2). Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι: $\Pi_{\kappa+1}=$πολ.$2^{\kappa+1}$.

Έχουμε: $\Pi_{\kappa+1}=(\kappa+2)(\kappa+3)\ldots(2\kappa+1)2(\kappa+1)=$

$$=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots 2\kappa(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{\kappa+1}=$$

$$=(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(2\kappa-1)\frac{2\kappa(2\kappa+1)2(\kappa+1)}{\kappa+1}=$$

$$=\text{πολ.}2^\kappa(\kappa+1)2=2^{\kappa+1}(\kappa+1).$$

Άρα ή (1) άληθεύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί γιά $\forall\nu\in\mathbb{N}$.

35. Νά δειχτεῖ ὅτι: $x^2+x+1/\Pi_\nu(x)=x^{6\nu-2}+x^{3\nu-1}+1 \quad \forall\nu\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 έχουμε: $\Pi_1(x)=x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι $x^2+x+1/\Pi_\kappa(x)=x^{6\kappa-2}+x^{3\kappa-1}+1$ ($\kappa\in\mathbb{N}$). Θά δείξουμε ότι: $x^2+x+1/\Pi_{\kappa+1}(x)=x^{6\kappa+4}+x^{3\kappa+2}+1$. Αρκεῖ νά δείξουμε ότι αὐτό συμβαίνει καί γιά τό $\Pi_{\kappa+1}(x)-\Pi_\kappa(x)=x^{6\kappa-2}(x^6-1)+x^{3\kappa-1}(x^3-1)=$

$$=x^{3\kappa-1}(x^3-1)[x^{3\kappa-1}(x^3+1)-1]=(x^3-1)\varphi(x)=$$

$$=(x^2+x+1)(x-1)\varphi(x).$$

πράγμα πού δείχνει τό ζητούμενο. Ισχύει λοιπόν ή πρόταση $\forall\nu\in\mathbb{N}$.

36. Νά δειχτεῖ ὅτι: $x^2+x+1/\Pi_\nu(x)=(x+1)^{6\nu-1}-x^{6\nu-1}-1 \quad \forall\nu\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 $\Longrightarrow \Pi_\nu(x)=(x+1)^5-x^5-1$, πού διαιρεῖται γιά x^2+x+1. Έστω ότι $x^2+x+1/\Pi_\kappa(x)=(x+1)^{6\kappa-1}-x^{6\kappa-1}-1$ (2)

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ότι

$x^2+x+1/\Pi_{\kappa+1}=(x+1)^{6\kappa+5}-x^{6\kappa+5}-1$. Τό $\Pi_{\kappa+1}(x)$ γράφεται $\Pi_{\kappa+1}(x)=(x+1)^{6\kappa-1}[(x-1)^2]^3-x^{6\kappa+5}-1$, τό δέ x^2+x+1 γράφεται $(x+1)^2-x$

Θέτουμε στό $\Pi_{\kappa+1}(x)$ ὅπου $(x+1)^2$ τό x καί βρίσκουμε τό πολυώνυμο $(x+1)^{6\kappa-1}x^3-x^{6\kappa+5}-1$. Ή διαίρεση $\Pi(x):x^2+x+1$ δίνει τό ἴδιο ὑπόλοιπο μέ τή διαίρεση $(x+1)^{6\kappa-1}x^3-x^{6\kappa+5}-1:x^2+x+1$. Αρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ότι τό ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης αὐτῆς εἶναι μηδέν.

Παίρνομε τή διαίρεση $(x-1)[(x+1)^{6\kappa-1}x^3-x^{6\kappa+5}-1]:(x-1)(x^2+x+1)$ δηλ. τή διαίρεση $(x-1)[(x+1)^{6\kappa-1}x^3-x^{6\kappa-1}\cdot(x^3)^2-1]:x^3-1$. Βάζουμε στό διαιρετέο ὅπου x^3 τό 1 καί βρίσκουμε τό ὑπόλοιπο:

$$(x-1)[(x+1)^{6\kappa+1}-x^{6\kappa-1}-1]=(x-1)\Pi_\kappa(x).$$

Ή διαίρεση ὅμως $(x-1)\Pi_\kappa(x):x^3-1$ εἶναι τελεία ἀπό τήν ὑπόθεσή μας,

ἄρα ἡ $\Pi_{\kappa+1}(x):x^2+x+1$ εἶναι τελεία. Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει $\forall \nu\in N$.

37. Νά δειχτεῖ ὅτι: $x+y/x^{2\nu-1}+y^{2\nu-1}$ $\forall \nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχομε: $x+y/x+y$ πού ἰσχύει. Γιά $\nu=\kappa\in N$ ὑποθέτουμε ὅτι $x+y/x^{2\kappa-1}+y^{2\kappa-1}$ (1) Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι: $x+y/x^{2\kappa+1}+y^{2\kappa+1}$

Ἀλλά $x^{2\kappa+1}+y^{2\kappa+1}=x^{2\kappa-1}x^2+y^{2\kappa-1}y^2=x^{2\kappa-1}x^2+y^{2\kappa-1}y^2+x^{2\kappa-1}y^2-x^{2\kappa-1}y^2=$

$=x^{2\kappa-1}(x^2-y^2)+y^2(x^{2\kappa-1}+y^{2\kappa-1})=$

$=x^{2\kappa-1}(x-y)(x+y)+y^2\pi\text{ολ}.(x+y)=$

$=\pi\text{ολ}.(x+y)+y^2\pi\text{ολ}.(x+y)=\pi\text{ολ}.(x+y)$ δηλ. ἰσχύει.

38. Νά δειχτεῖ ὅτι $(x-1)^2/\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1$ $\forall x\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχομε $x^2-2x+1=(x-1)^2$ ποῦ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. $(x-1)^2/\kappa x^{\kappa+1}-(\kappa+1)x^\kappa+1$ (1) Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι $(x-1)^2/(\kappa+1)x^{\kappa+2}-(\kappa+2)x^{\kappa+1}+1$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό αὐτό συμβαίνει γιά τό

$\Pi_{\kappa+1}(x)-\Pi_\kappa(x)=(\kappa+1)x^{\kappa+2}-(\kappa+2)x^{\kappa+1}-\kappa x^{\kappa+1}+(\kappa+1)x^\kappa=$

$=x^{\kappa+1}[(\kappa+1)x-\kappa-2]-x^\kappa[\kappa x-\kappa-1]=$

$=x^{\kappa+1}[\kappa x-\kappa-1]+x^{\kappa+1}(x-1)-x^\kappa(\kappa x-\kappa-1)=$

$=(\kappa x-\kappa-1)x^\kappa(x-1)+x^{\kappa+1}(x-1)=(x-1)[(\kappa x-\kappa-1)x^\kappa+x^{\kappa+1}]=$

$=(x-1)[\kappa x^{\kappa+1}-\kappa x^\kappa-x^\kappa+x^{\kappa+1}]=(x-1)[\kappa x^\kappa(x-1)+x^\kappa(x-1)]=$

$=(x-1)^2x^\kappa(\kappa+1)$. Δηλ. τό $\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1=\pi\text{ολ}(x-1)^2$.

39. Νά δειχτεῖ ὅτι $9/F(\nu)=2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$ $\forall \nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $F(1)=27$ δηλ. πολ/σιον τοῦ 9. Γιά $\nu=\kappa\in N$ ἔχουμε

$$F(\kappa)=2^{4\kappa+1}-2^{2\kappa}-1=9\lambda\ ,\quad \lambda\in N. \tag{1}$$

Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι καί

$$F(\kappa+1)=2^{4(\kappa+1)+1}-2^{2(\kappa+1)}-1=9\rho \tag{2}$$

ὅπου $\rho\in N$. Ἡ (2) γράφεται: $2^{4\kappa+1}\cdot 2^4-2^{2\kappa}\cdot 2^2-1=9\rho$ (3)

Ἀλλά ἀπό τήν (1) ἔχουμε $2^{4\kappa+1}=9\lambda+2^\kappa+1$. Ἄρα:

$2^{4\kappa+1}\cdot 2^4-2^{2\kappa}\cdot 2^2-1=(9\lambda+2^{2\kappa}+1)16-2^{2\kappa}\cdot 4-1=9\cdot 16\lambda+2^{2\kappa}\cdot 16+16-2^{2\kappa}4-1=$

$=9\cdot 16\lambda+2^{2\kappa}(16-4)+15=9\cdot 16\lambda+2^{2\kappa}\cdot 12+15=9\cdot 16\lambda+3(2^{2\kappa}\cdot 2^2+5)=$

$=9\cdot 16\lambda+3(2^{2\kappa+2}+5)$.

Ἄρα ἡ (2) θά ἰσχύει ἄν ὑπάρχει ἀριθμός $\rho\in N$ τέτοιος ὥστε, νά

εἶναι: $9\cdot16\lambda+3(2^{2\kappa+2}+5)=9\rho$ ἤ $3\cdot16\lambda+2^{2\kappa+2}+3+2=3\rho$.

Ἀλλά $3\cdot16\lambda+3=\pi o\lambda.3$. Ἄρα ἡ (3) θά ἰσχύει ἄν καί μόνον ἄν ὁ ἀκέραιος $2^{2\kappa+2}+2=2(2^{2\kappa+1}+1)$ διαιρεῖται μέ τό 3. Ἀλλά τοῦτο συμβαίνει πάντοτε (ἀσκ. 31). Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει, ἄρα καί ἡ (2).

Ἡ πρόταση λοιπόν ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

40. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$18933600/F(\nu)=25\cdot7^{6\nu}\nu^3-25\cdot7^{6\nu}\nu+343\cdot5^{4\nu}\cdot\nu^3-343\cdot5^{4\nu}$$

$\forall\nu\in N$ καί $\nu\geqslant2$.

Ἀπόδειξη

Ἀναλύουμε τόν 18933600 καί τόν $F(\nu)$ σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ἔχουμε $18933600=2^5\cdot3\cdot5^2\cdot7^3\cdot23$ καί

$$F(\nu)=5^2\cdot7^{6\nu}\nu^3-5^2\cdot7^{6\nu}\nu+7^3\cdot5^{4\nu}\nu^3-7^3\cdot5^{4\nu}\cdot\nu=$$
$$=5^2\cdot7^{6\nu}\cdot\nu(\nu^2-1)+7^3\cdot5^{4\nu}\cdot\nu(\nu^2-1)=$$
$$=(\nu-1)\nu(\nu+1)5^2\cdot7^3(7^{6\nu-3}+5^{4\nu-2}).$$

Τό γινόμενο $(\nu-1)\nu(\nu+1)5^2\cdot7^3$ διαιρεῖται διά $2\cdot3\cdot5^2\cdot7^3$, γιατί οἱ $\nu-1,\nu,\nu+1$ εἶναι τρεῖς διαδοχικοί ἀκέραιοι. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι ὁ $\varphi(\nu)=7^{6\nu-3}+5^{4\nu-2}$ διαιρεῖται διά $2^4\cdot23=16\cdot23$.

Γιά $\nu=1$ εἶναι $\varphi(1)=368=16\cdot23$. Ἄρα ἰσχύει. Ἔστω ὅτι

$$\varphi(\kappa)=7^{6\kappa-3}+5^{4\kappa-2}=\pi o\lambda.16\cdot23 \qquad (1)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (1) ὅτι καί

$$16\cdot23/\varphi(\kappa+1)=7^{6\kappa+6-3}+5^{4\kappa+2}=7^{6\kappa-3}\cdot7^6+5^{4\kappa+2}=$$
$$=7^6(\pi o\lambda.16\cdot23-5^{4\kappa-2})+5^{4\kappa+2}=\pi o\lambda.16\cdot23-5^{4\kappa+2}(7^6-5^4)=$$
$$=\pi o\lambda.\ 16\cdot23-5^{4\kappa-2}117024=\pi o\lambda.16\cdot23-5^{4\kappa-2}\cdot23\cdot16\cdot318=$$
$$=\pi o\lambda.16\cdot23.$$

Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N.\ \geqslant2$.

41. Νά δειχτεῖ ὅτι $5^{2^{\nu-2}}=\pi o\lambda.2^\nu$ (1) μέ $\nu\in N\wedge\nu\geqslant2$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἡ (1) γράφεται: $5^{2^0}-1=5-1=4=\pi o\lambda.2^2$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa>2$ δηλ.

$$5^{2^{\kappa-2}}-1=\pi o\lambda.2^\kappa \iff 5^{2^{\kappa-2}}=\pi o\lambda.2^\kappa+1=\mu2^\kappa+1 \qquad (2)$$

ὅπου $\mu\in Z$. Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $5^{2^{(\kappa+1)-2}}-1=5^{2^{(\kappa-2)+1}}-1=5^{2^{\kappa-2}\cdot2}-1=(5^{2^{\kappa-2}})^2-1=(\mu\cdot2^\kappa+1)^2-1$

(λόγω τῆς (2)) $=[(\mu2^\kappa+1)-1][(\mu2^\kappa+1)+1]=\mu2^\kappa(\mu2^\kappa+2)=\mu^22^{2\kappa}+\mu2^{\kappa+1}$,

ἄρα καί $5^{2^{(\kappa-1)-2}}-1=(\mu^22^{\kappa-1}+\mu)2^{\kappa+1}=\pi o\lambda.2^{\kappa+1}$ (γιατί $\mu\in Z$ καί $\kappa\in N$,

$\kappa-2) \Longrightarrow (\mu^2\cdot 2^{\kappa-1}+\mu)\in Z$. Άρα ή (1) ισχύει και γιά $\nu=\kappa+1$, άρα και $\forall\nu\in N$: μέ $\nu\geq 2$.

42. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\nu)^2=1+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+\nu\alpha^{\nu-1}+(\nu+1)\alpha^\nu+\nu\alpha^{\nu+1}+\ldots+3\alpha^{2\nu-2}+2\alpha^{2\nu-1}+\alpha^{2\nu} \quad (1) \quad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $(1+\alpha)^2=1+\alpha^2+2\alpha$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in N$) δηλ. ὅτι

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\kappa)^2=1+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+\kappa\alpha^{\kappa-1}+(\kappa+1)\alpha^\kappa+\kappa\alpha^{\kappa+1}+\ldots+3\alpha^{2\kappa-2}+2\alpha^{2\kappa-1}+\alpha^{2\kappa} \quad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Γιά $\nu=\kappa+1$ καί λόγω τῆς (2) ἔχουμε:

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\kappa+\alpha^{\kappa+1})^2=\left[(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\kappa)+\alpha^{\kappa+1}\right]^2=$$

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\kappa)^2+\alpha^{2(\kappa+1)}+2\alpha^{\kappa+1}(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\kappa)=$$

$$1+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+\kappa\alpha^{\kappa-1}+(\kappa+1)\alpha^\kappa+\kappa\alpha^{\kappa+1}+(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}+\ldots+3\alpha^{2\kappa-2}+2\alpha^{2\kappa-1}+\ldots+$$

$$+\alpha^{2\kappa}+\alpha^{2\kappa+2}+2\alpha^{\kappa+1}+2\alpha^{\kappa+2}+2\alpha^{\kappa+3}+\ldots+2\alpha^{2\kappa}+2\alpha^{2\kappa+1}=1+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+(\kappa+1)\alpha^\kappa+$$

$$+(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}+(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}+\ldots+3\alpha^{2\kappa}+2\alpha^{2\kappa+1}+\alpha^{2(\kappa+1)} \quad \text{δηλ.}$$

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\kappa+1})^2=1+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+(\kappa+1)\alpha^\kappa+(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}+(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}+\ldots+$$

$$+3\alpha^{2\kappa}+2\alpha^{2\kappa+1}+\alpha^{2(\kappa+1)}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

43. Ἄν $1\leq\mu\leq\nu-1\wedge\mu+1\leq\lambda\leq\nu$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)^2=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa^2+2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda \quad (1) \quad \forall\nu\in N\wedge\nu\geq 3.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=3$ ἔχουμε $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\wedge\nu\geq 3$ δηλ. ὅτι:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa\right)^2=\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa^2+2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda \quad (2)$$

ὅπου $1\leq\mu\leq\kappa-1\wedge\mu+1\leq\lambda<\kappa$. Μέ τήν προϋπόθεση(2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι: $\left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa+1}\alpha_\kappa\right)^2=\sum_{\kappa=1}^{\kappa+1}\alpha_\kappa^2+2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda$ (3)

ὅπου $1\leq\mu<\kappa\wedge\mu+1\leq\lambda\leq\kappa+1$. Πράγματι ἔχουμε:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa+1}\alpha_\kappa\right)^2=\left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}\right)^2=\left(\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa\right)^2+\alpha_{\kappa+1}^2+2\alpha_{\kappa+1}\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa.$$

Ἀλλά λόγω τῆς (2) τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι ἴσο μέ:

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2+2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda+2\alpha_{\kappa+1}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\kappa}\alpha_\kappa \quad (\text{μέ } 1\leq\mu\leq\kappa-1\wedge\mu+1\leq\lambda<\kappa) =$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{\kappa+1}\alpha_\kappa^2+2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda \quad (\text{μέ } 1\leq\mu\leq\kappa\wedge\mu+1\leq\lambda<\kappa+1).$$

Ἄρα τό πρῶτο μέλος τῆς (3) ἰσοῦται μέ τό δεύτερο.

Άρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί ∀ν∈N μέ ν≥3.

44. Ἄν $1\leq\mu\leq\nu-1$, $\mu+1\leq\lambda<\nu$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa^2-\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\beta_\kappa\right)^2=\Sigma(\alpha_\mu\beta_\lambda-\alpha_\lambda\beta_\mu)^2 \qquad (1)$$

∀ν∈N∧ν≥3 (ταυτότητα Lagrange).

Ἀπόδειξη

Γιά ν=3 ἔχουμε: $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2=$

$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=ρ∈N, ρ≥3. Θά δείξουμε ὅτι ἀληθεύει καί γιά ν=ρ+1 δηλ. ὅτι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\rho+1}\alpha_\kappa^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho+1}\beta^2-\left(\sum_{\kappa=1}^{\rho+1}\alpha_\kappa\beta_\kappa\right)^2=\Sigma(\alpha_\mu\beta_\lambda-\alpha_\lambda\beta_\mu)^2 \qquad (2)$$

Πραγματικά ἔχουμε: $\sum_{\kappa=1}^{\rho+1}\alpha_\kappa^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho+1}\beta^2=\left(\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2+\alpha_{\rho+1}^2\right)\left(\sum_{\kappa=1}^{\rho}\beta_\kappa^2+\beta_{\rho+1}^2\right)=$

$=\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\beta^2+\beta_{\rho+1}^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2+\alpha_{\rho+1}^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\beta_\kappa^2+\alpha_{\rho+1}^2\beta_{\rho+1}^2$.

Ἐπίσης ἔχουμε: $\left(\sum_{\kappa=1}^{\rho+1}\alpha_\kappa\beta_\kappa\right)^2=\left(\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa\beta_\kappa+\alpha_{\rho+1}\beta_{\rho+1}\right)^2=$

$\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2\beta_\kappa^2+2\alpha_{\rho+1}\beta_{\rho+1}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa\beta_\kappa+\alpha_{\rho+1}^2\beta_{\rho+1}^2$

Ἄρα τό πρῶτο μέλος τῆς (2) εἶναι ἴσο μέ:

$$\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\beta_\kappa^2-\left(\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa\beta_\kappa\right)^2+\beta_{\rho+1}^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2+\alpha_{\rho+1}^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\beta_\kappa^2-2\alpha_{\rho+1}\beta_{\rho+1}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa\beta_\kappa$$

ἤ λόγω τῆς (1)

$$\Sigma(\alpha_\mu\beta_\lambda-\alpha_\lambda\beta_\mu)^2+\alpha_{\rho+1}^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\beta_\kappa^2+\beta_{\rho+1}^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa^2-2\alpha_{\rho+1}\beta_{\rho+1}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa\beta_\kappa.$$

Ἡ παράσταση ὅμως αὐτή γράφεται: $\Sigma(\alpha_\mu\beta_\lambda-\alpha_\lambda\beta_\mu)^2+\sum_{\kappa=1}^{\rho}(\alpha_\kappa\beta_{\rho+1}-\beta_\kappa\alpha_{\rho+1})^2$

Τό ἄθροισμα ὅμως αὐτό γράφεται: $\Sigma(\alpha_\mu\beta_\lambda-\alpha_\lambda\beta_\mu)^2$, ὅπου $1\leq\mu<\rho\wedge\mu+1\leq\lambda\leq\rho+1$.

Ἄρα τό πρῶτο μέλος τῆς (2) εἶναι ἐκ ταυτότητας ἴσο πρός τό δεύτερο.

Ἡ (1) λοιπόν ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί ∀ν∈N μέ ν≥3.

45. Ἐάν $\alpha_i\in R$, $i=1,2,\ldots,\nu\wedge x\in R$ καί

$$(\nu-1)x^2+2(\alpha_1-\alpha_\nu)x+\alpha_1^2+2\alpha_2^2+2\alpha_3^2+\ldots+2\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu^2=2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu) \qquad (1)$$

∀ν∈N≥2 νά δειχτεῖ ὅτι $x=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}$ (2)

Ἀπόδειξη

Γιά ν=2 ἡ (1) γίνεται: $x^2+2(\alpha_1-\alpha_2)x+\alpha_1^2+\alpha_2^2=2\alpha_1\alpha_2 \iff$ (3)

$$[x+(\alpha_1-\alpha_2)]^2=0 \iff x=\alpha_2-\alpha_1$$

δηλ. ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=2. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈N≥2 δηλ. ἄν: $(\kappa-1)x^2+2(\alpha_1-\alpha_\kappa)x+\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\ldots+2\alpha_{\kappa-1}^2+\alpha_\kappa^2=2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\kappa-1}\alpha_\kappa)$ (4)

τότε: $x=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\ldots=\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa-1}$. Θά δείξουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ.

$x^2+2(\alpha_1-\alpha_{\kappa+1})x+\alpha_1^2+2\alpha_2^2+2\alpha_3^2+\ldots+2\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2=2(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-1}\alpha_\kappa+\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1})$

$\Leftrightarrow \kappa x^2+2(\alpha_1-\alpha_{\kappa+1})x+\alpha_1^2+2\alpha_2^2+2\alpha_3^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2=$

$$=2(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-1}\alpha_\kappa)+2\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1} \qquad (5)$$

Η (5) λόγω της (4) δίνει:

$$x^2+2(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})x+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2=2\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1} \Leftrightarrow$$

$$x^2+2(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})x+(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})^2=0 \Leftrightarrow x=\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa.$$

Άρα η πρόταση ισχύει και γιά $\nu=\kappa+1$, άρα και γιά $\forall\nu\in N\geq 2$.

46. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}>\frac{13}{24}$ (1) $\forall\nu\in N\wedge\nu\geq 2$.

Απόδειξη

Γιά $\nu=2$ έχουμε: $\frac{7}{12}>\frac{14}{24}$ δηλ. η (1) ισχύει. Έστω ὅτι η (1) ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι: $S_\kappa>\frac{13}{24}$ (2). Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ισχύει και γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $S_{\kappa+1}>\frac{13}{24}$.

Έχουμε: $S_\kappa=\frac{1}{\kappa+1}+\frac{1}{\kappa+2}+\ldots+\frac{1}{2\kappa}$ και $S_{\kappa+1}=\frac{1}{\kappa+2}+\frac{1}{\kappa+3}+\ldots+\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}+\frac{1}{2\kappa+2}$

Άρα $S_{\kappa+1}-S_\kappa=\frac{1}{2\kappa+1}+\frac{1}{2\kappa+2}-\frac{1}{\kappa+1}=\frac{1}{2(\kappa+1)(2\kappa+1)}$. Αλλά $\forall\nu\in N$ τό κλάσμα $\frac{1}{2(\kappa+1)(2\kappa+1)}>0$ άρα $S_{\kappa+1}>S_\kappa$. Αλλά $S_\kappa>\frac{13}{24} \Rightarrow S_{\kappa+1}>\frac{13}{24}$.

Άρα η (1) ισχύει και γιά $\nu=\kappa+1$, άρα και $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geq 2$.

47. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{3\nu}\geq\frac{5}{6}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά $\nu=1$ έχουμε: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geq\frac{5}{6}$ δηλ. η (1) ισχύει σάν ισότητα.

Γιά $\nu=2$ έχουμε: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}>\frac{5}{6}$ δηλ. ισχύει. Έστω ὅτι η (1) ισχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. $S_\kappa=\frac{1}{\kappa+1}+\frac{1}{\kappa+2}+\ldots+\frac{1}{3\kappa}\geq\frac{5}{6}$ (2)

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ισχύει και γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. δηλ. $S_{\kappa+1}=\frac{1}{\kappa+2}+\frac{1}{\kappa+3}+\ldots+\frac{1}{3\kappa}+\frac{1}{3\kappa+1}+\frac{1}{3\kappa+2}+\frac{1}{3\kappa+3}\geq\frac{5}{6}$ (3)

Έχουμε: $S_{\kappa+1}-S_\kappa=\frac{1}{3\kappa+1}+\frac{1}{3\kappa+2}+\frac{1}{3\kappa+3}-\frac{1}{\kappa+1}=\frac{9\kappa^2+16\kappa+5}{(3\kappa+1)(3\kappa+2)(3\kappa+3)(\kappa+1)}$

Αλλά τό τελευταῖο κλάσμα εἶναι θετικό, άρα $S_{\kappa+1}>S_\kappa$. Άρα $S_{\kappa+1}>\frac{5}{6}$.

Άρα η (1) ισχύει και γιά $\nu=\kappa+1$, άρα και γιά $\forall\nu\in N$.

48. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\nu}}>\sqrt{\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$ $\nu\geq 2$.

Απόδειξη

Γιά $\nu=2$ η (1) ισχύει. Έστω ὅτι ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\nu}}>\sqrt{\nu} \qquad (2)$$

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}>\sqrt{\kappa+1} \qquad (3)$$

Ἀφαιροῦντες τήν (2) καί (3) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}>\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa} \qquad (4)$$

Ἀπό τήν (4) $\Rightarrow 1>\kappa+1-\sqrt{\kappa(\kappa+1)} \Leftrightarrow \sqrt{\kappa(\kappa+1)}>\kappa \Leftrightarrow \kappa>0$ τό ὁποῖον ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 ἄρα καί $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geq 2$.

49. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{\nu}}{\nu}>\dfrac{2}{3}\sqrt{\nu}$ $\quad\forall\nu\in N.$ (1)

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ὅτι:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{\kappa}}{\kappa}>\frac{2}{3}\sqrt{\kappa} \qquad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa+1}}{\kappa+1}>\frac{2}{3}\sqrt{\kappa+1} \qquad (3)$$

Ἡ (2) γράφεται: $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{\kappa}}{\kappa+1}>\dfrac{2}{3}\sqrt{\kappa}\cdot\dfrac{\kappa}{\kappa+1}$ (πολ/ζουμε τά μέλη της ἐπί $\frac{\kappa}{\kappa+1}>0$). Προσθέτουμε στά δυό μέλη της τόν $\frac{\sqrt{\kappa+1}}{\kappa+1}$ καί ἔχουμε:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa+1}}{\kappa+1}>\frac{2}{3}\sqrt{\kappa}\,\frac{\kappa}{\kappa+1}\cdot\frac{\sqrt{\kappa+1}}{\kappa+1} \qquad (4)$$

Γιά νά ἀληθεύει ἡ (4) ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ (3), ἀρκεῖ νά εἶναι:

$$\frac{2}{3}\sqrt{\kappa}\cdot\frac{\kappa}{\kappa+1}\cdot\frac{\sqrt{\kappa+1}}{\kappa+1}>\frac{2}{3}\sqrt{\kappa+1} \Leftrightarrow 2\kappa\sqrt{\kappa}>(2\kappa-1)\sqrt{\kappa+1} \qquad (5)$$

Ἡ (5) ἰσχύει γιατί ἄν ὑψώσουμε τό μέλη της στό τετράγωνο βρίσκουμε $0>-(3\kappa-1)$ πού ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

50. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\alpha^{2\nu}+\alpha^{2\nu-1}+\ldots+\alpha+1\geq(2\nu+1)\alpha^{\nu}$ (1) ἄν $\{\alpha,\nu\}\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: $\alpha^2+\alpha+1>3\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)^2>0$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ὅτι: $\alpha^{2\kappa}+\alpha^{2\kappa-1}+\ldots+\alpha+1\geq(2\kappa+1)\alpha^{\kappa}$ (2)

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ.

$$\alpha^{2(\kappa+1)}+\alpha^{2\kappa+1}+\ldots+\alpha+1\geq(2\kappa+3)\alpha^{\kappa+1} \qquad (3)$$

ἤ ὅτι:

$$\alpha^{2(\kappa+1)}+\alpha^{2\kappa+1}+\ldots+\alpha+1-2\alpha^{\kappa+1}\geq(2\kappa+1)\alpha^{\kappa+1} \qquad (3)$$

Πολ/ζουμε καί τά δύο μέλη τῆς (2) ἐπί α καί ἔχουμε:

$$\alpha^{2\kappa+1}+\alpha^{2\kappa}+\ldots+\alpha^2+\alpha\geq(2\kappa+1)\alpha^{\kappa+1}\ .$$

Άσκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$a^{2(\kappa+1)}+a^{2\kappa+1}+\ldots+a+1-2a^{\kappa+1}\geq a^{2\kappa+1}+a^{2\kappa}+\ldots+a^2+a \quad \text{ἤ}$$

$$a^{2(\kappa+1)}+a^{2\kappa+1}+\ldots+a+1-2a^{\kappa+1}-a^{2\kappa+1}-a^{2\kappa}-\ldots-a^2-a\geq 0 \Longrightarrow$$

$$a^{2(\kappa+1)}-2a^{\kappa+1}+1\geq 0 \Longleftrightarrow (a^{\kappa+1}-1)^2\geq 0.$$

Δηλαδή ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall \nu\in N$.

51. Νά δειχτεῖ ὅτι: $(\alpha+\beta)^{\nu}(\alpha-\nu\beta)<\alpha^{\nu+1}$ (1) ἄν $\nu\in N$, $\alpha>0$ $\beta\in R$ καί $\alpha+\beta>0$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)<\alpha^2$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ (2). Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πραγματικά γιά $\nu=\kappa$ ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta)^{\kappa}(\alpha-\kappa\beta)<\alpha^{\kappa+1} \qquad (2)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί α καί ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta)^{\kappa}[\alpha+\beta-(\kappa+1)\beta]\,[(\alpha+\beta)-\beta]<\alpha^{\kappa+2} \Longrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^{\kappa}[(\alpha+\beta)^2-(\kappa+1)(\alpha+\beta)\beta-\beta(\alpha+\beta)+(\kappa+1)\beta^2]<\alpha^{\kappa+2}$$

καί κατά τή μεταβατική ἰδιότητα:

$$(\alpha+\beta)^{\kappa}[(\alpha+\beta)^2-(\kappa+2)\beta(\alpha+\beta)]<\alpha^{\kappa+2} \quad \text{ἤ}$$

$$(\alpha+\beta)^{\kappa+1}[\alpha-(\kappa+1)\beta]<\alpha^{\kappa+2}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall \nu\in N$.

52. Νά δειχτεῖ ὅτι: $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\ldots(1+\frac{1}{2\nu+1})>\sqrt{2\nu+3}$ (1) $\forall \nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται: $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{3})>\sqrt{5}$ ἤ $\frac{8}{3}>\sqrt{5}$. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{2\kappa+1})>\sqrt{2\kappa+3}$ (2)

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ.

$$(1+\tfrac{1}{1})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{5})\ldots(1+\tfrac{1}{2\kappa+1})(1+\tfrac{1}{2\kappa+3})>\sqrt{2\kappa+5} \qquad (3)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $(1+\frac{1}{2\kappa+3})$ καί ἔχουμε:

$$(1+\tfrac{1}{1})(1+\tfrac{1}{3})\ldots(1+\tfrac{1}{2\kappa+1})(1+\tfrac{1}{2\kappa+3})>(1+\tfrac{1}{2\kappa+3})\sqrt{2\kappa+3} \qquad (4)$$

Ἄν συγκρίνουμε τήν (3) καί (4) συμπεραίνουμε ὅτι, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $(1+\frac{1}{2\kappa+3})\sqrt{2\kappa+3}\geq\sqrt{2\kappa+5} \Longleftrightarrow \sqrt{2\kappa+3}(2\kappa+4)\geq\sqrt{2\kappa+5}(2\kappa+3) \Longleftrightarrow$

$(2\kappa+3)(2\kappa+4)^2\geq(2\kappa+5)(2\kappa+3)^2 \Longrightarrow 2\kappa+3>0$ πού ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall \nu\in N$.

53. Δίνεται ἡ ἀκολουθία α_ν $(\nu\in N)$ καί $\alpha_{\nu+1}=2\alpha_\nu+1$. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\alpha_\nu=2^{\nu-1}(\alpha_1+1)-1$. (1)

Απόδειξη

Για ν=1 έχουμε: $\alpha_1=2^0(\alpha_1+1)-1=\alpha_1$ ισχύει. Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ (κ∈N) δηλ. ότι: $\alpha_\kappa=2^{\kappa-1}(\alpha_1+1)-1$ (2)

Τότε: $\alpha_{\kappa+1}=2\alpha_\kappa+1 \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}=2\left[2^{\kappa-1}(\alpha_1+1)-1\right]+1$ λόγω της (2)

$\Leftrightarrow \alpha_{\kappa+1}=2^\kappa(\alpha_1+1)-1$

Δηλ. η (1) ισχύει και για ν=κ+1 άρα και $\forall\nu\in N$.

54. Δίνεται η ακολουθία

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ldots \text{ και } \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2} \quad (1)$$

Να δειχτεί ότι $\alpha_\nu^2-\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu-1}=(-1)^\nu$ (2) $\forall\nu\in N\wedge\nu\geq 2$.

Απόδειξη

Από την (1) για ν=3 και ν=4 έχουμε: $\alpha_3=3$, $\alpha_4=5$.

Άρα $\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3=4-3=1=(-1)^2$, $\alpha_3^2-\alpha_2\alpha_4=9-2\cdot5=-1=(-1)^3$. Άρα η (2) ισχύει για ν=2 και ν=3. Έστω ότι ισχύει για ν=κ∈N, θά δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1. Από την υπόθεση έχουμε

$$\alpha_{\kappa+1}=\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1} \quad (3) \quad \text{και} \quad \alpha_\kappa^2-\alpha_{\kappa-1}\alpha_{\kappa+1}=(-1)^\kappa \quad (4)$$

Από την (3) $\Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_{\kappa+1}(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1})=\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa-1}\alpha_{\kappa+1}$ και λόγω της (4) $\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa^2-(-1)^\kappa=\alpha_\kappa(\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa)+(-1)^{\kappa+1}$ (5),

και επειδή $\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa=\alpha_{\kappa+2}$ γράφεται τελικά: $\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}+(-1)^{\kappa+1}$, άρα η σχέση ισχύει $\forall\nu\in N$.

55. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$, όπου

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=4, \text{ και } \alpha_\nu-2\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}=2 \quad (1)$$

για ν≥3. Να δειχτεί ότι: $\alpha_\nu=\nu^2$ (2) (ν∈N).

Απόδειξη

Έχουμε: $\alpha_2=4=2^2$ και λόγω της (1) για ν=3 είναι:

$$\alpha_3-2\alpha_2+\alpha_1=2 \quad \text{ή} \quad \alpha_3-8+1=2 \Longrightarrow \alpha_3=9=3^2.$$

Άρα η (1) ισχύει για ν=2 και ν=3. Έστω ότι ισχύει για ν=κ, δηλ.

$$\alpha_\kappa-2\alpha_{\kappa-1}+\alpha_{\kappa-2}=2.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1, δηλ. ότι:

$$\alpha_{\kappa+1}-2\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1}=2 \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}-2\nu^2+(\nu-1)^2=2 \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}-\nu^2-2\nu-1=0$$

$$\Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}=(\nu+1)^2.$$

56. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ με $\alpha_2=\alpha_1^2-1$ (1) και $\alpha_\nu\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}^2-1$ (2). Να δειχτεί ότι $\alpha_\nu+\alpha_{\nu+2}=\alpha_1\alpha_{\nu+1}$ (3) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Από την (2) για ν=1 έχουμε: $\alpha_1\alpha_3=\alpha_2^2-1$ (4) και από την (3)

$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_1\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_3=\alpha_1(\alpha_2-1) \Rightarrow \alpha_1\alpha_3=\alpha_1^2(\alpha_2-1)=(\alpha_2+1)(\alpha_2-1)$ λόγω τῆς (1). Ἄρα $\alpha_1\alpha_3=\alpha_2^2-1$ πού ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (3) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in N)$ δηλ. ὅτι

$$\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+2}=\alpha_1\alpha_{\kappa+1} \qquad (5)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι: $\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+3}=\alpha_1\alpha_{\kappa+2}$ (6). Πραγματικά ἔχουμε:

$$\alpha_{\kappa+3}=\alpha_1\alpha_{\kappa+2}-\alpha_{\kappa+1} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3}=\alpha_1\alpha_{\kappa+2}\alpha_{\kappa+1}-\alpha_{\kappa+1}^2 \Leftrightarrow \quad (7)$$

$$\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3}=\alpha_1\alpha_{\kappa+2}\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}-1 \quad \text{λόγω τῆς (2)} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3}=\alpha_{\kappa+2}(\alpha_1\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa)-1=\alpha_{\kappa+2}^2-1, \quad \text{γιατί ἀπό τήν (5)}$$

$\Rightarrow \alpha_1\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa=\alpha_{\kappa+2}$ καί λόγω τῆς (6) $\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3}=\alpha_{\kappa+2}^2-1$.

Δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

57. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ μέ $\alpha_1=\alpha_2=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ $\nu\geq 3$. Νά δειχτεῖ ὅτι: (α) $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=\alpha_{\nu+2}-1$, (β) $\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu}=\alpha_{2\nu+1}-1$ (γ) $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\nu-1}=\alpha_{2\nu}$ (Ἀκολουθία Fibonacci).

Ἀπόδειξη

α) Γιά $\nu=1$ ἀπό τήν (α) ἔχουμε: $\alpha_1=\alpha_3-1 \Leftrightarrow 1=2-1 \Leftrightarrow 1=1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (α) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ.

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa=\alpha_{\kappa+2}-1 \qquad (1).$$

Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πραγματικά ἔχουμε: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}=\alpha_{\kappa+2}-1+\alpha_{\kappa+1}=\alpha_{\kappa+3}-1$, γιατί $\alpha_{\kappa+2}+\alpha_{\kappa+1}=\alpha_{\kappa+3}$. Ἄρα ἡ (α) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

β) Γιά $\nu=1$ ἀπό τήν (β) ἔχουμε: $\alpha_2=\alpha_3-1 \Leftrightarrow 1=2-1 \Leftrightarrow 1=1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (β) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ.

$$\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa}=\alpha_{2\kappa+1}-1 \qquad (1)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πραγματικά ἔχουμε: $\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa+1}-1+\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa+3}-1$.

Ἄρα ἡ (β) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

γ) Γιά $\nu=1$ ἀπό τήν (γ) ἔχουμε $\alpha_1=\alpha_2$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (γ) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}=\alpha_{2\kappa}$ (1). Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πραγματικά ἔχουμε: $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}+\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_{2\kappa+2}$.

Ἄρα ἡ (γ) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

58. Δίνεται ἡ ἀκολουθία: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ ὅπου $\alpha_1=x+y$ καί

$\alpha_\nu=x+y-\frac{xy}{\alpha_{\nu-1}}$ (1)($\nu>1$). Νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha_\nu=\frac{x^{\nu+1}-y^{\nu+1}}{x^\nu-y^\nu}$ (2) $(x^\nu\neq y^\nu)$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $\alpha_1=x+y=\frac{x^2-y^2}{x+y}$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. $\alpha_\kappa=\frac{x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1}}{x^\kappa-y^\kappa}$. Ἀπό τήν (1) $\Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}=x+y-\frac{xy}{\alpha_\kappa}$

$=x+y-\frac{xy(x^\kappa-y^\kappa)}{x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1}}=\frac{(x+y)(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})-xy(x^\kappa-y^\kappa)}{x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1}}=\frac{x^{\kappa+2}-y^{\kappa+2}}{x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1}}$.

Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

59. Ἄν $\alpha_\nu=\frac{\alpha_{\nu-1}}{1+\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}}$ νά δειχτεῖ ὅτι

$$\alpha_\nu=\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\nu-1})\alpha_\nu} \qquad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $\alpha_1=\frac{\alpha_0}{1+\beta_0\alpha_0}$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. $\alpha_\kappa=\frac{\alpha_{\kappa-1}}{1+\alpha_{\kappa-1}\beta_{\kappa-1}} \Longrightarrow \alpha_\kappa=\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\nu-1})\alpha_0}$ (1)

Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$.

Πραγματικά ἔχουμε: $\alpha_{\kappa+1}=\frac{\alpha_\kappa}{1+\alpha_\kappa\beta_\kappa}=\frac{\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\kappa-1})\alpha_0}}{1+\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\kappa-1})}\beta_\kappa}=$

$=\frac{\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\kappa-1})\alpha_0}}{\frac{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\kappa-1})\alpha_0+\alpha_0\beta_\kappa}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\kappa-1})\alpha_0}}=\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{\kappa-1})\alpha_0+\alpha_0\beta_\kappa}=$

$=\frac{\alpha_0}{1+(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_\kappa)\alpha_0}$ δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

60. Ἄν $4=\frac{3}{\alpha_1}=\alpha_1+\frac{3}{\alpha_2}=\ldots=\alpha_{\nu-1}+\frac{3}{\alpha_\nu}=\alpha_\nu+\frac{3}{\alpha_{\nu+1}}$ (1), νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\alpha_\nu=\frac{3^{\nu+1}-3}{3^{\nu+1}-1} \quad (2) \qquad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $4=\frac{3}{\alpha_1} \Longrightarrow \alpha_1=\frac{3}{4}$. Ἀπό τή (2) τότε παίρνουμε: $\alpha_1=\frac{3^2-3}{3^2-1}=\frac{3}{4}$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι: $4=\frac{3}{\alpha_1}=\alpha_1+\frac{3}{\alpha_2}=\ldots=\alpha_\kappa+\frac{3}{\alpha_{\kappa+1}}=\alpha_{\kappa+1}+\frac{3}{\alpha_{\kappa+2}}$. Θά δείξουμε μέ τίς προϋποθέσεις αὐτές ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_{\kappa+1}=\frac{3^{\kappa+2}-3}{3^{\kappa+2}-1} \qquad (4)$$

Ἀπό τήν (3) $\Longrightarrow 4=\alpha_\kappa+\frac{3}{\alpha_{\kappa+1}} \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}=\frac{3}{4-\alpha_\kappa}$ ἤ λόγω τῆς (2)

$$\alpha_{\kappa+1}=\frac{3}{4-\frac{3^{\kappa+1}-3}{3^{\kappa+1}-1}}=\frac{3(3^{\kappa+1}-1)}{4(3^{\kappa+1}-1)3^{\kappa+1}+3}=\frac{3^{\kappa+2}-3}{3^{\kappa+2}-1}.$$

Δηλ. ἡ (2) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

61. Δίνεται ἡ ἀκολουθία: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ ὅπου $\alpha_1=\alpha_2=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ μέ $\nu\in N\geqslant 3$. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\nu-1}\alpha_{2\nu}=\alpha_{2\nu}^2 \quad (1) \quad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται $\alpha_1\alpha_2=\alpha_2^2$ ἤ $1\cdot 1=1$. Ἄρα ἡ (1) γιά ν=1 ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\geqslant 1$, δηλ. ὅτι:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}\alpha_{2\kappa}=\alpha_{2\kappa}^2 \quad (2)$$

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε πώς ἰσχύει γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa+1}\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa+2}^2 \quad (3)$$

Προσθέτουμε στά μέλη τῆς (2) τόν ἀριθμόν $\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa+1}\alpha_{2\kappa+2}$ καί τότε ἔχουμε:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa+1}\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa}^2+\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa+1}\alpha_{2\kappa+2}$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι:

$$\alpha_{2\kappa}^2+\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa+1}\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa+2}^2 \Longrightarrow \alpha_{2\kappa}^2+\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_{2\kappa+2}^2-\alpha_{2\kappa+1}\alpha_{2\kappa+2}$$

ἤ ὅτι $\alpha_{2\kappa}(\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa+1})=\alpha_{2\kappa+2}(\alpha_{2\kappa+2}-\alpha_{2\kappa+1})$ (4)

Ἀλλά ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa} \Leftrightarrow \alpha_{2\kappa+2}-\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_{2\kappa}$

Ἄρα $\alpha_{2\kappa}(\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa+1})=\alpha_{2\kappa}\alpha_{2\kappa+2}$ καί $\alpha_{2\kappa+2}(\alpha_{2\kappa+2}-\alpha_{2\kappa+1})=\alpha_{2\kappa+2}\alpha_{2\kappa}$, ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί κατά συνέπεια καί ἡ (3). Ἡ ἀποδεικτέα λοιπόν ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

62. Δίνεται ἡ ἀκολουθία: $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ ὅπου $\alpha_0=0$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$ καί $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}$. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\alpha_\nu^2=\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\mp 1 \quad (1) \quad (\text{Τό } - \text{ ἄν } \nu=2\lambda \text{ καί τό } + \text{ ἄν } \nu=2\lambda+1).$$

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά ν=1 γίνεται: $1^2=1\cdot 0+1$, γιά ν=2 γίνεται: $1^2=1\cdot 2-1$, δηλ. γιά ν=1, ν=2 ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι: $\alpha_\kappa^2=\alpha_{\kappa-1}\alpha_{\kappa+1}\mp 1$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ.

$$\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}\mp 1$$

Ἐπειδή $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}$ ἔχουμε $\alpha_\kappa^2=(\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}\mp 1=\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}\mp 1$

γιατί $\alpha_{\kappa+1}=\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1}$. Ἄρα $\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2\mp 1=\alpha_\kappa(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})\pm 1$ ἤ

$$\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}\mp 1.$$

Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

63. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ ὅπου $\alpha_1=1, \alpha_2=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ $(\nu\geqslant 3)$. Νά δειχτεῖ ὅτι:

(α) $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2=\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}$ (β) $\alpha_3+\alpha_6+\ldots+\alpha_{3\nu}=\frac{1}{2}(\alpha_{3\nu+2}-1)$

(γ) $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{2\nu+1}=\alpha_{2\nu+2}$

Ἀπόδειξη

(α) Γιά $\nu=1$ ἡ (α) γίνεται: $\alpha_1^2=\alpha_1\alpha_2=1^2=1\cdot 1$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2=\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}$ (1)

Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι: $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+2}$ (2). Ἡ (2) λόγω τῆς (1) γίνεται: $\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_{\kappa+1}(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})=\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+2}$ δηλ. ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί γιά $\forall\nu\in N$.

(β) Γιά $\nu=1$ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $\alpha_3+\alpha_6+\ldots+\alpha_{3\kappa}=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+2}-1)$. Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή θά δείξουμε πῶς ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι: $\alpha_3+\alpha_6+\ldots+\alpha_{3\kappa}+\alpha_{3\kappa+3}=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+5}-1)$ (2)

Ἡ (2) ὅμως γράφεται $\alpha_3+\alpha_6+\ldots+\alpha_{3\kappa}+\alpha_{3\kappa+3}=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+2}-1)+\alpha_{3\kappa+3}=$

$=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+2}+2\alpha_{3\kappa+3}-1)=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+2}+\alpha_{3\kappa+3}+\alpha_{3\kappa+3}-1)=$

$=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+4}+\alpha_{3\kappa+3}-1)=\frac{1}{2}(\alpha_{3\kappa+5}-1)$ δηλ. ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

(γ) Γιά $\nu=1$ γίνεται $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_4$ ἤ $1+2=3$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_{2\kappa+2}$ (1). Μέ τήν προϋπόθεση (1) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ.

$$\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa+1}+\alpha_{2\kappa+3}=\alpha_{2\kappa+4} \quad (3)$$

Ἡ (3) λόγω τῆς (1) γίνεται $\alpha_{2\kappa+2}+\alpha_{2\kappa+3}=\alpha_{2\kappa+4}$ δηλ. ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

64. Νά δειχτεῖ ὅτι $(1+x)^\nu\geqslant 1+\nu x$ (1) ἄν $\nu\in N$ καί $1+x>0$ (Ἀνισότητα Bernoulli).

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) ἰσχύει σάν ἰσότητα. Γιά $\nu=2$ ἔχουμε $(1+x)^2\geqslant 1+2x$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\wedge\nu>2$ δηλ. ὅτι:

$$(1+x)^\kappa>1+\kappa x \quad (2)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $1+x>0$ καί ἔχουμε: $(1+x)^{\kappa+1}>(1+\kappa x)(1+x)\Leftrightarrow$ $(1+x)^{\kappa+1}>1+x+\kappa x+x^2\Longrightarrow(1+x)^{\kappa+1}>1+(\kappa+1)x+\kappa x^2$ (3)

Εἶναι ὅμως φανερό ὅτι $1+(\kappa+1)x+\kappa x^2>1+(\kappa+1)x$ (4)

Ἀπό τίς (3) καί (4) ἔχουμε: $(1+x)^{\kappa+1}>1+(\kappa+1)x$.

Άρα ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈Ν μέ ν>2.

Σημείωση

Η άνίσωση τοῦ Bernoulli ἔχει πολλές ἐφαρμογές καί μᾶς εὐκολύνει στήν ἀπόδειξη ἀνισοτικῶν σχέσεων.

Ἐφαρμογή 1

Νά δειχτεῖ ὅτι ∀ν∈Ν ἰσχύει $(1-\alpha)^{\nu}>1-\nu\alpha$, ἄν $0<\alpha<1$.

Αὐτή ἰσχύει λόγω τῆς (1), ἐπειδή $-\alpha>-1 \Rightarrow 1+(-\alpha)>0$. Πραγματικά $(1-\alpha)^{\nu}=[1+(-\alpha)]^{\nu}\geq 1+\nu(-\alpha)=1-\nu\alpha$.

Ἐφαρμογή 2

Νά δειχτεῖ ὅτι ὑπάρχει τιμή τοῦ ν∈Ν γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ ἀνίσωση $(1,01)^{\nu}>10$ (1)

Θέτουμε στήν (1) $x=0,01$ καί τότε ἡ (1) γράφεται

$$(1+0,01)^{\nu}\geq 1+\nu\cdot 0,01 \quad \text{ἤ} \quad (1+0,1)^{\nu}>1+\frac{\nu}{100}.$$

Θέλουμε $1+\frac{\nu}{100}=10 \Rightarrow \nu=900$. Άρα γιά ν=900 θά εἶναι $(1,01)^{\nu}>10$

Ἐφαρμογή 3

Νά δειχτεῖ ὅτι ∀ν∈Ν ἰσχύει $(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}\geq 2$.

Αὐτή βγαίνει ἀπό τήν (1) γιά $x=\frac{1}{\nu}$.

Ἐφαρμογή 4

Νά δειχτεῖ ὅτι ∀ν∈Ν ἰσχύει $(1-\frac{1}{\nu^2})^{\nu}\geq 1-\frac{1}{\nu}$

Ἐπειδή $(1-\alpha)^{\nu}>1-\nu\alpha$, γιά $\alpha=\frac{1}{\nu^2}$ ἔχουμε $(1-\frac{1}{\nu^2})^{\nu}\geq 1-\frac{\nu}{\nu^2}=1-\frac{1}{\nu}$

Ἐφαρμογή 5

Νά δειχτεῖ ὅτι ∀ν∈Ν ἰσχύει $(1+\frac{1}{\nu})^{\nu+1} > (1+\frac{1}{\nu+1})^{\nu+2}$ (1)

Η (1) γράφεται: $\frac{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu+1}}{(1+\frac{1}{\nu+1})^{\nu+1}}>1+\frac{1}{\nu+1} \Rightarrow (\frac{\nu^2+2\nu+1}{\nu^2+2\nu})^{\nu+1}>1+\frac{1}{\nu+1}$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{1}{\nu(\nu+2)}\right]^{\nu+1}\geq 1+\frac{1}{\nu+1}$$

Στήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli βάζουμε $x=\frac{1}{\nu(\nu+2)}$ καί ἔχουμε:

$$\left[1+\frac{1}{\nu(\nu+2)}\right]^{\nu+1}>1+\frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)} \quad (2)$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ (2) ἀρκεῖ νά δεῖξουμε ὅτι: $\frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)}>\frac{1}{\nu+1} \Rightarrow$

$$\nu(\nu+2)<(\nu+1)^2 \Rightarrow 1>0 \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

Άρα ἡ (2) ἰσχύει καί ἐπομένως καί ἡ (1).

Ἐφαρμογή 6

Νά δειχτεῖ ὅτι ∀ν∈Ν ἰσχύει $(\frac{2\nu}{\nu+1})^{\nu}>\frac{\nu+1}{2}$

Επειδή $\frac{2\nu}{\nu+1}=\frac{(\nu+1)+(\nu-1)}{\nu+1}=1+\frac{\nu-1}{\nu+1}$, αρκεῖ λόγω τῆς ἀνισώσεως τοῦ Bernoulli νά εἶναι:

$$(1+\frac{\nu-1}{\nu+1})^{\nu}>1+\nu(\frac{\nu-1}{\nu+1})=\frac{\nu^2+1}{\nu+1}.$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι:

$$\frac{\nu^2+1}{\nu+1}>\frac{\nu+1}{2} \Longrightarrow 2(\nu^2+1)>(\nu+1)^2 \Longrightarrow (\nu-1)^2>0,$$

ἡ ὁποία ἰσχύει.

Ἐφαρμογή 7

Ἄν $1<\nu<11$ νά δειχτεῖ ὅτι $0<\nu^{1,4143}-\nu^{1,4142}<\frac{\nu^{1,4142}}{1000}$

Ἀπόδειξη

Ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι $0<\nu^{1,4142}.\nu^{0,0001}-\nu^{1,4142}<\frac{\nu^{1,4142}}{1000}$ ἤ $0<\nu^{0,0001}-1<\frac{1}{1000}$

Ἄν $\nu>1$ ἡ ἀριστερή ἀνίσωση ἰσχύει. Γιά νά δειχτεῖ ἡ πρός τά δεξιά πρέπει νά δείξουμε ὅτι: $1+\frac{1}{1000}>\nu^{0,0001} \Longrightarrow (1+\frac{1}{1000})^{10000}>\nu$.

Ἀλλά κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli εἶναι:

$$(1+\frac{1}{1000})^{10000}>1+\frac{1}{1000}\cdot 10.000=11>\nu.$$

65. Νά δειχτεῖ ὅτι $(1-\alpha)^{\nu}\leq\frac{1}{1+\nu\alpha}$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $0<\alpha\leq 1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $(1-\alpha)^{\kappa}<\frac{1}{1+\kappa\alpha}$ (2) Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $(1-\alpha)^{\kappa+1}<\frac{1}{1+(\kappa+1)\alpha}$. Ἀπό τήν (2) παίρνουμε: $(1-\alpha)^{\kappa+1}\leq\frac{1-\alpha}{1+\kappa\alpha}$ (3). Ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{1-\alpha}{1+\kappa\alpha}<\frac{1}{1+(\kappa+1)\alpha} \Longleftrightarrow [1+(\kappa+1)\alpha](1-\alpha)<1+\kappa\alpha \Longrightarrow 1+\kappa\alpha-(\kappa+1)\alpha^2<1+\kappa\alpha,$$

πού προφανῶς ἰσχύει.

66. Νά δειχτεῖ ὅτι: α) $\frac{x-1}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{x}-1$ μέ $x>1$ καί

β) $\frac{x}{\nu}<\sqrt[\nu]{x+1}-1$ μέ $x>0$ καί $\nu\neq 1$.

Ἀπόδειξη

α) Ἐπειδή $x>1 \Longrightarrow \sqrt[\nu]{x}>1 \Longrightarrow \sqrt[\nu]{x}-1>0\ \forall\nu\in N$. Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli γιά $x=\frac{x-1}{\nu}$ βρίσκουμε: $(1+\frac{x-1}{\nu})^{\nu}\geq 1+\nu(\frac{x-1}{\nu})=x$ ἤ

$$1+\frac{x-1}{\nu}>\sqrt[\nu]{x} \Longrightarrow \frac{x-1}{\nu}>\sqrt[\nu]{x}-1.$$

β) Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli γιά $x=\frac{x}{\nu}$ βρίσκουμε:

$(1+\frac{x}{\nu})^{\nu}>1+\nu\frac{x}{\nu} \Longrightarrow (1+\frac{x}{\nu})^{\nu}>1+x \Longrightarrow 1+\frac{x}{\nu}>\sqrt[\nu]{1+x} \Longrightarrow$

$\frac{x}{\nu}>\sqrt[\nu]{x+1}-1.$

67. Νά δειχτεῖ ὅτι $(1+\alpha)^{\nu}\geqslant 1+\nu\alpha+\frac{\nu(\nu-1)\alpha^2}{2}$ (1) $\forall\nu\in N\wedge\alpha>0.$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ καί $\nu=2$ ἡ (1) ἰσχύει σάν ἰσότητα. Γιά $\nu=3$ ἔχουμε

$(1+\alpha)^3>1+3\alpha+3\alpha^2 \Longrightarrow \alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1>1+3\alpha+3\alpha^2 \Longrightarrow \alpha^3>0$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\wedge\kappa>3$ δηλ. ὅτι $(1+\alpha)^{\kappa}>1+\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{2}$ (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι: $(1+\alpha)^{\kappa+1}>1+(\kappa+1)\alpha+\frac{(\kappa+1)\kappa\alpha^2}{2}$ (3) Ἀπό τήν (3) ἔχουμε:

$(1+\alpha)^{\kappa+1}>(1+\alpha)\left\{1+\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{2}\right\}$ Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:

$$(1+\alpha)\left[1+\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{2}\right]>1+(\kappa+1)\alpha+\frac{\kappa(\kappa+1)\alpha^2}{2}$$

Αὐτό ὅμως ἰσχύει γιατί μετά τίς πράξεις βρίσκουμε $\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^3}{2}\geqslant 0$ πού ἰσχύει γιατί $\kappa>3$ καί $\alpha>0$.

68. Νά δειχτεῖ ὅτι: $(1-\alpha)^{\nu}>1-\nu\alpha+\frac{\nu(\nu-1)\alpha^2}{1\cdot 2}-\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ (1) $\forall\nu\in N\geqslant 4$ καί $0<\alpha<1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=4$ ἔχουμε $(1-\alpha)^4>1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3 \Longrightarrow \alpha^3>0$, πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$, $\kappa>4$ δηλ. ὅτι:

$$(1-\alpha)^{\kappa}>1-\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{1\cdot 2}-\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} \qquad (2)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (1) ἐπί $1-\alpha>0$ καί βρίσκουμε:

$(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{1\cdot 2}-\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\alpha^3-\alpha\kappa\alpha^2-\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^3}{1\cdot 2}+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^4$

ἤ

$(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-(\kappa+1)\alpha+\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{1\cdot 2}+\kappa\right]\alpha^2-\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{1\cdot 2}+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right]\alpha^3+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^4$

$\Longleftrightarrow (1-\alpha)^{\kappa+1}>1-(\kappa+1)\alpha+\frac{\kappa(\kappa+1)\alpha^2}{1\cdot 2}-\frac{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^4.$

Τότε κατά μείζονα λόγο θά ἔχουμε καί:

$$(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-(\kappa+1)\alpha+\frac{\kappa(\kappa+1)\alpha^2}{1\cdot 2}-\frac{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N\geqslant 4$.

69. Νά δειχτεῖ ὅτι $2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu+2)<(\nu+2)^{\nu+1}$ (1) $\forall\nu\in N\wedge\nu>1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἡ (1) γίνεται $2\cdot 4\cdot 6<4^3 \Longrightarrow 48<64$, πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $2\cdot 4\cdot 6\ldots 2(\kappa+1)<(\kappa+2)^{\kappa+1}$ (2)

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι $2\cdot4\cdot6\ldots2(\kappa+1)(\kappa+2)2<(\kappa+3)^{\kappa+2}$. Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $2(\kappa+2)$ καί ἔχουμε: $2\cdot4\cdot6\ldots2(\kappa+1)(\kappa+2)2<2(\kappa+2)^{\kappa+2}$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$(\kappa+3)^{\kappa+2}>2(\kappa+2)^{\kappa+2}\Rightarrow(\frac{\kappa+3}{\kappa+2})^{\kappa+2}>2.$$

Αὐτή ὅμως ἰσχύει (Δές ἐφαρμογή 4 ἄσκηση 64). Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$ μέ ν>1.

70. Νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{4^{\nu}}{\nu+1}<\frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}$ (1) ἄν $\nu\in N$ καί ν>1.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=2 ἡ (1) γίνεται $\frac{16}{3}<6$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\wedge\nu\geq2$ δηλ. ὅτι $\frac{4^{\kappa}}{\kappa+1}<\frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^2}$ (2). Ἐπειδή κ>0 εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι $\frac{4(\kappa+1)}{\kappa+2}<\frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^2}$ (3).

Πολ/ζουμε τίς (2) καί (3) κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$\frac{4^{\kappa}}{\kappa+1}\cdot\frac{4(\kappa+1)}{\kappa+2}<\frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^2}\cdot\frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^2}\Rightarrow\frac{4^{\kappa+1}}{\kappa+2}<\frac{(2\kappa+2)!}{[(\kappa+1)!]^2}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί γιά $\forall\nu\in N$.

71. Νά δειχτεῖ ὅτι $2^{\nu-1}(\alpha^{\nu}+\beta^{\nu})>(\alpha+\beta)^{\nu}$ (1) $\forall\nu\in N>1$ καί $\alpha+\beta>0$ $(\alpha\neq\beta)$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=2 ἡ (1) γίνεται $2(\alpha^2+\beta^2)>(\alpha+\beta)^2$ (2) $\Rightarrow$ $(\alpha-\beta)^2>0$ (3) πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N>2$ δηλ. ὅτι

$$2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa}+\beta^{\kappa})>(\alpha+\beta)^{\kappa}\qquad(4)$$

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση τῆς (4) ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. $2^{\kappa}(\alpha^{\kappa+1}+\beta^{\kappa+1})>(\alpha+\beta)^{\kappa+1}$ (5)

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (4) ἐπί α+β>0 καί ἔχουμε:

$$2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa}+\beta^{\kappa})(\alpha+\beta)>(\alpha+\beta)^{\kappa+1}\qquad(6)$$

Γιά νά δείξουμε τήν (5) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$2^{\kappa}(\alpha^{\kappa+1}+\beta^{\kappa+1})>2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa}+\beta^{\kappa})(\alpha+\beta)\qquad(7)$$

ἤ ὅτι $$\alpha^{\kappa+1}+\beta^{\kappa+1}>\alpha^{\kappa}\beta+\alpha\beta^{\kappa}\qquad(8)$$

Ἡ (8) γράφεται $$(\alpha^{\kappa}-\beta^{\kappa})(\alpha-\beta)>0\qquad(9)$$

Ἔστω α>β. Τότε $\alpha^{\kappa}>\beta^{\kappa}$ ὁπότε τό πρῶτο μέλος τῆς (9) εἶναι γινόμενο θετικῶν ἀριθμῶν καί ἡ(9) ἰσχύει.

Ἔστω α<β. Τότε $\alpha^{\kappa}<\beta^{\kappa}$ ὁπότε τό πρῶτο μέλος τῆς (9) εἶναι γινόμενο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καί ἡ (9) ἰσχύει.

Ἄρα καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ (9) ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N>1$.

72.Νά δειχτεῖ ὅτι $1-\alpha^{2\nu+1}>(2\nu+1)\alpha^{\nu}(1-\alpha)$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $0<\alpha<1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $1-\alpha^3>3\alpha(1-\alpha) \Longrightarrow (1-\alpha)^3>0$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $1-\alpha^{2\kappa+1}>(2\kappa+1)\alpha^{\kappa}(1-\alpha)$ (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $1-\alpha^{2\kappa+3}>(2\kappa+3)\alpha^{\kappa+1}(1-\alpha)$.

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί α καί προσθέτουμε τό $2\alpha^{\kappa+1}(1-\alpha)$ καί τότε ἔχουμε $\alpha-\alpha^{2\kappa+2}+2\alpha^{\kappa+1}(1-\alpha)>(2\kappa+3)\alpha^{\kappa+1}(1-\alpha)$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι $1-\alpha^{2\kappa+3}>\alpha-\alpha^{2\kappa+2}+2\alpha^{\kappa+1}-2\alpha^{\kappa+2}$ ἤ

$$1-\alpha^{2\kappa+3}-\alpha+\alpha^{2\kappa+2}-2\alpha^{\kappa+1}+2\alpha^{\kappa+2}>0 \Longrightarrow$$

$$(1-\alpha)+\alpha^{2\kappa+2}(1-\alpha)-2\alpha^{\kappa+1}(1-\alpha)>0 \Longrightarrow (1-\alpha)[\alpha^{2\kappa+2}-2\alpha^{\kappa+1}+1]>0 \quad (3)$$

Ἐπειδή ὅμως $1-\alpha>0$ καί $(\alpha^{\kappa+1})^2-2\alpha^{\kappa+1}+1=(\alpha^{\kappa+1}-1)^2>0 \Longrightarrow$

$$(1-\alpha)(\alpha^{\nu+1}-1)^2>0$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

73.Νά δειχτεῖ ὅτι: $(\alpha+\beta)^{\nu}\leqslant\alpha^{\nu}+\beta\left[(\alpha+1)^{\nu}-\alpha^{\nu}\right]$ (1) $\forall\nu\in N$ μέ $\alpha,\beta\in R$, $\alpha\geqslant 0$, $0<\beta<1$.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά $\nu=1$ γίνεται $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\beta$ πού ἰσχύει σάν ἰσότητα. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $(\alpha+\beta)^{\kappa}\leqslant\alpha^{\kappa}+\beta[(\alpha+1)^{\kappa}-\alpha^{\kappa}]$ (2) θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $(\alpha+\beta)^{\kappa+1}\leqslant\alpha^{\kappa+1}+\beta[(\alpha+1)^{\kappa+1}-\alpha^{\kappa+1}]$ (3). Ἐπειδή $\alpha+\beta>0$ ἀπό τήν (2) ἔχουμε ὅτι $(\alpha+\beta)^{\kappa+1}\leqslant(\alpha+\beta)[\alpha^{\kappa}+\beta[(\alpha+1)^{\kappa}-\alpha^{\kappa}]]=$

$=\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta[\alpha^{\kappa}+\beta(\alpha+1)^{\kappa}-\beta\alpha^{\kappa}]=$

$=\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta[\alpha^{\kappa}(1-\beta)-(1-\beta)(1+\alpha)^{\kappa}+(1+\alpha)^{\kappa}]=$

$=\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta[(\alpha+1)^{\kappa}+(1-\beta)[\alpha^{\kappa}-(\alpha+1)^{\kappa}]]=$

$=\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}-\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta(1-\beta)[\alpha^{\kappa}-(\alpha+1)^{\kappa}]<$

$<\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\alpha\beta\ (\alpha+1)^{\kappa}+\beta(\alpha+1)^{\kappa}=$

$=\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\beta(\alpha+1)^{\kappa+1}=$

$=\alpha^{\kappa+1}+\beta[(\alpha+1)^{\kappa+1}-\alpha^{\kappa+1}]$.

Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει, ἄρα καί ἡ (1).

74.Ἄν $\alpha,\beta\in R^+$ καί $\nu\geqslant 2$,νά δειχτεῖ ὅτι $(\alpha+\beta)^{\nu}>\alpha^{\nu}+\nu\beta\alpha^{\nu-1}$ (1)

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἡ (1) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\geqslant 2$, θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $(\alpha+\beta)^{\nu+1}>\alpha^{\nu+1}+(\nu+1)\beta\alpha^{\nu}$ (2) Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (1) ἐπί $\alpha+\beta$ καί βρίσκουμε

$$(\alpha+\beta)^{\nu+1}>\alpha^{\nu+1}+\nu\beta\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu}\beta+\nu\beta^2\alpha^{\nu-1} \quad \text{ἤ}$$

$$(\alpha+\beta)^{\nu+1}>\alpha^{\nu+1}+(\nu+1)\beta\alpha^{\nu}+\nu\beta^2\alpha^{\nu-1} \qquad (3)$$

καί ἐπειδή $\nu\beta^2\alpha^{\nu-1}>0$ ἡ (3) γίνεται $(\alpha+\beta)^{\nu+1}>\alpha^{\nu+1}+(\nu+1)\beta\alpha^{\nu}$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N\geqslant 2$.

75. Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ R^+ καί $x_1x_2\ldots x_\nu=1$, νά δειχτεῖ ὅτι $x_1+x_2+\ldots+x_\nu\geqslant\nu$ (1) Ἡ συνθήκη ἰσότητας ἰσχύει τότε καί μόνον τότε ἄν, $x_1=x_2=\ldots=x_\nu=1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $x_1\geqslant 1$ καί ἰσχύει σάν ἰσότης, γιατί ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε $x_1=1$. Γιά $\nu=2$ ἡ (1) γίνεται $x_1+x_2\geqslant 2\Longrightarrow$ $x_1+x_2\geqslant\sqrt{2x_1x_2}$ (γιατί $x_1x_2=1$) $\Longrightarrow (x_1+x_2)^2\geqslant 4x_1x_2 \Longrightarrow (x_1-x_2)^2\geqslant 0$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι

$$x_1+x_2+\ldots+x_\kappa\geqslant\kappa.$$

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι

$$x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}>\kappa+1, \text{ ὅταν } x_1x_2\ldots x_\kappa x_{\kappa+1}>1 \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (2) συμπεραίνουμε, ὅτι ἀπό τούς $x_1,x_2,\ldots,x_{\kappa+1}$ ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνας $\leqslant 1$ καί ἕνας τουλάχιστον $\geqslant 1$. Ἔστω $x_1\leqslant 1$ καί $x_2\geqslant 1$. Τότε $1-x_1\geqslant 0$ καί $1-x_2\leqslant 0 \Longrightarrow (1-x_1)(1-x_2)\leqslant 0 \Longleftrightarrow x_1+x_2\geqslant 1+x_1x_2$ (3)

Ἡ (2) γράφεται $(x_1x_2)x_3\ldots x_\kappa x_{\kappa+1}=1$, τότε γιά τούς ἀριθμούς $(x_1x_2),x_3,x_4,\ldots,x_\kappa,x_{\kappa+1}$ (κ τό πλῆθος τους) μέ γινόμενο 1, ἔχουμε ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ὅτι $(x_1x_2)+x_3+x_4+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}\geqslant\kappa\Longrightarrow$

$$1+x_1x_2+x_3+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}\geqslant\kappa+1 \qquad (4)$$

Ἀπό τήν (4) λόγω τῆς (3) $\Longrightarrow$ ὅτι $x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}\geqslant\kappa+1$.

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη β'

Ἡ (1) γιά $\nu=1$ ἰσχύει. Δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει γιά ν ὅρους. Θά δείξουμε πώς ἰσχύει γιά ν+1 ὅρους. Δηλ. ἄν $x_1x_2\ldots x_\nu x_{\nu+1}=1 \Longrightarrow$

$$x_1+x_2+\ldots+x_\nu+x_{\nu+1}\geqslant\nu+1 \quad (\alpha).$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε $x_1+x_2+\ldots+x_{\nu+1}>\nu+x_{\nu+1}$ (β).

Ἀπό τίς (α) καί (β) συμπεραίνουμε ὅτι ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\nu+x_{\nu+1}>\nu+1\Longrightarrow x_{\nu+1}>1$. Αὐτό ὅμως ἰσχύει γιατί ἡ $x_1x_2\ldots x_\nu x_{\nu+1}=1$ λόγω τῆς $x_1x_2\ldots x_\nu=1$ δίνει $x_{\nu+1}=1$.

Παρατήρηση

Μέ ἐφαρμογή τῆς παραπάνω πρότασης δείχνουμε τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy.

76.Νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\geqslant\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$ (1)
ἄν $\alpha_i\in R^+$ $(i=1,2,3,\ldots,\nu)$ $\forall\nu\in N\geqslant 2$. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu$.

Ἀπόδειξη

Θέτουμε $\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}=A \Longrightarrow \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu=A^\nu \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}{A^\nu}=1 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha_1}{A}\cdot\frac{\alpha_2}{A}\ldots\frac{\alpha_\nu}{A}=1$ (Οἱ $\frac{\alpha_1}{A},\frac{\alpha_2}{A},\ldots,\frac{\alpha_\nu}{A}$ εἶναι θετικοί).

Ἄρα κατά τήν παραπάνω (70) ἄσκηση ἔχουμε

$$\frac{\alpha_1}{A}+\frac{\alpha_2}{A}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{A}\geqslant\nu \Leftrightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{A}\geqslant\nu \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\geqslant A \Leftrightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\geqslant\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$$

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει ὅταν $\frac{\alpha_1}{A}=\frac{\alpha_2}{A}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{A}=1 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu$.

77.Ἄν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\in R^+$ καί $\nu\in N\geqslant 2$ νά δειχτεῖ ὅτι $\forall\nu\in N$ ἰσχύει
$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\nu)>1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)$ (1) (Ἀνίσωση Weierstrass).

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=1+(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2 \Longrightarrow$

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)>1+(\alpha_1+\alpha_2)$, γιατί $\alpha_1\alpha_2>0$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ.

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\kappa)>1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa) \qquad (2)$$

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $1+\alpha_{\kappa+1}>0$ καί ἔχουμε

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\kappa)(1+\alpha_{\kappa+1})>1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}$

Ἄν παραλείψουμε ἀπό τό δεύτερο μέλος τόν θετικό προσθετέο $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}$ ἡ ἀνίσωση ἐνισχύεται, ἄρα θά ἔχουμε

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\kappa)(1+\alpha_{\kappa+1})>1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})$$

Ἡ (1) λοιπόν ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

Παρατήρηση

Ἄν $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu=x$ ἡ (1) γίνεται $(1+x)^\nu>1+\nu x$ (Ἀνίσωση Bernoulli).

78.Ἄν $0<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu<1$ καί $\nu\in N\geqslant 2$, νά δειχτεῖ ὅτι:
$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_\nu)>1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)$ (1) (Ἀνίσωση Weierstass).

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)=1-(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2$, ἄρα

$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)>1-(\alpha_1+\alpha_2)$ γιατί $\alpha_1\alpha_2>0$.

Η (1) λοιπόν ισχύει γιά ν=2. Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ότι: $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)...(1-\alpha_\kappa)>1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa)$ (2)

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ότι άληθεύει καί γιά ν=κ+1. Πολ/ζουμε τά μέλη τής (2) έπί $1-\alpha_{\kappa+1}>0$, καί έχουμε

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)...(1-\alpha_\kappa)(1-\alpha_{\kappa+1})>$$

$$1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})+(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}$$

Παραλείπουμε στό δεύτερο μέλος τόν θετικό προσθετέο $(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}$ καί τότε θά έχουμε γιά ένα λόγο παραπάνω

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)...(1-\alpha_\kappa)(1-\alpha_{\kappa+1})>1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})$$

Η (1) λοιπόν ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N≥2.

79. Άν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu\in R^+$ καί $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu<1$, νά δειχτεῖ ότι

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_\nu)<\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)} \quad (1)\ \forall\nu\in N$$

(Άνίσωση Weierstrass).

Άπόδειξη

Γιά ν=1 ή (1) ισχύει. Έστω ότι ισχύει γιά ν=κ∈Nδηλ. ότι

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_\kappa)<\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa)} \quad (2)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1. Πραγματικά, άπό τήν (2) έχουμε:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_\kappa)(1+\alpha_{\kappa+1})<\frac{1+\alpha_{\kappa+1}}{1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})}.$$

Άρκεῖ λοιπόν νά δειχτεῖ ότι: $\frac{1+\alpha_{\kappa+1}}{1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa)}<\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})}$ τό όποῖο πραγματικά ισχύει.

80. Νά δειχτεῖ ότι $\beta^{\nu+1}\geq(\nu+1)\alpha^\nu\beta-\nu\alpha^{\nu+1}$ (1) άν $\alpha,\beta\in R^+\wedge\ \nu\in N$.

Άπόδειξη

Γιά ν=1 ή (1) γίνεται $\beta^2>2\alpha\beta-\alpha^2\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2>0$ πού ισχύει. Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά ν=κ δηλ. $\beta^{\kappa+1}\geq(\kappa+1)\alpha^\kappa\beta-\kappa\alpha^{\kappa+1}$ (2)

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι $\beta^{\kappa+1}\geq(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}\beta-(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}$ (3). Πολ/ζουμε τήν (2) έπί β καί έχουμε $\beta^{\kappa+2}\geq(\kappa+1)\alpha^\kappa\beta^2-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta$ (4). Γιά νά δειχτεῖ ή (3) άρκεῖ νά δείξουμε ότι $(\kappa+1)\alpha^\kappa\beta^2-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta\geq(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}\beta-(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}\Leftrightarrow$

$$\kappa\alpha^\kappa\beta^2+\alpha^\kappa\beta^2-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta-2\alpha^{\kappa+1}\beta+\kappa\alpha^{\kappa+2}+\alpha^{\kappa+2}\geq0\Leftrightarrow$$

$$(\kappa\alpha^\kappa\beta^2-2\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta+\kappa\alpha^{\kappa+2})+(\alpha^\kappa\beta^2-2\alpha^{\kappa+1}\beta+\alpha^{\kappa+2})\geq0\Leftrightarrow$$

$$\kappa\alpha^\kappa(\alpha-\beta)^2+\alpha^\kappa(\alpha-\beta)^2\geq0\Leftrightarrow\alpha^\kappa(\alpha-\beta)^2(\kappa+1)\geq0\Leftrightarrow$$

πού ισχύει γιατί α>0 καί κ∈N. Άρα ισχύει ∀ν∈N.

Παρατήρηση

Μέ έφαρμογή τῆς ἄσκησης αὐτῆς δείχνουμε παρακάτω τήν άνίσωση τοῦ Cauchy.

81. Αν $a_i \in R^+, i=1,2,3,\ldots,\nu$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_\nu}{\nu} \geqslant \sqrt[\nu]{a_1a_2\ldots a_\nu} \quad (1) \text{ μέ } \nu\in N \text{ καί } \nu\geqslant 2.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) γιά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι: $a_1+a_2+\ldots+a_\kappa \geqslant \kappa\sqrt[\kappa]{a_1a_2\ldots a_\kappa}$ (2)

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι

$$a_1+a_2+\ldots+a_\kappa+a_{\kappa+1} \geqslant (\kappa+1)\sqrt[\kappa+1]{a_1a_2\ldots a_\kappa a_{\kappa+1}} \quad (3)$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἄσκηση βρίσκουμε , ἄν θέσουμε $\nu=\kappa$, $\beta=\sqrt[\kappa+1]{a_{\kappa+1}}$ καί $\alpha=\sqrt[\kappa(\kappa+1)]{a_1a_2\ldots a_\kappa}$, ὅτι:

$$a_{\kappa+1} \geqslant (\kappa+1)^{\kappa+1}\sqrt{a_{\kappa+1}} \quad \sqrt[\kappa+1]{a_1a_2\ldots a_\kappa} - \kappa\sqrt[\kappa]{a_1a_2\ldots a_\kappa}, \iff$$

$$a_{\kappa+1} \geqslant (\kappa+1)^{\kappa+1}\sqrt{a_1a_2\ldots a_\kappa a_{\kappa+1}} - \kappa\cdot\sqrt[\kappa]{a_1a_2\ldots a_\kappa} \quad (4)$$

Προσθέτουμε τίς (2) καί (4) κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$a_1+a_2+\ldots+a_\kappa+a_{\kappa+1} \geqslant (\kappa+1)^{\kappa+1}\sqrt{a_1a_2\ldots a_{\kappa+1}}$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall \nu\in N$ μέ $\nu\geqslant 2$.

82. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{\alpha^\nu+2^\nu\beta^\nu}{2} \geqslant \left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)^\nu$ (1) ἄν $\alpha,\beta\in R \wedge \nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται: $\frac{\alpha+2\beta}{2}=\frac{\alpha+2\beta}{2}$ καί ἰσχύει σάν ἰσότητα. Γιά $\nu=2$ γίνεται: $\frac{\alpha^2+4\beta^2}{2} \geqslant \left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)^2 \iff 2\alpha^2+8\beta^2 \geqslant \alpha^2+4\beta^2+4\alpha\beta \iff (\alpha-2\beta)^2 \geqslant 0$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$\frac{\alpha^\kappa+2^\kappa\beta^\kappa}{2} \geqslant \left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)^\kappa \quad (2)$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι

$$\frac{\alpha^{\kappa+1}+2^{\kappa+1}\beta^{\kappa+1}}{2} \geqslant \left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)^{\kappa+1} \quad (3)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $\frac{\alpha+2\beta}{2}$ καί ἔχουμε:

$$\left(\frac{\alpha^\kappa+2^\kappa\beta^\kappa}{2}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geqslant \left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)^{\kappa+1} \quad (4)$$

Ἀπό τίς (3) καί (4) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$\frac{\alpha^{\kappa+1}+2^{\kappa+1}\beta^{\kappa+1}}{2} \geqslant \left(\frac{\alpha^\kappa+2^\kappa\beta^\kappa}{2}\right)\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right) \quad \text{ἤ}$$

$$2\alpha^{\kappa+1}+2\cdot 2^{\kappa+1}\beta^{\kappa+1} \geqslant (\alpha^\kappa+2^\kappa\beta^\kappa)(\alpha+2\beta)=\alpha^{\kappa+1}+2\alpha^\kappa\beta+2^\kappa\alpha\beta^\kappa+2^{\kappa+1}\beta^{\kappa+1}$$

ἤ $\alpha^{\kappa+1}+2^{\kappa+1}\beta^{\kappa+1}-2\alpha^\kappa\beta-2^\kappa\alpha\beta^\kappa \geqslant 0 \implies \alpha^\kappa(\alpha-2\beta)+2^\kappa\beta^\kappa(2\beta-\alpha) \geqslant 0$

$(\alpha-2\beta)(\alpha^\kappa-2^\kappa\beta^\kappa) \geqslant 0$. Αὐτή ὅμως ἰσχύει γιατί, ἄν $\alpha\geqslant 2\beta \implies \alpha^\kappa > 2^\kappa\beta^\kappa \implies \alpha^\kappa\beta^\kappa > 0$, ἄν δέ $\alpha\leqslant 2\beta \implies \alpha^\kappa \leqslant 2^\kappa\beta^\kappa \implies \alpha^\kappa-2^\kappa\beta^\kappa \leqslant 0$.

83. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{1}{\nu}+\sqrt[\nu]{\nu}\leq 2$ (1), ἄν $\nu\in N>2$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε $\frac{1}{2}+\sqrt{2}<2$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $\frac{1}{\kappa}+\sqrt[\kappa]{\kappa}<2 \Longrightarrow \kappa^{\kappa+1}<(2\kappa-1)^{\kappa}$ (2)

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι

$$(\kappa+1)^{\kappa+2}<(2\kappa+1)^{\kappa+1} \quad (3)$$

Ἀπό τή φανερή ἀνίσωση $\frac{\kappa+1}{\kappa}<\frac{2\kappa+1}{2\kappa-1}$ ἔχουμε, ἄν ὑψώσουμε αὐτή στήν $(\kappa+1)$ δύναμη, ὅτι: $\frac{(\kappa+1)^{\kappa+1}}{\kappa^{\kappa+1}}<\frac{(2\kappa+1)^{\kappa+1}}{(2\kappa-1)^{\kappa+1}}$ ἢ $\frac{(\kappa+1)^{\kappa+1}}{\kappa^{\kappa+1}}<\frac{(2\kappa+1)^{\kappa+1}}{(2\kappa-1)^{\kappa}(\kappa+1)}$,

γιατί ἐνισχύεται ἄν στόν παρανομαστή τοῦ δεύτερου κλάσματος ἀντί $2\kappa-1$ θέσουμε $\kappa+1$ (γιατί $\kappa+1<2\kappa-1$ πού $\kappa>2$).

Ἔχουμε λοιπόν: $\frac{(\kappa+1)^{\kappa+2}}{\kappa^{\kappa+1}}<\frac{(2\kappa+1)^{\kappa+1}}{(2\kappa-1)^{\kappa}}$ (4) Πολ/ζουμε κατά μέλη τίς (4) καί (2) καί ἔχουμε:

$$\frac{(\kappa+1)^{\kappa+2}}{\kappa^{\kappa+1}}\kappa^{\kappa+1}<\frac{(2\kappa-1)^{\kappa}(2\kappa+1)^{\kappa+1}}{(2\kappa-1)^{\kappa}} \text{ δηλ. } (\kappa+1)^{\kappa+2}<(2\kappa+1)^{\kappa+1}$$

Ἄρα ἡ (2) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\,\nu\in N$.

Ἀπόδειξη β΄

Ἡ (1) γράφεται $\sqrt[\nu]{\nu}<2-\frac{1}{\nu}=\frac{2\nu-1}{\nu}$. Ἐφαρμόζουμε τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy γιά τούς ἀριθμούς $\underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{\nu-1\text{ τό πλῆθος}},\nu$ καί ἔχουμε

$$\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\nu-1\text{ προσθετέοι}}+\nu}{\nu}>\sqrt[\nu]{1\cdot 1\ldots\nu} \Longrightarrow \frac{2\nu-1}{\nu}>\sqrt[\nu]{\nu}.$$

84. Ἄν $\mu,\nu\in Z\wedge\mu+\nu=1$ νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha^{\mu}\beta^{\nu}\geq\alpha\mu\beta\nu$ (1) πού $\alpha\geq\beta>0$.

Ἀπόδειξη

Ἐπειδή $\mu+\nu=1$ συμπεραίνουμε ὅτι ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι θετικός. Ἔστω $\mu>0$, τότε $\nu=1-\mu<0$. Ἡ (1) γίνεται τότε

$$\alpha^{\mu}\beta^{1-\mu}\geq\alpha\mu+\beta(1-\mu) \quad (2)$$

Γιά $\mu=1$ ἔχουμε $\alpha\beta^{0}\geq\alpha+\beta\cdot 0$, πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει γιά $\mu=\kappa$ δηλ. $\alpha^{\kappa}\beta^{1-\kappa}>\alpha\kappa+\beta(1-\kappa)$ (3)

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\mu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι

$$\alpha^{\mu+1}\beta^{-\mu}\geq\alpha(\mu+1)-\beta\mu \quad (4)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $\frac{\alpha}{\beta}$ καί ἔχουμε

$$\alpha^{\mu+1}\beta^{-\mu}\geq\frac{\alpha^2\mu}{\beta}+\alpha(1-\mu).$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι $\frac{\alpha^2\mu}{\beta}+\alpha-\alpha\mu\geq\alpha\mu+\alpha-\beta\mu \Longrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$. πού ἰσχύει.

85. Νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\nu}}{x+x^3+\ldots+x^{2\nu-1}}>1+\frac{1}{\nu}$ (1) ἄν $x\neq 1\in R^+$ $\wedge\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $\frac{1+x^2}{x}>1+1 \Longrightarrow 1+x^2>2x$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $\frac{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa}}{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa-1}}>1+\frac{1}{\kappa}$ (2).

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι

$$\frac{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa+2}}{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1}}>1+\frac{1}{\kappa+1} \qquad (3)$$

Ἀντιστρέφουμε τά μέλη τῆς (2) καί ἔχουμε

$$\frac{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa-1}}{1+x^2+\ldots+x^{2\kappa}}<\frac{\kappa}{\kappa+1} \qquad (4)$$

Πολ/ζουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή τοῦ πρώτου μέλους τῆς (4) ἐπί x καί ἔχουμε $\frac{x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa}}{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1}}<\frac{\kappa}{\kappa+1}=\frac{\kappa+1-1}{\kappa+1}=1-\frac{1}{\kappa+1} \Longrightarrow$

$$-\frac{x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa}}{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1}}>-1+\frac{1}{\kappa+1} \qquad (5)$$

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ $\frac{1+x^2}{x}>2$ (6)

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς (5) καί (6) καί βρίσκουμε:

$$\frac{1+x^2}{x}-\frac{x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa}}{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1}}>1+\frac{1}{\kappa+1} \qquad (7)$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς (7) γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{(1+x^2)(x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1})-x(x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa})}{x(x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1})}=$$

$$\frac{(x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1})+(x^3+x^5+\ldots+x^{2\kappa+1}+x^{2\kappa+3})-(x^3+x^5+\ldots+x^{2\kappa+1})}{x(x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1})}=$$

$$\frac{x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1}+x^{2\kappa+3}}{x(x+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1})}=\frac{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\kappa+2}}{1+x^3+\ldots+x^{2\kappa+1}}.$$

Ἄρα ἡ (7) ταυτίζεται μέ τήν ἀποδεικτέα (3). Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

86. Νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2\nu}<\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2\kappa-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2\kappa}<\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}} \quad (2)$$ Μέ τήν προϋπόθεση (2)

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2\kappa-1)(2\kappa+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2\kappa(2\kappa+2)}<\frac{1}{\sqrt{\kappa+2}}$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}$ καί ἔχουμε:

$$\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2\kappa-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2\kappa}<\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}$$

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}<\frac{1}{\sqrt{\kappa+2}} \Rightarrow \frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}<\frac{\sqrt{\kappa+1}}{\sqrt{\kappa+2}} \Rightarrow \left(\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}\right)^2<\frac{\kappa+1}{\kappa+2} \Rightarrow 3\kappa<2$$ πού

ἰσχύει γιατί $\kappa>0$. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

87. Νά δειχτεῖ ὅτι $(\frac{\nu}{4})^\nu<\nu!$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\frac{1}{4}<1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί ἡ $\left(\frac{\nu+1}{4}\right)^{\nu+1}<(\nu+1)!$ (2)

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (1) ἐπί $(\nu+1)$ καί ἔχουμε

$$\frac{(\nu+1)\nu^\nu}{4^\nu}<(\nu+1)! \qquad (3)$$

Λόγω τῆς (2) καί (3) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι $\left(\frac{\nu+1}{4}\right)^{\nu+1}>\frac{(\nu+1)\nu^\nu}{4^\nu} \Rightarrow$

$$\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{(\nu+1)\nu^\nu}>\frac{4^{\nu+1}}{4^\nu} \Rightarrow \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu>4 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu>4 \qquad (4)$$

Ἡ (4) ὅμως ἰσχύει, γιατί $(1+\frac{1}{\nu})^\nu>1+\nu\frac{1}{\nu}=2$.

88. Νά δειχτεῖ ὅτι $\nu^2\leqslant(\nu!)^2$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ καί $\nu=2$ ἡ (1) ἰσχύει σάν ἰσότητα. Γιά $\nu=3$ ἔχουμε:

$$3^2<(1\cdot2\cdot3)^2 \Rightarrow 9<36$$ πού ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\nu$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί ἡ

$$(\nu+1)^2\leqslant[(\nu+1)!]^2 \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε $\nu^2(\nu+1)^2<[(\nu+1)!]^2$ (3)

Ἀπό τίς (2) καί (3) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι

$$(\nu+1)^2<\nu^2(\nu+1)^2 \Rightarrow \nu^2\geqslant0,$$ πού ἰσχύει.

89. Νά δειχτεῖ ὅτι $(\frac{3}{2})^\nu>\nu+1$ (1) $\forall\nu\in N\geqslant4$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=4$ ἔχουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^4>4+1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\geqslant4$ δηλ. $\left(\frac{3}{2}\right)^\kappa>\kappa+1$ (2). Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι: $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1}>\kappa+2$. Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (1) ἐπί $\frac{3}{2}$ καί ἔχουμε: $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1}>\frac{3}{2}(\kappa+1)$ (3). Γιά νά δείξουμε ὅτι εἶναι $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1}>(\kappa+1)+1$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\frac{3}{2}(\kappa+1)>(\kappa+1)+1$ ἤ

$$\frac{3}{2}(\kappa+1)-(\kappa+1)>1$$ δηλ. $\kappa+1>2$.

Ἐπειδή ἡ τελευταία ἀνίσωση εἶναι ἀληθινή, ἔπεται ὅτι ἡ (1) εἶναι ἀληθινή καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N\geqslant4$.

90. Νά δειχτεῖ ὅτι: $2^\nu>\nu^2$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $\nu\geqslant 5$.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά $\nu=5$ γίνεται $2^5>5^2$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $2^\kappa>\kappa^2$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $2^{\kappa+1}>(\kappa+1)^2$ (3).

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow 2^{\kappa+1}>2\kappa^2$ (4). Ἀπό τήν (3) καί (4) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι $2\kappa^2>(\kappa+1)^2\Longrightarrow(\frac{\kappa+1}{\kappa})^2<2$ (5).

Ἀλλά γιά $\kappa=5$ ἡ (5) ἰσχύει, γιατί $(\frac{5}{6})^2<2$. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\nu\in N$ μέ $\forall\nu\geqslant 5$

91. Νά δειχτεῖ ὅτι $2^\nu>\nu^3$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $\nu\geqslant 10$.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά $\nu=10$ γίνεται $2^{10}>10^3$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $2^\kappa>\kappa^3$ (2) Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $2^{\kappa+1}>(\kappa+1)^3$ (3).

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow 2^{\kappa+1}>2\kappa^3$ (4). Ἀπό τίς (3) καί (4) συμπαιραίνουμε ὅτι ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$2\kappa^3>(\kappa+1)^3\Longrightarrow(\frac{\kappa+1}{\kappa})^3<2 \qquad (5).$$

Ἀλλά γιά $\kappa=10$ ἡ (5) ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geqslant 10$.

Ἀπόδειξη

92. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sqrt[\nu]{\nu}\leqslant\sqrt[3]{3}$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $\nu\geqslant 3$.

Γιά $\nu=3$ ἡ (1) ἰσχύει σάν ἰσότητα. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ ὅπου $\kappa\geqslant 3$ δηλ. ὅτι $\sqrt[\kappa]{\kappa}\leqslant\sqrt[3]{3}$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $\sqrt[\kappa+1]{\kappa+1}<\sqrt[3]{3}\Longrightarrow(\kappa+1)^3<3^{\kappa+1}$ (3). Ἡ (2) γράφεται: $\kappa^3<3^\kappa\Longrightarrow 3\kappa^3\leqslant 3^{\kappa+1}$ (4). Λόγω τῶν (3) καί (4) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$(\kappa+1)^3<3\kappa^3\iff\kappa+1\leqslant\kappa\sqrt[3]{3}\iff\kappa(\sqrt[3]{3}-1)\geqslant 1\iff$$

$$\kappa\geqslant\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{1}{2}\,\frac{3-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[3]{3}^3-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1).$$

Αὐτό ὅμως ἰσχύει γιατί $\sqrt[3]{9}<3$, $\sqrt[3]{3}<2$ καί $\kappa\geqslant 3$. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geqslant 3$.

93. Νά δειχτεῖ ὅτι $2^{-\mu}<10^\nu$ (1) $\forall\mu,\nu\in N$ μέ $\mu>\frac{10\nu}{3}$.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γράφεται: $2^\mu>10^\nu$ (2). Ἀπό τήν $\mu>\frac{10\nu}{3}\Longrightarrow 3\mu>10\nu$, ὁπότε ἀντί τῆς (2) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι $2^{10\nu}\geqslant 10^{3\nu}$ (3). Ἡ (3) γιά $\nu=1$ ἰσχύει γιατί $2^{10}>10^3$. Ἔστω ὅτι ἡ (3) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$2^{10\kappa}>10^{3\kappa} \qquad (4)$$

Πολ/ζουμε τήν (4) μέ τήν $2^{10}>10^3$ καί βρίσκουμε $2^{10(\kappa+1)}>10^{3(\kappa+1)}$, ... ἡ (4) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

94. Νά δειχτεῖ ὅτι $3^{2\nu}>2^{2\nu+1}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $3^2>2^3$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $3^{2\kappa}>2^{2\kappa+1}$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $3^{2(\kappa+1)}>2^{2\kappa+3}$ (3).

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow$ $3^{2\kappa+2}>3^2\cdot 2^{2\kappa+1}$ (4).

Ἀπό τίς (3) καί (4) συμπεραίνουμε ὅτι πρέπει νά δειχτεῖ

$$3^2\cdot 2^{2\kappa+1}\geqslant 2^{2\kappa+3}\Longrightarrow 9\geqslant 4.$$

Δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

95. Νά δειχτεῖ ὅτι $\nu^{\nu+1}>(\nu+1)^{\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geqslant 3$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=3$ ἡ (1) γίνεται $3^4>4^3$, πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$(\kappa+1)^{\kappa+2}>(\kappa+2)^{\kappa+1}\Longrightarrow\frac{(\kappa+1)^{\kappa+2}}{(\kappa+2)^{\kappa+1}}>1 \qquad (2)$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δειχτεῖ ὅτι ἰσχύει ἡ (2) ὅταν ἰσχύει ἡ (1). Ἔχουμε:

$$\kappa^2+2\kappa<\kappa^2+2\kappa+1\Longleftrightarrow\kappa(\kappa+2)<(\kappa+1)^2\Longleftrightarrow\kappa^{\kappa+1}(\kappa+2)^{\kappa+1}<(\kappa+1)^{2\kappa+2}\Longleftrightarrow$$

$$\kappa^{\kappa+1}(\kappa+2)^{\kappa+1}<(\kappa+1)^{\kappa}(\kappa+1)^{\kappa+2}\Longleftrightarrow\frac{\kappa^{\kappa+1}}{(\kappa+1)^{\kappa}}<\frac{(\kappa+1)^{\kappa+2}}{(\kappa+2)^{\kappa+1}} \qquad (3)$$

Ἀλλά ἀπό τήν (1) $\Rightarrow\frac{\kappa^{\kappa+1}}{(\kappa+1)^{\kappa}}>1$, ἄρα ἡ (3) ἐνισχυόμενη γίνεται:

$$\frac{(\kappa+1)^{\kappa+2}}{(\kappa+2)^{\kappa+1}}>1.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geqslant 3$.

96. Νά δειχτεῖ ὅτι $\nu^{\nu}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{2\nu}\geqslant(\nu!)^3$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $\nu>1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἡ (1) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N>1$ δηλ. ὅτι: $\kappa^{\kappa}\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{2\kappa}\geqslant(\kappa!)^3$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι $(\kappa+1)^{\kappa+1}\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{2\kappa+2}\geqslant[(\kappa+1)!]^3$ (3).

Ἀπό τήν (2) $\Longrightarrow$ $(\kappa+1)^3\kappa^{\kappa}\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{2\kappa}\geqslant[(\kappa+1)!]^3$ (4)

Ἀπό τίς (3) καί (4) συμπεραίνουμε ὅτι ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:

$$(\kappa+1)^{\kappa+1}\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{2\kappa+2}\geqslant(\kappa+1)^3\kappa^{\kappa}\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{2\kappa}\Leftrightarrow[(\kappa+2)^2]^{\kappa}(\kappa+2)^2\geqslant 4\kappa^{\kappa}(\kappa+1)^{\kappa}(\kappa+1)^2$$

$$(\kappa^2+4\kappa+4)^{\kappa}(\kappa^2+4\kappa+4)\geqslant 4(\kappa^2+\kappa)^{\kappa}(\kappa+1)^2\Longleftrightarrow\frac{\kappa^2+4\kappa+4}{4\kappa^2+8\kappa+4}\geqslant\left(\frac{\kappa^2+\kappa}{\kappa^2+4\kappa+4}\right)^{\kappa}\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\kappa^2+4\kappa+4}{4\kappa^2+8\kappa+4}\geqslant\left(1-\frac{3\kappa+4}{\kappa^2+4\kappa+4}\right)^{\kappa} \qquad (5).$$

Ἄν στόν τύπο $(1-\alpha)^{\nu}<\frac{1}{1+\nu\alpha}$ $(0<\alpha<1)$

Θέσουμε $\alpha=\frac{3\kappa+4}{\kappa^2+4\kappa+4}<1$, βρίσκουμε:

$$\left(1-\frac{3\kappa+4}{\kappa^2+4\kappa+4}\right)^{\kappa}<\frac{1}{1+\kappa\left(\frac{3\kappa+4}{\kappa^2+4\kappa+4}\right)}=\frac{\kappa^2+4\kappa+4}{4\kappa^2+8\kappa+4}\ .$$

Άρα ή (5) ισχύει, άρα και ή (1) $\forall\nu\in N$.

97. Νά δειχτεῖ ὅτι $(\nu+1)^{\frac{\nu-1}{2}}<\nu!<\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$ μέ $\nu>1$.

Απόδειξη

Γιά $\nu=2$ ή $(\nu+1)^{\frac{\nu-1}{2}}<\nu!$ (2) γίνεται $\sqrt{3}<1\cdot 2$ πού ισχύει. Ἔστω ὅτι ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$(\kappa+1)^{\frac{\kappa-1}{2}}<\kappa! \qquad (3)$$

θά δείξουμε ὅτι ή (2) ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $(\kappa+2)^{\frac{\kappa}{2}}<(\kappa+1)!$ (4)

Ἀπό τήν (3) $\Longrightarrow$ $(\kappa+1)^{\frac{\kappa-1}{2}+1}=(\kappa+1)^{\frac{\kappa+1}{2}}<(\kappa+1)!$ (5)

Λόγω τῶν (4) καί (5) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι $(\kappa+2)^{\kappa}<(\kappa+1)^{\kappa+1}\Longrightarrow$

$\frac{1}{\kappa+1}<\left(\frac{\kappa+1}{\kappa+2}\right)^{\kappa}$ ἤ $\frac{1}{\kappa+1}<\left(1-\frac{1}{\kappa+2}\right)^{\kappa}$ ή ὁποία ισχύει λόγω τῆς ἀνίσωσης τοῦ Bernoulli $(1-\alpha)^{\nu}>1-\nu\alpha$ ἄν θέσουμε $\alpha=\frac{1}{\kappa+2}$, ἔχουμε:

$$1-\frac{\kappa}{\kappa+2}\leqslant\left(1-\frac{1}{\kappa+2}\right)^{\kappa} \text{ ἤ } \frac{1}{\kappa+1}\leqslant\frac{2}{\kappa+2}<\left(1-\frac{1}{\kappa+2}\right)^{\kappa},$$ γιατί:

$$\frac{\kappa}{\kappa+2}-\frac{1}{\kappa+1}=\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}>0.$$ Ἄρα τό πρῶτο μέλος τῆς (1) ισχύει γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$ μέ $\nu>1$.

Θά δείξουμε ὅτι $\nu!<\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\nu}$ (6)

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $1\cdot 2<\frac{9}{4}$ πού ισχύει. Ἔστω ὅτι ή (6) ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $\kappa!<\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\kappa}$ (7). Θά δείξουμε ὅτι ή (6) ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $(\kappa+1)!<\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa+1}$ (8). Ἀπό τήν (7) ἔχουμε:

$$(\kappa+1)!<\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa}(\kappa+1) \qquad (9)$$

Ἀπό τίς (8) καί (9) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa+1}\leqslant(\kappa+1)\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\kappa}$ ἤ μετά τίς πράξεις $\left(\frac{\kappa+2}{\kappa+1}\right)^{\kappa+1}\geqslant 2\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{\kappa+1}\right)^{\kappa+1}>2$. Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli $(1+x)^{\nu}>1+\nu x$ γιά $x=\frac{1}{\kappa+1}$ ἔχουμε: $\left(1+\frac{1}{\kappa+1}\right)^{\kappa+1}>1+(\kappa+1)\frac{1}{\kappa+1}=2$

Ἄρα ή (6) ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

98. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$x^{\nu}+x^{\nu-2}+x^{\nu-4}+\ldots+\frac{1}{x^{\nu-4}}+\frac{1}{x^{\nu-2}}+\frac{1}{x^{\nu}}\geqslant\nu+1 \qquad \forall\nu\in N \text{ καί } x>0.$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=1$ ή (1) γίνεται $1+\frac{1}{x}\geqslant 2$ (2) $\Longrightarrow$ $(x-1)^2\geqslant 0$, πού ισχύει.

Γιά ν=2 ἡ (1) γίνεται $x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3$. Ἡ (2) ἰσχύει $\forall x>0$, δηλ. ἰσχύει καί ὅταν ὁ x ἀντικατασταθεῖ μέ τούς $x^2, x^4, \ldots$ δηλ. $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$ (4)

Προσθέτοντας 1 στά δύο μέλη τῆς (4) βρίσκουμε τήν (3).

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ.

$$x^\kappa+x^{\kappa-2}+\ldots+\frac{1}{x^{\kappa-2}}+\frac{1}{x^\kappa}\geqslant\kappa+1 \qquad (5)$$

θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+2 δηλ. ὅτι

$$x^{\kappa+2}+x^\kappa+x^{\kappa-2}+\ldots+\frac{1}{x^{\kappa-2}}+\frac{1}{x^\kappa}+\frac{1}{x^{\kappa+2}}\geqslant\kappa+3 \qquad (6)$$

Ἀντικαθιστοῦντες στήν (4) τό x^2 μέ τό $x^{\kappa+2}$ βρίσκουμε:

$$x^{\kappa+2}+\frac{1}{x^{\kappa+2}}\geqslant 2 \qquad (7)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς (5) καί (7) καί βρίσκουμε τήν (6).

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+2.

Στίς δύο πρῶτες περιπτώσεις δείχτηκε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=1 καί ν=2. Στήν τελευταία περίπτωση δείχτηκε ὅτι ἡ ἰσχύς τῆς (1) γιά ν=κ+2 συνεπάγεται τήν ἰσχύν τῆς (1) γιά ν=κ, δηλ. ἔχουμε ἀμέσως μετάβαση ἀπό ν στό ν=κ+2. Τά ἀποτελέσματα τῆς πρώτης καί τελευταίας περίπτωσης μᾶς δίνουν ἀμέσως τήν βεβαιότητα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε περιττό ἀριθμό. Ὅμοια, τά ἀποτελέσματα τῆς δεύτερης καί τελευταίας περίπτωσης μᾶς δίνουν βεβαιότητα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε ἄρτιο ἀριθμό. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

99. Ἄν $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_\nu\geqslant 0$ καί $\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\ldots\geqslant\beta_\nu\geqslant 0$ νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{1}{\nu}\sum_{\rho=1}^{\nu}\alpha_\rho\frac{1}{\rho}\sum_{\rho=1}^{\nu}\beta_\rho\leqslant\frac{1}{\nu}\sum_{\rho=1}^{\nu}\alpha_\rho\beta_\rho$ (1)

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε $\alpha_1\beta_1=\alpha_1\beta_1$. Γιά ν=2 εἶδαν

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\iff$$

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2\leqslant 2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\iff$$

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\geqslant 0\iff(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\geqslant 0$$

πού ἀληθεύει λόγω τῆς ὑποθέσεως. Ἡ (1) γράφεται:

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}\alpha_\rho\cdot\sum_{\rho=1}^{\nu}\beta_\rho\leqslant\nu\sum_{\rho=1}^{\nu}\alpha_\rho\beta_\rho \qquad (2)$$

Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει γιά ν=κ δηλ. ὅτι:

$$\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho\sum_{\rho=1}^{\kappa}\beta_\rho\leqslant\kappa\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho\beta_\rho \qquad (3)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. ὅτι:

$$\sum_{\rho=1}^{\kappa+1}\alpha_\rho\sum_{\rho=1}^{\kappa+1}\beta_\rho\leqslant(\kappa+1)\sum_{\rho=1}^{\kappa+1}\alpha_\rho\beta_\rho= \qquad (3)$$

Είναι : $\sum_{\rho=1}^{\kappa+1}\alpha_\rho \sum_{\rho=1}^{\kappa+1}\beta_\rho-(\kappa+1)\sum_{\rho=1}^{\kappa+1}\alpha_\rho\beta_\rho=$

$$=\left(\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho+\alpha_{\kappa+1}\right)\left(\sum_{\rho=1}^{\kappa}\beta_\rho+\beta_{\kappa+1}\right)-(\kappa+1)\left(\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho\beta_\rho+\alpha_{\kappa+1}\beta_{\kappa+1}\right)=$$

$$=\left[\left(\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho\right)\left(\sum_{\rho=1}^{\kappa}\beta_\rho\right)-\kappa\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho\beta_\rho\right]+$$

$$+\left(\beta_{\kappa+1}\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho+\alpha_{\kappa+1}\sum_{\rho=1}^{\kappa}\beta_\rho-\kappa\alpha_{\kappa+1}\beta_{\kappa+1}-\sum_{\rho=1}^{\kappa}\alpha_\rho\beta_\rho\right)\leqslant 0,$$

γιατί ή πρώτη παρένθεση ένεκα της (2) είναι $\leqslant 0$ καθώς και ή δεύτερη.

Άρα ισχύει ή (3) και άρα ή (1) ισχύει $\forall\nu\in N$.

Η δεύτερη παρένθεση είναι $\leqslant 0$, γιατί

$$\beta_{\kappa+1}(\alpha_1+\ldots+\alpha_\kappa)+\alpha_{\kappa+1}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\kappa)-(\underbrace{\alpha_1\beta_{\kappa+1}+\ldots+\alpha_{\kappa+1}\beta_{\kappa+1}}_{\kappa\ \text{φορές}})-$$

$$-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\kappa\beta_\kappa)=$$

$$=\beta_{\kappa+1}(\alpha_1-\alpha_{\kappa+1})+\beta_{\kappa+1}(\alpha_2-\alpha_{\kappa+1})+\ldots+\beta_{\kappa+1}(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})+\beta_1(\alpha_1-\alpha_{\kappa+1})+$$

$$+\beta_2(\alpha_2-\alpha_{\kappa+1})+\ldots+\beta_\kappa(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})=$$

$$=(\alpha_1-\alpha_{\kappa+1})(\beta_{\kappa+1}-\beta_1)+(\alpha_2-\alpha_{\kappa+1})(\beta_{\kappa+1}-\beta_1)+\ldots+(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})(\beta_{\kappa+1}-\beta_\kappa)=$$

$$=\sum_{\rho=1}^{\kappa}\left[(\alpha_\rho-\alpha_{\kappa+1})(\beta_{\kappa+1}-\beta_\rho)\right]\quad\text{και}\quad\rho\leqslant\kappa.$$

Αλλά $(\alpha_\rho-\alpha_{\kappa+1})(\beta_{\kappa+1}-\beta_\rho)\leqslant 0$ για $\rho\leqslant\kappa$, γιατί από την υπόθεση είναι $\alpha_\rho\geqslant\alpha_{\kappa+1}$ και $\beta_\rho\geqslant\beta_{\kappa+1}$ για $\rho\leqslant\kappa$.

100. Να δειχτεί ότι: $\left[\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\right]\geqslant\left[\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i x_i\right]$ (1)

$i=1,2,\ldots$ $\wedge\nu\in N$. (Ανίσωση Schwarz).

Απόδειξη

Για $\nu=1\Longrightarrow\alpha_1^2x_1^2=(\alpha_1x_1)^2$ που ισχύει.

Για $\nu=2$ $\alpha_1^2+\alpha_2^2)(x_1^2+x_2^2)=\alpha_1^2x_1^2+\alpha_1^2x_2^2+\alpha_2^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2>\alpha_1^2x_1^2+2\alpha_1\alpha_2x_1x_2+\alpha_2^2x_2^2=$

$=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2$) που ισχύει.

Έστω ότι ή (1) ισχύει για $\nu=\kappa$ δηλ. ότι:

$$\left[\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i^2\right]\left[\sum_{\alpha_i}^{\kappa}x_i^2\right]>\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_ix_i\right)^2\qquad(2)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$. Αρκεί λοιπόν νά δείξουμε ότι:

$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa+1}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\kappa+1}x_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{\kappa+1}\alpha_ix_i\right)^2\qquad(3)$$

Είναι:

$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa+1}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\kappa+1}x_i^2\right)=\left(\alpha_{\kappa+1}^2+\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i^2\right)\left(x_{\kappa+1}^2+\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\right)=$$

$$\alpha_{\kappa+1}^2x_{\kappa+1}^2+x_{\kappa+1}^2\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i^2+\alpha_{\kappa+1}^2\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2+\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\right)\geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_ix_i\right)^2+x_{\kappa+1}^2\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i\right)^2+\alpha_{\kappa+1}^2\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\right)^2+(\alpha_{\kappa+1}x_{\kappa+1})^2\geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i x_i\right)^2+(\alpha_{\kappa+1}+x_{\kappa+1})^2-\alpha_{\kappa+1}x_{\kappa+1}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\right)}\geqslant$$
$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i x_i\right)^2+(\alpha_{\kappa+1}+x_{\kappa+1})^2+2\alpha_{\kappa+1}x_{\kappa+1}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i x_i\right)^2}=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i x_i+\alpha_{\kappa+1}x_{\kappa+1}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{\kappa+1}\alpha_i x_i\right)^2$$

Άρα ή (1) ισχύει και γιά ν=κ+1, άρα και γιά $\forall\nu\in N$.

101. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sum_{\nu=1}^{\nu}\alpha_\nu\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\nu}\geqslant\nu^2$ $\forall\nu\in N$ μέ $\alpha_\nu>0$.

Απόδειξη

Στήν ἀνίσωση τοῦ Schwarz θέτουμε $a_i=\sqrt{\alpha_\nu}$ καί $x_i=\frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu}}$ $\forall\nu\in N$ καί ἔχουμε: $\sum_{\nu=1}^{\nu}\alpha_\nu\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\nu}\geqslant\left(\sum\sqrt{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu}}\right)^2=\underbrace{(1+1+\ldots+1)^2}_{\nu\text{ τό πλῆθος}}=\nu^2$.

102. Νά δειχτεῖ ὅτι: $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu})^\nu\leqslant\nu(2-\frac{1}{\nu})$ (1) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Στήν ἀνίσωση τοῦ Schwarz ἔχουμε: $(\Sigma a_i x_i)^2\leqslant\Sigma a_i^2\,\Sigma x_i^2$ (2)

Σ'αὐτήν θέτουμε $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{3}$, ... , $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}$ καί $x_1=x_2=\ldots=x_\nu=1$.

Ἐπειδή ἡ (2) ἰσχύει σάν ἰσότητα ὅταν $\frac{\alpha_1}{x_1}=\frac{\alpha_2}{x_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{x_\nu}$, καί ὅταν ν≥2 ἰσχύει σάν ἀνίσωση θά ἔχουμε:

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu})^2<(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2})\nu \qquad (3)$$

Ἡ (3) ἰσχύει σάν ἰσότητα ὅταν ν=1. Θά δείξουμε ὅτι εἶναι:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}\leqslant 2-\frac{1}{4} \qquad (4)$$

Ἡ (4) ἰσχύει σάν ἰσότητα γιά ν=1, καί σάν ἀνίσωση γιά ν≥2. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά ν=κ δηλ. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\kappa^2}\leqslant 2-\frac{1}{\kappa}$ (5)

Ἄν στά δύο μέλη τῆς (5) προσθέσουμε τό $\frac{1}{(\kappa+1)^2}$ βρίσκουμε:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\kappa^2}+\frac{1}{(\kappa+1)^2}<2-\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{(\kappa+1)^2} \qquad (6)$$

Ἐπειδή ὅμως: $2-\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{(\kappa+1)^2}=2-\frac{\kappa^2+\kappa+1}{\kappa(\kappa+1)^2}=2-\frac{\kappa^2+\kappa+1}{(\kappa+1)(\kappa^2+\kappa)}=$

$=2-\frac{1}{\kappa+1}\cdot\frac{\kappa^2+\kappa+1}{\kappa^2+\kappa}<2-\frac{1}{\kappa+1}$ (γιατί $\frac{\kappa^2+\kappa+1}{\kappa^2+\kappa}>1$).

ἡ (6) γίνεται: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(\kappa+1)^2}<2-\frac{1}{\kappa+1}$.

Ἄρα ἡ (4) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$, καί ἡ (3) γίνεται:

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu})^2\leqslant\nu(2-\frac{1}{\nu})$$

καί ἰσχύει σάν ἰσότητα γιά ν=1.

103. Νά δειχτεῖ ὅτι: $2<(1+\frac{1}{x})^x<3 \quad \forall \nu\in N$.

Ὑπόδειξη

Νά δειχτεῖ ὅτι, ἄν $\nu\in N\leqslant x$, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$1+\frac{\nu}{x}\leqslant(1+\frac{1}{x})^{\nu}<1+\frac{\nu}{x}+\frac{\nu^2}{x^2} \qquad (1).$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $1+\frac{\kappa}{x}\leqslant(1+\frac{1}{x})^{\kappa}<1+\frac{\kappa}{x}+\frac{\kappa^2}{x^2}$.

Θά δείξουμε ὅτι αὐτή ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$.

Ἔχουμε: $(1+\frac{1}{x})^{\kappa+1}=(1+\frac{1}{x})^{\kappa}(1+\frac{1}{x})>(1+\frac{\kappa}{x})(1+\frac{1}{x})=1+\frac{\kappa+1}{x}+\frac{\kappa}{x^2}>1+\frac{\kappa+1}{x}$

Ἐπίσης ἔχουμε: $(1+\frac{1}{x})^{\kappa+1}=(1+\frac{1}{x})^{\kappa}(1+\frac{1}{x})<(1+\frac{\kappa}{x}+\frac{\kappa^2}{x^2})(1+\frac{1}{x})=$

$=1+\frac{\kappa+1}{x}+\frac{\kappa}{x^2}+\frac{\kappa^2}{x^2}+\frac{\kappa^2}{x^3}=1+\frac{\kappa+1}{x}+\frac{\kappa^2+2\kappa+1}{x^2}-\frac{\kappa+1}{x^2}+\frac{\kappa^2}{x^3}=$

$=1+\frac{\kappa+1}{x}+\frac{(\kappa+1)^2}{x^2}-\frac{x(\kappa+1)-\kappa^2}{x^3}<1+\frac{\kappa+1}{x}+\frac{(\kappa+1)^2}{x}$, ἀφοῦ $x(\kappa+1)^2\geqslant\kappa^2$ ἄν $x>\kappa$. Ἀπό τή σχέση αὐτή βγαίνει ἡ σχέση, πού θέλουμε νά δείξουμε. Γιατί ἄν βάλουμε ὅπου $\nu=x$ ἡ (1) γίνεται:

$$1+\frac{x}{x}<(1+\frac{1}{x})^2<1+\frac{x}{x}+\frac{x^2}{x^2} \quad \text{ἤ} \quad 2<(1+\frac{1}{x})^2<3.$$

104. Νά δειχτεῖ ὅτι $(\nu!)^2>\nu^{\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$ μέ $\nu>2$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=3$ ἔχουμε $(1\cdot2\cdot3)^2>3^2\Longrightarrow 36>27$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $(1\cdot2\cdot3\ldots\kappa)^2>\kappa^{\kappa}$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ (1) καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $[1\cdot2\cdot3\ldots\kappa(\kappa+1)]^2>(\kappa+1)^{\kappa+1}$ (α) ἤ $(\kappa!)^2(\kappa+1)^2>(\kappa+1)^{\kappa+1}$ (3). Ἀλλά $(\kappa!)^2>\kappa^{\kappa}$ λόγω τῆς (2). Ἄν στή (3) θέσουμε ὅπου $(\kappa!)^2$ τό μικρότερο του κ^{κ} καί ἰσχύει τότε γιά ἕνα λόγο παραπάνω θά ἰσχύει καί ἡ (α). Ἄρα ἔχουμε:

$$\kappa^{\kappa}(\kappa+1)^2>(\kappa+1)^{\kappa+1}\Longrightarrow\kappa^{\kappa}(\kappa+1)>(\kappa+1)^{\kappa}\Longrightarrow\kappa+1>(1+\frac{1}{\kappa})^{\kappa}.$$

Ἀλλά $2<(1+\frac{1}{\kappa})^{\kappa}<3$ (ἄσκηση 103) πού ἰσχύει. Ἄρα ἰσχύει καί ἡ (α)

105. Ἄν $\nu\in N$ νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{\nu}^2}{\nu}\geqslant(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{\nu}}{\nu})^2$ (1)

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $a_1^2\geqslant a_1^2$ πού ἰσχύει σάν ἰσότητα. Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\geqslant(\frac{a_1+a_2}{2})^2\Longleftrightarrow a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\geqslant0\Longleftrightarrow(a_1-a_2)^2\geqslant0$ πού ἰσχύει. Ἔστω

ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈Ν δηλ. $\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2}{\kappa}\geqslant\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa}{\kappa}\right)^2$ (2)

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2}{\kappa+1}\geqslant\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}}{\kappa+1}\right)^2 \qquad (3)$$

Πραγματικά ἀπό τήν (3) ἔχουμε:

$(\kappa+1)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2)\geqslant(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa+1})^2\Longrightarrow$

$(\kappa+1)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2)\geqslant(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)^2+\alpha_{\kappa+1}^2+2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}$

ἤ λόγω τῆς (2) ἡ ὁποία δίνει: $\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2)\geqslant(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)^2$,

ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:

$\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2)+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2\geqslant$

$\geqslant\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2)+\alpha_{\kappa+1}^2+2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}$ ἤ

$\kappa\alpha_{\kappa+1}^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2\geqslant\alpha_{\kappa+1}^2+2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}\Longrightarrow$

$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2+(\kappa-1)\alpha_{\kappa+1}^2\geqslant2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}\Leftrightarrow$

$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})^2+2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}\geqslant$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+1}-(\kappa-1)\alpha_{\kappa+1}^2\Longrightarrow$

$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})^2+(\kappa-1)\alpha_{\kappa+1}^2\geqslant0$ πού ἰσχύει.

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

106. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ ὅπου $\alpha_1=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\nu$ (1) $\forall\nu\in N$. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\alpha_\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (2) καί $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{2\nu}{\nu+1}$ (3)

Ἀπόδειξη

α) Γιά ν=1 ἡ (2) δίνει $\alpha_1=1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει γιά ν=κ∈Ν δηλ. $\alpha_\kappa=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ (4). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. $\alpha_{\kappa+1}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}=\frac{\kappa^2}{2}+\kappa+\frac{\kappa}{2}+1$ καί λόγω τῆς (4)

$\alpha_{\kappa+1}=\alpha_\kappa+\kappa+1$ ἡ ὁποία ἰσχύει λόγω τῆς (1).

β) Ἡ (3) γιά ν=1 ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ∈Ν δηλ.

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\kappa}=\frac{2\kappa}{\kappa+1} \qquad (5)$$

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ.

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}=\frac{2(\kappa+1)}{\kappa+2} \qquad (6)$$

Ἀπό τήν (5) ἔχουμε: $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}=\frac{2\kappa}{\kappa+1}+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}$ ἤ λόγω τῆς (2)

$$\frac{2\kappa}{\kappa+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}(\kappa+1)^2+\frac{1}{2}(\kappa+1)}=\frac{2\kappa}{\kappa+1}+\frac{2}{(\kappa+1)^2+(\kappa+1)}=\frac{2(\kappa^2+2\kappa+1)}{(\kappa+1)(\kappa+2)}=\frac{2(\kappa+1)^2}{(\kappa+1)(\kappa+2)}=$$

$$=\frac{2(\kappa+1)}{\kappa+2}\,.$$

107. Αν $\nu\in N$ καί $a_{\nu+1}=\frac{1}{2}(a_\nu+\frac{1}{a_\nu})$ όπου $a_1>1$, νά δειχτεῖ ὅτι:

α) $a_\nu>1$, β) $a_\nu>a_{\nu+1}$, γ) $\frac{a_\nu-1}{a_{\nu+1}}=(\frac{a_1-1}{a_1+1})^{2^{\nu-1}}$.

Ἀπόδειξη

α) Ἀπό τό νόμο πού σχηματίζεται ἡ ἀκολουθία ἔχουμε:

$a_\nu=\frac{1}{2}(a_{\nu-1}+\frac{1}{a_{\nu-1}})=\frac{a_{\nu-1}^2+1}{2a_{\nu-1}}$ καί, ἐπειδή $a_{\nu-1}^2+1>2a_{\nu-1}$ καί $a_1>1$, συμπεραίνουμε ὅτι $a_\nu>\frac{2a_{\nu-1}}{2a_{\nu-1}}=1$.

β) Ἀπό τήν $a_\nu>1$ ἔχουμε $a_\nu^2>1\Rightarrow 2a_\nu^2>a_\nu^2+1$ ἤ $2a_\nu>a_\nu+\frac{1}{a_\nu}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}(a_\nu+\frac{1}{a_\nu})=a_{\nu+1}$.

γ) Γιά $\nu=1$ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι: $\frac{a_\kappa-1}{a_\kappa+1}=(\frac{a_1-1}{a_1+1})^{2^\kappa}$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $\frac{a_{\kappa+1}-1}{a_{\kappa+1}+1}=(\frac{a_1-1}{a_1+1})^{2^{\kappa+1}}$ (1). Τό πρῶτο μέλος τῆς (1) γράφεται:

$$\frac{a_{\kappa+1}-1}{a_{\kappa+1}+1}=\frac{\frac{1}{2}(a_\kappa+\frac{1}{a_\kappa})-1}{\frac{1}{2}(a_\kappa+\frac{1}{a_\kappa})+1}=\frac{(a_\kappa-1)^2}{(a_\kappa+1)^2}$$

καί λόγω τῆς ὑπόθεσης ἔχουμε: $\frac{a_{\kappa+1}-1}{a_{\kappa+1}+1}=(\frac{a_1-1}{a_1+1})^{2^\kappa}$

Ἄρα ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

108. Ἄν $a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_\nu-a_{\nu-1}$ καί $\alpha_1=\beta_1$, $a_2=\beta_2$ καί $\beta_\nu>2\beta_{\nu-1}-\beta_{\nu-2}$ (1) μέ $\nu\in N\geqslant 3$ νά δειχτεῖ ὅτι $\beta_\nu>a_\nu$ (2).

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=3$ ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $\beta_3>2\beta_2-\beta_1=2a_2-a_1=a_3$ δηλ. ἡ (2) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa-1(\kappa\in N)$ δηλ. ὅτι:

$$\beta_{\kappa-1}>a_{\kappa-1} \tag{3}$$

Μέ τήν προϋπόθεση (3) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $\beta_\kappa>a_\kappa$ (4). Ἀπό τήν (1) γιά $\nu=3,4,\ldots,\kappa$ ἔχουμε:

$\beta_3>2\beta_2-\beta_1$, $\beta_4\geqslant 2\beta_3-\beta_2,\ldots,\beta_{\kappa-1}>2\beta_{\kappa-2}-\beta_{\kappa-3}$, $\beta_\kappa>2\beta_{\kappa-1}-\beta_{\kappa-2}$, καί προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε: $\beta_\kappa>\beta_{\kappa-1}-\beta_1+\beta_2$ ἤ λόγω τῆς (3) ἔχουμε: $\beta_\kappa+\beta_1-\beta_2>\beta_{\kappa-1}$ ἤ $\beta_\kappa>a_{\kappa-1}+(a_2-a_1)$ ἤ $\beta_\kappa>a_\kappa$.

Ἄρα ἡ (2) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa$ ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

109. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $a_1,a_2,\ldots,a_{2\nu+1}\ldots$ πού $a_\nu-2a_{\nu+1}+a_{\nu+2}\geqslant 0$ (1) $(\nu=1,2,\ldots,2\mu-1)$. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{1}{\nu+1}(a_1+a_3+\ldots+a_{2\nu+1})\geqslant\frac{1}{\nu}(a_2+a_4+\ldots+a_{2\nu}) \tag{2}$$

Απόδειξη

Η (2) για ν=1 γίνεται $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)>\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_1+\alpha_3>2\alpha_2$ πού ισχύει λόγω της (1) για ν=1. Η (2) γράφεται:

$$\nu(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\nu+1})\geqslant(\nu+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu}) \qquad (3)$$

Έστω ότι η (3) ισχύει για ν=κ∈N δηλ.

$$\kappa(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa+1})\geqslant(\kappa+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa}).$$

Θά δείξουμε ότι ισχύει καί για ν=κ+1, δηλ. ότι:

$$(\kappa+1)(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa+3})\geqslant(\kappa+2)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa+2}) \qquad (4)$$

Από τήν (1) έχουμε: $\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}\geqslant\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu+2}$ $(\nu=1,2,\ldots,2\kappa+1)$ δηλ. ότι

$$\alpha_1-\alpha_2\geqslant\alpha_2-\alpha_3\geqslant\ldots\geqslant\alpha_{2\nu+1}-\alpha_{2\nu+2}.$$

Θέτουμε $\alpha_1-\alpha_2=x_1$, $\alpha_2-\alpha_3=x_2,\ldots,\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1}=x_\kappa$ καί τότε ή τελευταία σχέση γράφεται $x_1\geqslant x_{2\kappa+1}$, $x_3>x_{2\kappa+2},\ldots, x_{2\kappa+1}>x_{2\kappa+2}$.

Προσθέτουμε αύτές κατά μέλη καί βρίσκουμε:

$$x_1+x_3+\ldots+x_{2\kappa+1}\geqslant(\kappa+1)(\alpha_{2\kappa+2}+\alpha_{2\kappa+3}) \text{ ή}$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_3-\alpha_4)+\ldots+(\alpha_{2\kappa+1}-\alpha_{2\kappa+2})\geqslant(\kappa+1)(\alpha_{2\kappa+2}-\alpha_{2\kappa+3}) \text{ ή}$$

$$\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa+1}+(\kappa+1)\alpha_{2\kappa+3}\geqslant\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa}+(\kappa+2)\alpha_{2\kappa+2} \qquad (5)$$

Προσθέτουμε τή (3) καί (5) καί έχουμε:

$$(\kappa+1)(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\kappa+3})\geqslant(\kappa+2)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa+2}) \text{ δηλ.}$$

ή (3) ισχύει καί για ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N.

110. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ μέ $\alpha_1=1$ καί $\alpha_{\nu+1}=\sqrt{2\alpha_\nu}$. Νά δειχτεί ότι: $\alpha_{\nu+1}<\alpha_{\nu+2}$ (1) β) $\alpha_\nu<2$ ν∈N (2).

Απόδειξη

α) Βλέπουμε ότι όλοι οί όροι της ακολουθίας είναι θετικοί αριθμοί. Πραγματικά: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\sqrt{2\alpha_1}=\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}>0$, γιατί ό $\sqrt{2}$ είναι ή πρωτεύουσα ρίζα, καί γενικά $\alpha_\nu=\sqrt{2\alpha_{\nu-1}}>0$, γιά τό ίδιο λόγο.

Γιά ν=1 ή $\alpha_1<\alpha_2$ ισχύει, γιατί $1<\sqrt{2}$. Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά ν=κ (κ∈N) δηλ. $\alpha_\kappa<\alpha_{\kappa+1}$ (3) Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (3) ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1. Πραγματικά: $\alpha_\kappa<\alpha_{\kappa+1} \Longrightarrow 2\alpha_\kappa<2\alpha_{\kappa+1}$.

Καί έπειδή καί τά δύο μέλη είναι θετικά έχουμε: $\sqrt{2\alpha_\kappa}<\sqrt{2\alpha_{\kappa+1}}$ λόγω τοῦ αναδρομικοῦ τύπου $\alpha_{\kappa+1}<\alpha_{\kappa+2}$.

β) Γιά ν=1 έχουμε $\alpha_1<2 \Leftrightarrow 1<2$ πού ισχύει. Έστω ότι ισχύει καί γιά ν=κ∈N δηλ. $\alpha_\kappa<2$. Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. $\alpha_{\kappa+1}<2$. Πραγματικά: $\alpha_\kappa<2 \Longrightarrow 2\alpha_\kappa<4 \Longrightarrow 2\alpha_\kappa<\sqrt{4} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa+1}<2$.

111. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ μέ $\alpha_i>0$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ καί ότι: $\alpha_\nu^2+2\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}=0$ (1) ∀ν∈N. Νά δειχτεί ότι: $\alpha_\nu=-1+\sqrt[\nu]{1+\alpha_0}$ (2)

Απόδειξη

Από τήν (1) $\Rightarrow$ $\alpha_\nu=-1+\sqrt{1+\alpha_{\nu-1}}$ (3). Από τήν (3) γιά ν=1, 2,...,ν βρίσκουμε: $\alpha_1=-1+\sqrt{1+\alpha_0}$ (1), $\alpha_2=-1+\sqrt{1+\alpha_1}$ (2), $\alpha_3=-1+\sqrt{1+\alpha_2}$ (3), ... , $\alpha_\nu=-1+\sqrt{1+\alpha_{\nu-1}}$ (ν)

Από τήν (1) $\Rightarrow$ ότι ή (2) ισχύει γιά ν=1. Έστω ότι ή (2) ισχύει γιά ν=κ δηλ. ότι: $\alpha_\kappa=-1+\sqrt[2^\kappa]{1+\alpha_0}$ (1'). Μέ τήν προϋπόθεση (1') θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι:

$$\alpha_{\kappa+1}=-1+\sqrt[2^{\kappa+1}]{1+\alpha_0} \qquad (2')$$

Από τίς (1),(2),...,(ν) έχουμε ότι $\alpha_{\kappa+1}=-1+\sqrt{1+\alpha_\kappa}$ (3')

Η (3') λόγω τῆς (1') γράφεται:

$$\alpha_{\kappa+1}=-1+\sqrt{1-1+\sqrt[2^\kappa]{1+\alpha_0}}=-1+\sqrt[2^{\kappa+1}]{1+\alpha_0}.$$

Άρα ισχύει ή (1') θά ισχύει καί ή (2') άρα καί ή (2).

112. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ πού $\alpha_2=\alpha_1^2-1$ (1) καί $\alpha_\nu\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}^2-1$ (2) μέ $\nu\in N$. Νά δειχτεῖ ότι: $\alpha_\nu+\alpha_{\nu+2}=\alpha_1+\alpha_{\nu+1}$ (3)

Γιά ν=1 ή (3) γίνεται $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_1\alpha_2$ (4) ἤ $\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2-1)$ ἤ $\alpha_1\alpha_3=\alpha_1^2(\alpha_2-1)$ καί λόγω τῆς (1) $\alpha_1\alpha_3=(\alpha_2+1)(\alpha_2-1)=\alpha_2^2-1$ (5)
Αλλά ή (5) ισχύει λόγω τῆς (2) γιά ν=1 καί έπειδή οί πράξεις εἶναι άντιστρεπτές άπό τήν (4) πηγαίνουμε στή (5). Άρα ισχύει. Έστω ότι ή (3) ισχύει γιά ν=κ δηλ. ότι $\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+2}=\alpha_1\alpha_{\kappa+1}$ (6). Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι $\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+3}=\alpha_1\alpha_{\kappa+2}$ (7).
Από τίς (6) καί (7) παίρνουμε:

$$\alpha_1=\frac{\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+2}}{\alpha_{\kappa+1}} \quad \text{καί} \quad \alpha_1=\frac{\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+3}}{\alpha_{\kappa+2}},$$

όπότε άρκεῖ νά δείξουμε ότι: $\frac{\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+2}}{\alpha_{\kappa+1}}=\frac{\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+3}}{\alpha_{\kappa+2}} \Rightarrow$

$$\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}+\alpha_{\kappa+2}^2=\alpha_{\kappa+1}^2+\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3} \qquad (8)$$

Αλλά λόγω τῆς (2) εἶναι $\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}=\alpha_{\kappa+1}^2-1$ καί $\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3}=\alpha_{\kappa+2}^2-1$ καί τότε ή (8) γίνεται $\alpha_{\kappa+1}^2-1+\alpha_{\kappa+2}^2=\alpha_{\kappa+1}^2+\alpha_{\kappa+2}^2-1$.
Δηλ. ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί $\forall\nu\in N$.

113. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu,\ldots$ πού $\alpha_1=\alpha_2=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ $\forall\nu\in N\geq 3$. Νά δειχτεῖ ότι:

α) $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\ldots+(-1)^{\nu-1}\alpha_\nu=1+(-1)^{\nu-1}\alpha_{\nu-1}$ (1)

β) $\alpha_{\nu+1}^3-4\alpha_\nu^3-\alpha_{\nu-1}^3=3(-1)^\nu\alpha_\nu$ (2)

Απόδειξη

α) Γιά ν=3 ή (1) ισχύει. Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά ν=κ δηλ. ότι $\alpha_1-\alpha_2+\ldots+(-1)^{\kappa-1}\alpha_\kappa=1+(-1)^{\kappa-1}\alpha_{\kappa+1}$ (α). Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1. Πραγματικά: προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τής (α) τόν $(-1)^\kappa\alpha_{\kappa+1}=(-1)^\kappa(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1})$ καί έχουμε:

$\alpha_1-\alpha_2+\ldots+(-1)^\kappa\alpha_{\kappa+1}=1+(-1)^{\kappa-1}\alpha_{\kappa-1}+(-1)^\kappa\alpha_\kappa+(-1)^\kappa\alpha_{\kappa-1}=1+(-1)^\kappa\alpha_\kappa$

δηλ. ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί $\forall\nu\in N\geqslant 3$.

β) Ή (2) γράφεται $(\alpha_{\nu+1}^3-\alpha_{\nu-1}^3)-4\alpha_\nu^3=3(-1)^\nu\alpha_\nu$ ή

$(\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu-1})(\alpha_{\nu+1}^2+\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}^2)-4\alpha_\nu^3=3(-1)^\nu\alpha_\nu$ ή έπειδή

$\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu-1}=\alpha_\nu$ ή $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}$ άπλοποιούντες γιά α_ν έχουμε:

$(\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1})^2+(\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1})\alpha_{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}^2-4\alpha_\nu^2=3(-1)^\nu$ ή μετά τίς πράξεις: $-\alpha_\nu^2+\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}=(-1)^\nu$ (4) πού ισχύει γιά ν=2. Έστω ότι αύτή ισχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ότι: $-\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa-1}^2+\alpha_\kappa\alpha_{\kappa-1}=(-1)^\kappa$ (β) θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αύτή ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ.

$$-\alpha_{\kappa+1}^2+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}\alpha_\kappa=(-1)^{\kappa+1} \qquad (5)$$

Ή (5) γράφεται: $-\alpha_{\kappa+1}^2+\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}\alpha_\kappa=-(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1})^2+\alpha_\kappa^2+(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1})\alpha_\kappa$ καί λόγω τής (β): $-(-\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa-1}^2+\alpha_\kappa\alpha_{\kappa-1})=-(-1)^\kappa=(-1)^{\kappa+1}$ δηλ. ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί $\forall\nu\in N\geqslant 3$.

114. Δίνεται ή άκολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu,\ldots$ πού $\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$ καί $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}$, $\nu>1$. Νά δειχτεί ότι $\alpha_{\nu+1}^2-\alpha_{\nu-1}^2=\alpha_{2\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=1 έχουμε $\alpha_{\nu+1}^2-\alpha_{\nu-1}^2=\alpha_2^2-\alpha_0^2=1-0=1$, $\alpha_{2\nu}=\alpha_2=1$ πού ισχύει. Έστω ότι ισχύει καί γιά ν=κ∈N δηλ. ότι $\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_{\kappa-1}^2=\alpha_{2\kappa}$. Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι: $\alpha_{\kappa+2}^2-\alpha_\kappa^2=\alpha_{2\kappa+2}$ (2) Έπειδή $\alpha_{2\kappa+2}=\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa-1}=2\alpha_{2\kappa}+\alpha_{2\kappa-1}=2\alpha_{2\kappa}+(\alpha_{2\kappa}-\alpha_{2\kappa-2})=3\alpha_{2\kappa}-\alpha_{2\kappa-2}$ δεχόμαστε ότι ισχύει καί γιά ν=κ-1 δηλ. ότι: $\alpha_\kappa^2-\alpha_{\kappa-2}^2=\alpha_{2\kappa-2}$ καί τότε γιά τήν άπόδειξη τής (2) άποδεικνύουμε ότι: $3\alpha_{2\kappa}-\alpha_{2\kappa-2}=\alpha_{\kappa+2}^2-\alpha_\kappa^2$ ή $3\left[\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_{\kappa-1}^2\right]-\left[\alpha_\kappa^2-\alpha_{\kappa-2}^2\right]=\alpha_{\kappa+2}^2-\alpha_\kappa^2$ ή

$3\alpha_{\kappa+1}^2-3\left[\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa\right]^2+\left[2\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1}\right]^2=(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})^2$ γιατί είναι:

$\alpha_{\kappa-1}=\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa$, $\alpha_{\kappa-2}=\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa-1}=\alpha_\kappa-(\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa)=2\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1}$ καί $\alpha_{\kappa+2}=\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa$ πού ισχύει. Άρα ισχύει $\forall\nu\in N$.

115. Δίνεται ή άκολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ όπου $\alpha_0=0,\alpha_1=1$ καί $\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu-1}=\frac{4\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}$ (1), $\nu>1$. Νά δειχτεί ότι:

α) $(\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}-1)+(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})^2=2$ (2)

β) ὁ α_ν εἶναι ρητός

γ) ὅτι ἡ παράσταση $1+4\alpha_\nu^2-\alpha_\nu^4$ εἶναι τέλειο τετράγωνο ρητοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀπόδειξη

α) Γιά $\nu=0$ ἡ (2) γίνεται: $(\alpha_0\alpha_1-1)^2+(\alpha_0-\alpha_1)^2=2$ γιατί $\alpha_0=0$ καί $\alpha_1=1$ δηλ. ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $(\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}-1)^2+(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})^2=2$ (3)

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$(\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+2}-1)^2+(\alpha_{\kappa+1}-\alpha_{\kappa+2})^2=2 \qquad (4)$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς (4) γράφεται:

$$\alpha_{\kappa+1}^2\alpha_{\kappa+2}^2-2\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+2}+1+\alpha_{\kappa+1}^2-2\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+2}+\alpha_{\kappa+2}^2=$$

$$=\alpha_{\kappa+2}^2(\alpha_{\kappa+1}^2+1)-4\alpha_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+2}+1+\alpha_{\kappa+1}^2=$$

$$=\alpha_{\kappa+2}\left[\alpha_{\kappa+2}(\alpha_{\kappa+1}^2+1)-4\alpha_{\kappa+1}\right]+1+\alpha_{\kappa+1}^2$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $\alpha_{\kappa+2}+\alpha_\kappa=\frac{4\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}^2+1}$ ἤ

$$\alpha_{\kappa+2}(\alpha_{\kappa+1}^2+1)=4\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa(\alpha_{\kappa+1}^2+1)$$

καί ἡ προηγούμενη γίνεται:

$$-\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+2}(\alpha_{\kappa+1}^2+1)+1+\alpha_{\kappa+1}^2=$$

$$=-\alpha_\kappa\left[\alpha_{\kappa+2}(\alpha_{\kappa+1}^2+1)\right]+1+\alpha_{\kappa+1}^2=$$

$$=-\alpha_\kappa\left[4\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa(\alpha_{\kappa+1}^2+1)\right]+1+\alpha_{\kappa+1}=$$

$$=-4\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa^2(\alpha_{\kappa+1}^2+1)+1+\alpha_{\kappa+1}^2=$$

$$=(\alpha_\kappa^2\alpha_{\kappa+1}^2-2\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}+1)+(\alpha_{\kappa+1}^2+\alpha_\kappa^2-2\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1})=$$

$$=(\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}-1)^2+(\alpha_\kappa-\alpha_{\kappa+1})^2=2 \quad \text{λόγω τῆς (3).}$$

β) Γιά $\nu=1$ ἀπό τήν (1) $\Longrightarrow \alpha_2=\frac{4\alpha_1}{\alpha_1^2+1}-\alpha_0=\frac{4}{2}-0=2\in Q.$

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $\alpha_3=\frac{4\alpha_2}{\alpha_1^2+1}-\alpha_1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}\in Q.$

Ἄν λοιπόν οἱ $\alpha_{\kappa-1}$ καί $\alpha_\kappa\in Q$ θά εἶναι καί ὁ $\alpha_{\kappa+1}\in Q$, γιατί:

$$\alpha_{\kappa+1}=\frac{4\alpha_\kappa}{\alpha_\kappa^2+1}-\alpha_{\kappa-1}$$

δηλ. ὁ $\alpha_{\kappa+1}$ ὁρίζεται ἀπό τούς $\alpha_{\kappa-1}$ καί α_κ μέ τήν βοήθεια ρητῶν πράξεων, ἄρα $\alpha_{\kappa+1}\in Q$.

γ) Ἡ (2) γράφεται: $\alpha_\nu^2+1(\alpha_\nu^2+1)-4\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}(\alpha_\nu^2+1)=2$ ἤ

$$\alpha_{\nu+1}^2-\alpha_{\nu+1}\cdot\frac{4\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}=\frac{1-\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu^2+1} \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha_{\nu+1}^2-\alpha_{\nu+1}\frac{4\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}+\left(\frac{2\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}\right)^2=\frac{1-\alpha_\nu^2}{1+\alpha_\nu^2}+\left(\frac{2\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}\right)^2 \quad \text{ἤ}$$

$$\left(\alpha_{\nu+1}-\frac{2\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}\right)^2=\frac{1+4\alpha_\nu^2-\alpha_\nu^4}{(\alpha_\nu^2+1)}.$$

Ἄρα ἡ $1+4\alpha_\nu^2-\alpha_\nu^4=\left[\left(\alpha_{\nu+1}-\frac{2\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2+1}\right)(\alpha_\nu^2+1)\right]^2$ εἶναι τέλειο τετράγωνο.

116 Δίνεται ἡ ἀκολουθία: $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+x_1}$, ..., $x_\nu=\sqrt{2+x_{\nu-1}}$, $\forall\nu\in N\geqslant 1$. Νά δειχτεῖ ὅτι: α) $x_\nu<\sqrt{2}$ (1) β) $2-x_\nu\leqslant\frac{2-x_1}{2^{\nu-1}}$ (2)

Ἀπόδειξη

α) Εἶναι φανερό ὅτι $x_2>x_1$. Θά δείξουμε ὅτι ἄν γιά $\nu=\kappa$ ἰσχύει ἡ (1) δηλ. $x_\kappa>x_{\kappa-1}$ (2), τότε θά ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Πράγματι ἄν στά μέλη τῆς (2) προσθέσουμε τό 2 ἔχουμε:

$$2+x_\kappa>2+x_{\kappa-1}\Longrightarrow\sqrt{2+x_\kappa}>\sqrt{2+x_{\kappa-1}}$$ δηλ. $x_{\kappa+1}>x_\kappa$ δηλ. θά ἰσχύει $\forall\nu\in N$. Ἄρα οἱ $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa$ προχωροῦν αὐξανόμενοι, δηλ.

$$x_1<x_2<x_3<\ldots<x_\nu<x_{\nu+1}$$

Ἐπειδή $x_\nu>0$, $x_{\nu+1}>0$ καί $x_{\nu+1}>x_\nu$ θά ἔχουμε: $x_{\nu+1}^2>x_\nu^2$ δηλ.

$$2+x_\nu>x_\nu^2\Longrightarrow x_\nu<2$$ δηλ. οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι μικρότεροι τοῦ 2.

β) Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $2-x_1\leqslant 2-x_1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $2-x_\kappa\leqslant\frac{2-x_1}{2^{\kappa-1}}$ (1). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι $2-x_{\kappa+1}\leqslant\frac{2-x_1}{2^\kappa}$ (2). Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $2-\frac{2-\sqrt{2}}{2^{\kappa-1}}\leqslant x_\kappa$

$$\Longrightarrow 4-\frac{2-\sqrt{2}}{2^{\kappa-1}}\leqslant 2+x_\kappa\Longrightarrow\sqrt{4-\frac{2-\sqrt{2}}{2^{\kappa-1}}}\leqslant\sqrt{2+x_\kappa}=x_{\kappa+1}\qquad(3)$$

Ἀπό τήν (2) ἔχουμε: $2-\frac{2-\sqrt{2}}{2^\kappa}\leqslant x_{\kappa+1}$ (4). Γιά νά δείξουμε τήν (4) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $2-\frac{2-\sqrt{2}}{2^\kappa}\leqslant\sqrt{4-\frac{2-\sqrt{2}}{2^{\kappa-1}}}\Leftrightarrow(\frac{\sqrt{2}-2}{2^\kappa})^2+2\frac{\sqrt{2}-2}{2^{\kappa-1}}\leqslant\frac{\sqrt{2}-2}{2^{\kappa-1}}\Leftrightarrow$

$$(\frac{\sqrt{2}-2}{2^\kappa})^2+\frac{\sqrt{2}-2}{2^{\kappa-1}}\leqslant 0\Longrightarrow\frac{\sqrt{2}-2}{2^\kappa}(\frac{\sqrt{2}-2}{2^\kappa}+2)\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}-2}{2}(\frac{\sqrt{2}-2+2^{\kappa+1}}{2^\kappa})\leqslant 0$$

πού ἰσχύει γιατί $\frac{\sqrt{2}-2}{2^\kappa}<0$. Ἄρα ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

117. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ τοῦ Fibonacci. Ἐάν $\kappa_0,\kappa_1,\ldots,\kappa_\nu,\ldots$ εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $x,y,x+y,\ldots$ στήν ὁποία κάθε ὅρος ἐκ τῶν τριῶν διαδοχικῶν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δύο προηγούμενων ὅρων, νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\kappa_\nu=\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu y\qquad(1)$$

Ἀπόδειξη

Ἔχουμε τίς ἀκολουθίες:

0	1	1	2	3	5	...
α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	
κ_0	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	
x	y	$x+y$	$x+2y$	$2x+3y$	$3x+5y$	

Ἀπό τή σχέση ἀντιστοιχίας γιά $\nu=1$ ἔχουμε ἀπό τήν (1):

$x_1=a_0x+a_1y=0x+1y=y$.

Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$. Θά δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$.

Πράγματι, από τήν υπόθεση έχουμε:

$$x_\kappa=a_{\kappa-1}x+a_\kappa y \quad (2) \quad \text{και} \quad x_{\kappa+1}=x_\kappa+x_{\kappa-1}.$$

Ακόμη $x_{\kappa-1}=x_{\kappa-2}x+x_{\kappa-1}y$ (3). Η (2) λόγω των (1) και (3) γίνεται: $x_{\kappa+1}=x(a_{\kappa-2}+a_{\kappa-1})+y(a_\kappa+a_{\kappa-1})$ ή $x_{\kappa+1}=xa_\kappa+y\beta_{\kappa+1}$ δηλ. ισχύει και για $\nu=\kappa+1$, άρα και $\forall\nu\in N$.

118. α) Αν $\alpha_\nu,\beta_\nu,\lambda>0$, $\alpha_\nu=\frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1}+\beta_{\nu-1})$ και $\alpha_\nu\beta_\nu=\lambda^2$ όπου $\nu\in Z^+$ και $\alpha_0>\beta_0$ νά δειχτεί ότι: $\alpha_{\nu-1}>\alpha_\nu>\lambda>\beta_\nu>\beta_{\nu-1}$

β) Αν δέ $\alpha_\nu=\lambda(1+\gamma_\nu)$ τότε $\gamma_\nu<\gamma_0^{2^\nu}$ μέ $\nu\in N$.

Απόδειξη

α) Είναι φανερό ότι $\alpha_1=\frac{1}{2}(\alpha_0+\beta_0)<\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_0)=\alpha_0$, όπότε $\alpha_0>\alpha_1$ (1)

Ακόμη $\alpha_1\beta_1=\lambda^2=\alpha_0\beta_0$ (2). Από τίς (1) και (2) $\Longrightarrow \alpha_0>\alpha_1>\lambda>\beta_1>\beta_0$.

Έστω ότι $\alpha_{\nu-2}>\alpha_{\nu-1}>\lambda>\beta_{\nu-1}>\beta_{\nu-2}$ (3). Θά δείξουμε ότι:

$$\alpha_{\nu-1}>\alpha_\nu>\lambda>\beta_\nu>\beta_{\nu-1} \quad (4).$$

Έχουμε: $\alpha_\nu=\frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1}+\beta_{\nu-1})<\frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-1})=\alpha_{\nu-1}$.

Από αύτή και τήν $\alpha_\nu\beta_\nu=\lambda^2=\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha_{\nu-1}>\alpha_\nu>\lambda>\beta_\nu>\beta_{\nu-1}$$

β) Επειδή $\alpha_\nu>\kappa$, έχουμε $\kappa(1+\gamma_\nu)>\kappa \Longrightarrow 1+\gamma_\nu>1\Longrightarrow\gamma_\nu>0$ (5)

Από τίς $2\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\beta_{\nu-1}$ και $\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}=\lambda^2$ παίρνουμε:

$$2\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\frac{\lambda^2}{\alpha_{\nu-1}} \Longrightarrow 2\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-1}^2+\lambda^2 \quad (6)$$

και επειδή $\alpha_\nu=\lambda(1+\gamma_\nu)$, έχουμε: $2\lambda(1+\gamma_\nu)\lambda(1+\gamma_{\nu-1})=\lambda^2(1+\gamma_{\nu-1})^2+\lambda^2$ ή

$$2(1+\gamma_\nu)+2\gamma_\nu(1+\gamma_{\nu-1})=1+2\gamma_{\nu-1}+\gamma_{\nu-1}^2+1 \quad (7)$$

Η (7) λόγω τής (5) δίνει: $\gamma_\nu<\gamma_{\nu-1}$ (8). Για $\nu=1$ έχουμε $\gamma_1<\gamma_0^2$ (9).

Η αποδεικτέα $\gamma_\nu<\gamma_0^{2^\nu}$ για $\nu=1$ δίνει τήν (9) δηλ. ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa-1$ δηλ. $\gamma_{\nu-1}<\gamma_0^{2^{\nu-1}}$ (10). Θά δείξουμε πώς ισχύει και για $\nu=\kappa$ δηλ. $\gamma_\kappa<\gamma_0^{2^\kappa}$. Από τίς (8) και (10) παίρνουμε $\gamma_\kappa<\gamma_{\kappa-1}^2<(\gamma_0^{2^{\kappa-1}})^2=$

$$=\gamma_0^{2\cdot 2^{\kappa-1}}=\gamma^{2^\kappa} \quad \text{ή} \quad \gamma_\kappa<\gamma_0^{2^\kappa}.$$

Άρα ή πρόταση ισχύει και για $\nu=\kappa$, άρα και $\forall\nu\in N$.

119. Αν $x_0=1$, $x_1=\alpha_1$, $y_0=0$ και $y_1=1$ και $\nu\in N\geq 2$, είναι δέ

$$x_\nu=\alpha_\nu x_{\nu-1}+x_{\nu-2} \quad \text{και} \quad y_\nu=\alpha_\nu y_{\nu-1}+y_{\nu-2},$$

νά δειχτεί ότι:

α) $x_{\nu+1}y_\nu-x_\nu y_{\nu+1}=(-1)^{\nu+1}$ (1)

β) $\frac{x_\nu}{y_\nu}=\alpha_1+\frac{1}{y_1y_2}-\frac{1}{y_2y_3}+\ldots+(-1)^\nu\frac{1}{y_{\nu-1}y_\nu}$ (2)

Απόδειξη

α) Γιά ν=2 έχουμε:

$$x_3y_2-x_2y_3=(\alpha_3x_2+x_1)(x_2y_1+y_0)-(\alpha_2x_1+x_0)(\alpha_3y_2+y_1)=$$

$$=(\alpha_3x_2+\alpha_1)\alpha_2-(\alpha_2\alpha_1+1)(\alpha_3y_2+1)=$$

$$=[\alpha_3(\alpha_2x_1+x_0)+\alpha_1]\alpha_2-(\alpha_1\alpha_2+1)[\alpha_3(\alpha_2y_1+y_0)+1]=$$

$$=[\alpha_3(\alpha_2\alpha_1+1)+\alpha_1]\alpha_2-(\alpha_1\alpha_2+1)(\alpha_2\alpha_3+1)=$$

$$=\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3-1=(-1)^3.$$

Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ότι: $x_{\kappa+1}y_\kappa-x_\kappa y_{\kappa+1}=(-1)^{\kappa+1}$

Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ότι:

$$x_{\kappa+2}y_{\kappa+1}-x_{\kappa+1}y_{\kappa+2}=(-1)^{\kappa+2}.$$

Πράγματι έχουμε: $x_{\kappa+2}y_{\kappa+1}-x_{\kappa+1}y_{\kappa+2}=(\alpha_{\kappa+2}x_{\kappa+1}-x_\kappa)y_{\kappa+1}-x_{\kappa+1}(\alpha_{\kappa+2}y_{\kappa+1}+y_\kappa)=$

$$=x_\kappa y_{\kappa+1}-x_{\kappa+1}y_\kappa=-(-1)^{\kappa+1}=(-1)^{\kappa+2}.$$

Άρα ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N≥2.

β) Έχουμε: $\frac{x_{\kappa+1}}{y_{\kappa+1}}-\frac{x_\kappa}{y_\kappa}=(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{y_\kappa y_{\kappa+1}}$ καί

$$\frac{x_\kappa}{y_\kappa}-\frac{x_{\kappa-1}}{y_{\kappa-1}}=(-1)^\kappa\frac{1}{y_\kappa y_{\kappa+1}}$$

Άρα: $\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(\frac{x_\kappa}{y_\kappa}-\frac{x_{\kappa-1}}{y_{\kappa-1}}\right)=\sum_{\kappa=2}^{\nu}(-1)^\kappa\frac{1}{y_\kappa y_{\kappa-1}}$ ή

$$\frac{x_\nu}{y_\nu}-\frac{x_1}{y_1}=\frac{1}{y_1y_2}-\frac{1}{y_2y_3}+\ldots+(-1)^\nu\frac{1}{y_{\nu-1}y_\nu}$$ ή

$$\frac{x_\nu}{y_\nu}=\alpha_1+\frac{1}{y_1y_2}-\frac{1}{y_2y_3}+\ldots+(-1)\frac{1}{y_{\nu-1}y_\nu}.$$

120. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu,\ldots$ πού $\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta+\frac{\gamma}{\beta})$, $\beta,\gamma>0$ καί $\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}(\alpha_\nu+\frac{\gamma}{\alpha_\nu})$ (1). Νά δειχτεί ότι:

$$\frac{\alpha_\nu-\sqrt{\gamma}}{\alpha_\nu+\sqrt{\gamma}}=\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}\right)^{2^{\nu-1}}\quad(2)\quad\forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Γιά ν=1 ή (2) γίνεται: $\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}=\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}\right)^{2^0}=\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}$ δηλ. ισχύει.

Έστω ότι ή (2) ισχύει γιά ν=κ δηλ. ότι: $\frac{\alpha_\kappa-\sqrt{\gamma}}{\alpha_\kappa+\sqrt{\gamma}}=\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}\right)^{2^{\kappa-1}}$ (3)

Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1.

Από τήν (2) $\Longrightarrow\alpha_{\kappa+1}=\frac{1}{2}(\alpha_\kappa+\frac{\gamma}{\alpha_\kappa})$ καί τότε:

$$\frac{\alpha_{\kappa+1}-\sqrt{\gamma}}{\alpha_{\kappa+1}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\frac{1}{2}(\alpha_\kappa+\frac{\gamma}{\alpha_\kappa})-\sqrt{\gamma}}{\frac{1}{2}(\alpha_\kappa+\frac{\gamma}{\alpha_\kappa})+\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha_\kappa^2+\gamma-2\alpha_\kappa\sqrt{\gamma}}{\alpha_\kappa^2+\gamma+2\alpha_\kappa\sqrt{\gamma}}=\left(\frac{\alpha_\kappa-\sqrt{\gamma}}{\alpha_\kappa+\sqrt{\gamma}}\right)^2$$ λόγω τῆς (3)

$$=\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}\right)^{2^{\kappa-1}}=\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\gamma}}{\alpha_1+\sqrt{\gamma}}\right)^{2^\kappa}.$$ Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

121. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_\nu=\frac{x+1}{x-1}\frac{x^{2^{\nu+1}}-1}{x^{2^{\nu+1}}+1}$ (1) $\forall\nu\in N\geq 0$ πού $\alpha_\nu=1+\frac{2}{x^{2\nu}+x^{-2\nu}}$ καί $x\neq 1$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται: $\alpha_0\alpha_1=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^4-1}{x^4+1}=\left(1+\frac{2}{x+x^{-1}}\right)\left(1+\frac{2}{x^2+x^{-2}}\right)=$

$=\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)\left(1+\frac{2x^2}{x^4+1}\right)=\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\right)\left(\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+1}\right)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\cdot\frac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=$

$=\frac{(x+1)^2(x^2+1)}{x^4+1}=\frac{(x^2+1)^2}{x^2-1}\cdot\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^4+1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^4-1}{x^4+1}$ δηλ. ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\kappa=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^{2^{\kappa+1}}-1}{x^{2^{\kappa+1}}+1}$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}=\frac{x+1}{x-1}\frac{x^{2^{\kappa+2}}-1}{x^{2^{\kappa+2}}+1}$$

Πράγματι εἶναι: $\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}=\frac{x+1}{x-1}\frac{x^{2^{\kappa+1}}-1}{x^{2^{\kappa+1}}+1}\left(1+\frac{2}{x^{2^{\kappa+1}}+x^{-2^{\kappa+1}}}\right)=$

$$\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{2^{\kappa+1}}-1}{x^{2^{\kappa+1}}+1}\cdot\frac{x^{2^{\kappa+2}}+1+2x^{2^{\kappa+1}}}{x^{2^{\kappa+2}}+1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{2^{\kappa+1}}-1}{x^{2^{\kappa+1}}+1}\cdot\frac{(x^{2^{\kappa+1}}+1)^2}{x^{2^{\kappa+2}}+1}=$$

$$\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x^{2^{\kappa+1}}-1)(x^{2^{\kappa+1}}+1)}{x^{2^{\kappa+2}}-1}-\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{2^{\kappa+2}}}{x^{2^{\kappa+2}}+1}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

122. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $(2+\sqrt{3})^\nu+(2-\sqrt{3})^\nu$ εἶναι ἀκέραιος $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4\in Z$ δηλ. ἰσχύει. Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $4+3+4\sqrt{3}+4+3-4\sqrt{3}=14\in Z$ δηλ. ἰσχύει

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa-2$ καί $\nu=\kappa-1$ ($\forall\kappa\in N$) δηλ. ὅτι:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{\kappa-2}+(2-\sqrt{3})^{\kappa-2}&=S_{\kappa-2}=\mu\in Z\\(2+\sqrt{3})^{\kappa-1}+(2-\sqrt{3})^{\kappa-1}&=S_{\kappa-1}=\mu'\in Z\end{aligned}\qquad(2)$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ δηλ. ὅτι:

$$S_\kappa=(2+\sqrt{3})^\kappa+(2-\sqrt{3})^\kappa=\text{ἀκέραιος} \quad (3)$$

Οἱ ἀριθμοί $x_1=2+\sqrt{3}$ καί $x_2=2-\sqrt{3}$ εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $x^2-4x+1=0$.

Ἄρα θά ἔχουμε $x_1^2-4x_1+1=0$ (4) $x_2^2-4x_2+1=0$ (5).

Πολ/ζουμε τίς (4) καί (5) ἀντίστοιχα μέ $x_1^{\kappa-2}$ καί $x_2^{\kappa-2}$ καί προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $(x_1^\kappa+x_2^\kappa)-1(x_1^{\kappa-1}+x_2^{\kappa-1})+(x_1^{\kappa-2}+x_2^{\kappa-2})=0$.

Θέτουμε $x_1^\kappa+x_2^\kappa=S_\kappa$ καί βρίσκουμε $S_\kappa-4S_{\kappa-1}+S_{\kappa-2}=0 \Longrightarrow S_\kappa=4S_{\kappa-1}-S_{\kappa-2}$.

Τότε λόγω τῆς (2) θά εἶναι: $S_\kappa=4\mu-\mu'$ πού $(\mu,\mu'\in Z)$. Ἄρα ὁ $S_\kappa\in Z$.

123. Ἄν x_1,x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης $x^2-2x-2=0$ (1), νά δειχτεῖ ὅτι:

α) $S_{2\nu+3}=8S_{2\nu+1}-4S_{2\nu-1}$

β) Ἄν $a_{2\nu+1}=(1+\sqrt{3})^{2\nu+1}+(1-\sqrt{3})^{2\nu+1}$ (1) νά δειχτεῖ ὅτι:

$a_{2\nu+3}=8a_{2\nu+1}-4a_{2\nu-1}$ (2) καί ὅτι ὁ $a_{2\nu+1}\in Z$,

γ) $a_{2\nu+1}=\text{πολ}.2^{\nu+1}$

Ἀπόδειξη

α) Πολ/ζουμε τήν (1) διαδοχικά ἐπί $x^{2\nu+1}$, $x^{2\nu}$, $x^{2\nu-1}$ καί βρίσκουμε:

$$x^{2\nu+3}-2x^{2\nu+2}-2x^{2\nu+1}=0$$
$$x^{2\nu+2}-2x^{2\nu+1}-2x^{2\nu}=0$$
$$x^{2\nu+1}-2x^{2\nu}-2x^{2\nu-1}=0$$

Ἀπό αὐτές μέ ἀπαλοιφή τῶν $x^{2\nu+2}$ καί $x^{2\nu}$ βρίσκουμε:

$$x^{2\nu+3}-8x^{2\nu+1}+4x^{2\nu-1}=0 \Longrightarrow x^{2\nu+3}=8x^{2\nu+1}-4x^{2\nu-1} \quad (3)$$

Ἀπό τήν (3) βρίσκουμε: $x_1^{2\nu+3}=8x_1^{2\nu+1}-4x_1^{2\nu-1}$ καί $x_2^{2\nu+3}=8x_2^{2\nu+1}-4x_2^{2\nu-1}$

Προσθέτοντας τίς δύο τελευταῖες ἰσότητες βρίσκουμε:

$$S_{2\nu+3}=8S_{2\nu+1}-4S_{2\nu-1}.$$

β) Θέτουμε $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$ καί τότε ἔχουμε $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=-2$.

Ἄρα οἱ x_1,x_2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $x^2-2x-2=0$. Ἄρα θά ἔχουμε:

$S_{2\nu+3}=8S_{2\nu+1}-4S_{2\nu-1}$ (4) ἤ ἐπειδή $S_{2\nu+3}=a_{2\nu+3}$, $S_{2\nu+1}=a_{2\nu+1}$, $S_{2\nu-1}=a_{2\nu-1}$ καί τότε ἡ (4) γράφεται $a_{2\nu+3}=8a_{2\nu+1}-4a_{2\nu-1}$.

γ) Ἄν ν=0 ἔχουμε ἀπό τήν (1) $a_1=2$, γιά ν=1 ἔχουμε $a_3=20=2\cdot10$.

Ἄρα γιά ν=0 καί ν=1 ἡ πρόταση ἰσχύει.

Ἔστω τώρα ὅτι εἶναι: $a_{2\nu+1}=2^{\nu+1}\kappa$, $a_{2\nu-1}=a_{2(\nu-1)+1}=2^\nu\lambda$. Τότε ἀπό τήν (4) ἔχουμε: $a_{2\nu+3}=a_{2(\nu+1)+1}=2^{\nu+2}(4\kappa-\lambda)$

124. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $a_0,a_1,a_2,\ldots$ πού $a_0=1$, $a_1=\frac{1}{2}$, καί

$$2(\nu+2)a_{\nu+2}-3\nu a_{\nu+1}+(\nu-1)a_\nu=0 \quad (1) \text{ γιά } \nu\geq0.$$

Νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha_\nu=\frac{1}{2^\nu}$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=0$ ἡ (1) γίνεται: $4\alpha_2-1\cdot\alpha_0=0 \Longrightarrow \alpha_2=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$, ἡ ὁποία ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. $\alpha_\kappa=\frac{1}{2^\kappa}$ καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $\alpha_{\kappa+1}=\frac{1}{2^{\kappa+1}}$. Ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι: $\alpha_{\kappa+2}=\frac{1}{2^{\kappa+2}}$.

Πράγματι ἔχουμε: $2(\kappa+2)\alpha_{\kappa+2}-3\kappa\cdot\frac{1}{2^{\kappa+1}}+(\nu-1)\frac{1}{2^\kappa}=0 \Longrightarrow$

$$2(\kappa+2)\alpha_{\kappa+2}=\frac{3\kappa}{2^\kappa\cdot 2}-\frac{\kappa-1}{2^\kappa}=\frac{1}{2^\kappa}\left(\frac{3\kappa}{2}-\kappa-1\right)=\frac{\kappa+2}{2^{\kappa+2}} \Longrightarrow \alpha_{\kappa+2}=\frac{1}{2^{\kappa+2}}.$$

125. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_0=3$, $\alpha_1=5$ καί $\alpha_\nu=4\alpha_{\nu-1}-3\alpha_{\nu-2}$ (1)
Νά δειχτεῖ ὅτι: $\alpha_\nu=3^\nu+2$ (2) $\forall\nu\in Z$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=0$ ἡ (2) γίνεται: $\alpha_0=3^0+2=3$ πού ἰσχύει. Ὁμοια καί γιά $\nu=1$. Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa-2$ καί $\nu=\kappa-1$ δηλ. ὅτι οἱ

$$\alpha_{\kappa-2}=3^{\kappa-2}+2 \qquad \text{καί} \qquad \alpha_{\kappa-1}=3^{\kappa-1}+2$$

γιά $\kappa\in N$ καί $\nu>2$ ἰσχύουν. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι: $\alpha_\kappa=3^\kappa+2$.

Ἔχουμε: $\alpha_\kappa=4\alpha_{\kappa-1}-3\alpha_{\kappa-2}=4(3^{\kappa-1}+2)-3(3^{\kappa-2}+2)=$

$=4\cdot 3^{\kappa-1}+8-3^{\kappa-1}-6=3^{\kappa-1}(4-1)+2=3^\kappa+2$.

126. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ πού $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-3}$ $\forall\nu\in N\geq 3$. Νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha_\nu\geq(\sqrt{2})^{\nu+1}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $\alpha_1=2\geq(\sqrt{2})^2$, γιά $\nu=2$ ἔχουμε $\alpha_2=3\geq(\sqrt{2})^2$ πού ἰσχύουν. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ καί $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_\kappa\geq(\sqrt{2})^{\kappa+1} \qquad \text{καί} \qquad \alpha_{\kappa+1}\geq(\sqrt{2})^{\kappa+2}.$$

θά δείξουμε πώς ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+2$ δηλ. $\alpha_{\kappa+2}\geq(\sqrt{2})^{\kappa+3}$.

Πράγματι: $\alpha_{\kappa+2}=\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa\geq(\sqrt{2})^{\kappa+2}+(\sqrt{2})^{\kappa+1}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι: $(\sqrt{2})^{\kappa+2}+(\sqrt{2})^{\kappa+1}>(\sqrt{2})^{\kappa+3} \Longrightarrow (\sqrt{2})^{\kappa+1}(\sqrt{2}+1)>(\sqrt{2})^{\kappa+1}(\sqrt{2})^2$

$\Longrightarrow \sqrt{2}+1>2$ πού ἰσχύει. Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

127. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ καί ὅτι $2\alpha_{\nu+2}=3\alpha_{\nu+1}+2\alpha_\nu$ $\forall\nu\in N$.
Νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha_\nu=2^{\nu-1}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ εἶναι $\alpha_1=2^{1-1}=1$, γιά $\nu=2$ εἶναι $\alpha_2=2^{2-1}=2$ πού ἰσχύουν.

Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa\in N$ και $\nu=\kappa+1$ δηλ. ότι $\alpha_\kappa=2^{\kappa-1}$ και $\alpha_{\kappa+1}=2^\kappa$. Θά δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+2$ δηλ. ότι: $\alpha_{\kappa+2}=2^{\kappa+1}$.

Πράγματι έχουμε: $2\alpha_{\kappa+2}=3\alpha_{\kappa+1}+2\alpha_\kappa=3\cdot 2^\kappa+2\cdot 2^{\kappa-1}=3\cdot 2^\kappa+2^\kappa=4\cdot 2^\kappa=2^{\kappa+2}$

$$\Rightarrow \alpha_{\kappa+2}=\frac{2^{\kappa+2}}{2}=2^{\kappa+1}.$$

Άρα ή (1) ισχύει $\forall\nu\in N$.

128. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ πού $\alpha_0=2$, $\alpha_1=3$ καί $\alpha_{\nu+1}=3\alpha_\nu-2\alpha_{\nu-1}$ $\forall\nu\in N$. Νά δειχτεῖ ότι $\forall\nu\in Z\geqslant 0$ είναι:

$$\alpha_\nu=2^\nu+1 \quad \text{καί ότι} \quad \alpha_\nu^2-2\alpha_\nu=\alpha_{2\nu}.$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=0$ είναι $2^\nu+1=2^0+1=2=\alpha_0$, γιά $\nu=1$ είναι $2^\nu+1=2+1=3=\alpha_1$. Άρα γιά $\nu=0$ καί $\nu=1$ είναι πράγματι $\alpha_\nu=2^\nu+1$. Θά δείξουμε ότι ἄν εἶναι: $\alpha_\kappa=2^\kappa+1$ καί $\alpha_{\kappa+1}=2^{\kappa+1}+1$ $(\kappa\in N\geqslant 0)$ θά εἶναι καί :

$$\alpha_{\kappa+2}=2^{\kappa+2}+1 \qquad (1)$$

Άπό τήν τελευταία τῶν (1) γιά $\nu=\kappa+1$ ἔχουμε: $\alpha_{\kappa+2}=3\alpha_{\kappa+1}-2\alpha_\kappa$ καί ἐπομένως ἐξ αἰτίας τῶν δύο πρώτων ἀκολουθεῖ:

$$\alpha_{\kappa+2}=3(2^{\kappa+1}+1)-2(2^\kappa+1)=3\cdot 2^{\kappa+1}+3-2^{\kappa+1}-2=$$
$$=2^{\kappa+1}(3-1)+1-2^{\kappa+1}2+1=2^{\kappa+2}+1 \qquad (3)$$

Άρα ή πρόταση ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα θά ισχύει $\forall\nu\in N\geqslant 0\in Z$.

Ἐπειδή $\alpha_\nu=2^\nu+1$ ἔχουμε $\alpha_\nu^2-2\alpha_\nu=\alpha_\nu(\alpha_\nu-2)=(2^\nu+1)(2^\nu+1-2)=(2^\nu+1)(2^\nu-1)$ $=(2^\nu)^2-1=\alpha_{2\nu}$.

129. Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\ldots$ πού $\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$ καί $\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ (1) μέ $\nu\in N$. Φτιάχνουμε τήν ακολουθία $\beta_0,\beta_1,\ldots$ πού $\beta_0=\alpha$, $\beta_1=\beta$ καί $\beta_{\nu+2}=\beta_{\nu+1}+\beta_\nu$ (2). Νά δειχτεῖ ότι:

$$\beta_\nu=\alpha_{\nu-1}\alpha+\alpha_\nu\beta \qquad (3)$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $\beta_1=\alpha_0\alpha+\alpha_1\beta=0\cdot\alpha+1\cdot\beta=\beta \Leftrightarrow \beta_1=\beta$. Γιά $\nu=2$ ἀπό τήν (3) ἔχουμε: $\beta_2=\alpha_1\alpha+\alpha_2\beta$, ἀπό δέ τήν (1) γιά $\nu=0$ ἔχουμε:

$$\alpha_2=\alpha_1+\alpha_0=1 \quad \text{δηλ.} \quad \beta_2=\alpha+\beta.$$

Άπό τήν (2) ἔχουμε γιά $\nu=0$, $\beta_2=\beta_1+\beta_0=\beta+\alpha$ πού ισχύει. Ἔστω ότι ἡ (3) ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ καί $\nu=\kappa+1$ δηλ. ότι:

$$\beta_\kappa=\alpha_{\kappa-1}\alpha+\alpha_\kappa\beta \quad (4) \quad \text{καί} \quad \beta_{\kappa+1}=\alpha_\kappa\alpha+\alpha_{\kappa+1}\beta \quad (5)$$

θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+2$ δηλ. ότι $\beta_{\kappa+2}=\alpha_{\kappa+1}\alpha+\alpha_{\kappa+2}\beta$ (6)

Προσθέτουμε τούς (4) καί (5) καί ἔχουμε:

$$\beta_{\kappa+1}+\beta_\kappa=(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1})\alpha+(\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa)\beta \Leftrightarrow \beta_{\kappa+2}=\alpha_{\kappa+1}\alpha+\alpha_{\kappa+2}\alpha.$$

130 Δίνεται ή ακολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ πού $\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$ καί $\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ (1) $\forall\nu\in N\geqslant 0$. Νά δειχτεῖ ὅτι:

α) $\alpha_{2\nu+1}=\alpha_\nu^2+\alpha_{\nu+1}^2$ (2)

β) $\alpha_{\nu+\lambda-1}=\alpha_\nu\alpha_{\lambda-1}+\alpha_{\nu+1}\alpha_\lambda$ (3) πού $\lambda\in N$.

Απόδειξη

α) Γιά $\nu=1$ ή (2) γίνεται: $\alpha_3=\alpha_2^2+\alpha_1^2$ (5) ἤ $\alpha_3=1+1=2$. Ἄρα ἡ (5) ἰσχύει. Γιά $\nu=2$ ἡ (2) δίνει $\alpha_5=\alpha_3^2+\alpha_2^2=2^2+1=2\alpha_3+\alpha_2=5$. Ἄρα ἡ (6) ἰσχύει. Ἄρα ἡ (2) ἰσχύει γιά $\nu=1$ καί $\nu=2$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ καί $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $\alpha_{2\kappa+1}=\alpha_\kappa^2+\alpha_{\kappa+1}^2$ καί $\alpha_{2\kappa+3}=\alpha_{\kappa+2}^2+\alpha_{\kappa+1}^2$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+2$ δηλ. ὅτι $\alpha_{2\kappa+5}=\alpha_{\kappa+3}^2+\alpha_{\kappa+2}^2$.

Ἔχουμε: $\alpha_{2\kappa+5}=\alpha_{2\kappa+4}+\alpha_{2\kappa+3}=\alpha_{2\kappa+3}+\alpha_{2\kappa+2}=3\alpha_{2\kappa+3}-\alpha_{2\kappa+1}=$

$=3\alpha_{\kappa+2}^2+3\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_\kappa^2-\alpha_{\kappa+1}^2=3\alpha_{\kappa+2}^2+2\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_\kappa^2=$

$=3\alpha_{\kappa+2}^2+2\alpha_{\kappa+1}^2-(\alpha_{\kappa+2}-\alpha_{\kappa+1})^2=3\alpha_{\kappa+2}^2+2\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_{\kappa+2}^2-\alpha_{\kappa+1}^2+2\alpha_{\kappa+2}\alpha_{\kappa+1}=$

$=2\alpha_{\kappa+2}^2+\alpha_{\kappa+1}^2+2\alpha_{\kappa+2}\alpha_{\kappa+1}=\alpha_{\kappa+2}^2+(\alpha_{\kappa+2}+\alpha_{\kappa+1})^2=\alpha_{\kappa+2}^2+\alpha_{\kappa+3}^2$.

β) Γιά $\lambda=1$ καί $\lambda=2$ ἡ (3) γίνεται

$$\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\alpha_0+\alpha_\nu\alpha_1,\quad \alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+1}\alpha_1+\alpha_\nu\alpha_2.$$

Οἱ ἰσότητες αὐτές ἰσχύουν γιά $\alpha_0=0$ καί $\alpha_1=\alpha_2=1$. Ἔστω ὅτι ἡ (3) ἰσχύει γιά $\lambda=\kappa\in N$ καί $\lambda=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_{\nu+\kappa-1}=\alpha_{\nu-1}\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\nu\alpha_\kappa \text{ καί } \alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu-1}\alpha_\kappa+\alpha_\nu\alpha_{\kappa+1}.$$

Θά δείξουμε πώς ἰσχύει καί γιά $\lambda=\kappa+2$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha_{\nu+\kappa+1}=\alpha_{\nu-1}\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\nu\alpha_{\kappa+2}\ .$$

Πράγματι ἔχουμε: $\alpha_{\nu+1+1}=\alpha_{\nu+\kappa}+\alpha_{\nu+\kappa-1}=\alpha_{\nu-1}\alpha_\kappa+\alpha_\nu\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\nu-1}\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\nu\alpha_\kappa=$

$=\alpha_{\nu-1}(\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa-1})+\alpha_\nu(\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa)=\alpha_{\nu-1}\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\nu\alpha_{\kappa+2}$.

131. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $\nu^{\text{ος}}$ ὅρος τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ πού $\alpha_1=\alpha_2=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ $\forall\nu\in Z\geqslant 3$ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu\right] \quad (1).$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=1,2$ ἔχουμε $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$. Ἔστω ὅτι εἶναι:

$$\alpha_{\kappa-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa-1}\right] \quad \text{ἤ}$$

$$2^{\kappa-1}\sqrt{5}\alpha_{\kappa-1}=(1+\sqrt{5})^{\kappa-1}-(1-\sqrt{5})^{\kappa-1} \quad (2)$$

καί $\alpha_{\kappa+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa+1}\right]\Rightarrow$

$$2^{\kappa+1}\sqrt{5}\alpha_{\kappa+1}=(1+\sqrt{5})^{\kappa+1}-(1-\sqrt{5})^{\kappa+1} \quad (4)$$

Πολ/ζουμε τίς (2) καί (3) ἀντίστοιχα μέ 2^2 καί 2 καί προσθέτοντας ἔ-

χουμε: $2^{\kappa+1}\sqrt{5}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)=(6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{\kappa+1}-(6-2\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{\kappa+1}\Longrightarrow$

$2^{\kappa+1}\sqrt{5}\alpha_{\kappa+1}=(1+\sqrt{5})^{\kappa+1}-(1-\sqrt{5})^{\kappa+1}$ δηλ. ή (4)

132. Αν $\nu\alpha_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-2}$ (1) για $\nu\geq 3$ και $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$ να δειχτεί ότι: $\alpha_\nu=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ (2)

Απόδειξη

Για $\nu=3$ και $\nu=4$ από την (2) έχουμε:

$$\alpha_3=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \alpha_4=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=\frac{3}{8}$$

και λόγω της (1) $3\alpha_3=1$ και $4\alpha_4=1+\frac{1}{2}$ δηλ. $\alpha_3=\frac{1}{3}$ και $\alpha_4=\frac{3}{8}$. Άρα η (2) ισχύει για $\nu=3$ και $\nu=4$. Έστω ότι η (2) ισχύει για $\nu=\kappa-1$ και $\nu=\kappa\in N\geq 4$. Θά δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$ δηλ. ότι:

$$\alpha_{\kappa+1}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{(\kappa+1)!}$$

Επειδή $\alpha_\kappa=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^\kappa\frac{1}{\kappa!}$ (3), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\alpha_{\kappa+1}=\alpha_\kappa+(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{(\kappa+1)!} \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{(\kappa+1)!}$$

Από την (1) για $\nu=\kappa\in N$ και $\nu=\kappa+1$ έχουμε: $\kappa\alpha_\kappa=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-2}$ και $(\kappa+1)\alpha_{\kappa+1}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-1}$.

Άρα: $\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-1}}{\kappa+1}-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-2}}{\kappa}=$

$$=\frac{\kappa(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-2})+\kappa\alpha_{\kappa-1}-\kappa(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-2})-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-2})}{\kappa(\kappa+1)}=$$

$$=\frac{\kappa\alpha_{\kappa-1}-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\kappa-2})}{\kappa(\kappa+1)}=\frac{\kappa\alpha_{\kappa-1}-\kappa\alpha_\kappa}{\kappa(\kappa+1)}=\frac{\alpha_{\kappa-1}-\alpha_\kappa}{\kappa+1},$$

Από την (3) και την $\alpha_{\kappa-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{\kappa-1}\frac{1}{(\kappa-1)!}$ έχουμε:

$$\alpha_\kappa=\alpha_{\kappa-1}+(-1)^\kappa\frac{1}{\kappa!}.$$

Άρα $\alpha_{\kappa-1}-\alpha_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{\kappa!}$. Άρα $\frac{\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa}{\kappa+1}=(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{(\kappa+1)!}$ και τότε λόγω της (4) $\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\frac{1}{(\kappa+1)!}$.

133. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu,\ldots$ με θετικούς όρους και ότι $\alpha_1=1$ (1) και $\alpha_{\nu+2}^2>\alpha_\nu\alpha_{\nu+2}$ (2) να δειχτεί ότι: $\sqrt[\nu+1]{\alpha_{\nu+2}}>\sqrt[\nu+2]{\alpha_{\nu+3}}$ (3) $\forall\nu\in N$. Με βάση αυτό να δειχτεί ότι $2>\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\ldots\sqrt[\nu]{\nu+1}\ldots$

Απόδειξη

Για $\nu=1$ η (2) δίνει $\alpha_2^2>\alpha_1\alpha_3$ δηλ. $\alpha_2^2>\alpha_3$ (4). Για $\nu=2$ η (2)

δίνει $\alpha_3^2>\alpha_2\alpha_4 \Longrightarrow \alpha_3^4>\alpha_2^2\alpha_3^2$ γιατί οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι θετικοί. Ἀπό αὐτήν καί τήν (4) πολ/ζοντες κατά μέλη βρίσκουμε

$\alpha_3^3>\alpha_4^2 \Longrightarrow \sqrt{\alpha_3}>\sqrt[3]{\alpha_4}$. Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει γιά ν=1.

Ἔστω ὅτι ἡ (3) ἰσχύει καί γιά ν=κ∈N, δηλ. ὅτι:

$$\sqrt[\kappa+1]{\alpha_{\kappa+2}}>\sqrt[\kappa+2]{\alpha_{\kappa+3}} \Longrightarrow \alpha_{\kappa+2}^{\kappa+2}>\alpha_{\kappa+3}^{\kappa+1} \qquad (5)$$

θά δείξουμε πώς ἡ (3) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. ὅτι:

$$\sqrt[\kappa+2]{\alpha_{\kappa+3}}>\sqrt[\kappa+3]{\alpha_{\kappa+4}} \Longrightarrow \alpha_{\kappa+3}^{\kappa+3}>\alpha_{\kappa+4}^{\kappa+2} \qquad (6)$$

Ἀπό τήν (5) ἔχουμε $\alpha_{\kappa+2}^{\kappa+2}\alpha_{\kappa+3}^{\kappa+3}>\alpha_{\kappa+3}^{\kappa+1}\alpha_{\kappa+3}^{\kappa+3}=\alpha_{\kappa+3}^{2(\kappa+2)}$ ἄρα $\alpha_{\kappa+3}^{\kappa+3}>\frac{\alpha_{\kappa+3}^{2(\kappa+2)}}{\alpha_{\kappa+2}^{\kappa+2}}$ (7)

Ἀπό τήν (2) γιά ν=κ+2 ἔχουμε: $\alpha_{\kappa+3}^2>\alpha_{\kappa+2}\alpha_{\kappa+1}$ καί ὑψώνοντας στή κ+2 δύναμη βρίσκουμε:

$$\alpha_{\kappa+3}^{2(\kappa+2)}>\alpha_{\kappa+2}^{\kappa+1}\cdot\alpha_{\kappa+4}^{\kappa+2} \Longrightarrow \frac{\alpha_{\kappa+3}^{2(\kappa+2)}}{\alpha_{\kappa+2}^{\kappa+2}}>\alpha_{\kappa+1}^{\kappa+2} \qquad (8)$$

Λόγω τῆς (8) ἡ (7) γίνεται $\alpha_{\kappa+3}^{\kappa+3}>\alpha_{\kappa+4}^{\kappa+2}$. Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει ∀ν∈N. Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, ... , $\alpha_\nu=\nu$ γιά τήν ὁποία ἰσχύουν οἱ (1) καί (2), γιατί $\alpha_{\nu+1}=\nu+2$, $\alpha_\nu=\nu$, $\alpha_{\nu+2}=\nu+2$ καί ἰσχύει $(\nu+1)^2>\nu(\nu+2)$. Ἄρα ἰσχύει καί ἡ (3). Ἐπειδή $\alpha_{\nu+2}=\nu+2$, $\alpha_{\nu+3}=\nu+3$ ἡ (3) γίνεται $\sqrt[\nu+1]{\nu+2}>\sqrt[\nu+2]{\nu+3}$. Ἀπό αὐτήν γιά ν=1,2,... παίρνουμε

$\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}$, ... , $\sqrt[\nu-1]{\nu}>\sqrt[\nu]{\nu+1}$, ἄρα θά εἶναι:

$2>\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\ldots>\sqrt[\nu-1]{\nu}>\sqrt[\nu]{\nu+1}$.

134. Ἄν οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\kappa\in Z$ καί $\alpha^2-\beta^2\gamma=4\kappa$ (1), νά δειχτεῖ ὅτι $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu$ εἶναι ἀκέραιο πολ/σιο τοῦ 2^ν ∀ν∈N.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε $S_1=(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})=2\alpha=2^1\cdot\alpha$ δηλ. ἰσχύει.

Γιά ν=2 ἔχουμε $S_2=(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^2+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^2=(2\alpha)^2-2(\alpha^2-\beta^2\gamma)=2(\alpha^2-\beta^2\gamma)$

ἤ λόγω τῆς (1) $S_2=2^2-2\cdot 4\kappa=2^2(\alpha^2-2\kappa)$.

Σχηματίζουμε τή δευτεροβάθμια ἐξίσωση μέ ρίζες $\alpha+\beta\sqrt{\gamma}$ καί $\alpha-\beta\sqrt{\gamma}$. Αὐτή εἶναι ἡ $x^2-2\alpha x+(\alpha^2-\beta^2\gamma)=0$ καί τότε ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2-2\alpha x_1+(\alpha^2-\beta^2\gamma)=0 \qquad (2)\\ x_2^2-2\alpha x_2+(\alpha^2-\beta^2\gamma)=0 \qquad (3)\end{aligned}\right\}$$

Πολ/ζουμε τήν (2) ἐπί x_1^ν καί τήν (3) ἐπί x_2^ν καί προσθέτοντας βρίσκουμε: $(x_1^{\nu+2}+x_2^{\nu+2})-2\alpha(x_1^{\nu+1}+x_2^{\nu+1})+(\alpha^2-\beta^2\gamma)(x_1^\nu+x_2^\nu)=0=S_{\nu+2}=$

$=2\alpha S_{\nu+1}-(\alpha^2-\beta^2\gamma)S_\nu \Longrightarrow S_{\nu+2}=2\alpha S_{\nu+1}-4\kappa S_\nu$ (4)

Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά ν=κ καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι $S_\kappa=$πολ.2^κ

και $S_{κ+1}=πολ.2^{κ+1}$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $ν=κ+2$.

Λόγω τῆς (4) ἔχουμε: $S_{κ+2}=2απολ.2^{κ+1}-4κπολ.2^{κ}=απολ.2^{κ+2}-κπολ.2^{κ+2}=$

$=(α-κ)πολ.2^{κ+2}=πολ.2^{κ+2}$.

Ἄρα ἰσχύει καί γιά $ν=κ+2$ ἄρα καί $\forall ν\in N$.

135. Δίνεται ὁ ἀριθμός $F(ν)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{ν}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{ν}\right]$ μέ $ν\in N$.

Ἀφοῦ δειχτεῖ ἡ σχέση $F(ν+1)=F(ν)+F(ν-1)$, νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός $F(ν)$ εἶναι ἀκέραιος $\forall ν\in Z$.

Ἀπόδειξη

Θέτουμε $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ καί $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ καί τότε $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=-1$, ἄρα

$$F(ν)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[x_1^{ν}-x_2^{ν}\right] \qquad (1)$$

Σχηματίζουμε ἐξίσωση μέ ρίζες τούς x_1 καί x_2 πού εἶναι ἡ $x^2-x-1=0$.

Τότε θά ἔχουμε: $\left.\begin{matrix}x_1^2-x_1-1=0\\ x_2^2-x_2-1=0\end{matrix}\right|$ $\begin{matrix}(α)\\(β)\end{matrix}$

Πολ/ζουμε τίς (α) καί (β) ἀντίστοιχα ἐπί $x_1^{ν-1}$ καί $x_2^{ν-1}$ καί ἔχουμε:

$\begin{matrix}x_1^{ν+1}-x_1^{ν}-x_1^{ν-1}=0\\ x_2^{ν+1}-x_2^{ν}-x_2^{ν-1}=0\end{matrix}$ Ἀφαιροῦντες αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε:

$$(x_1^{ν+1}-x_2^{ν+1})-(x_1^{ν}-x_2^{ν})-(x_1^{ν-1}-x_2^{ν-1})=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[x_1^{ν+1}-x_2^{ν+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{ν}-x_2^{ν})+\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{ν-1}-x_2^{ν-1}) \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε $F(ν+1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[x_1^{ν+1}-x_2^{ν+1}\right]$ καί $F(ν-1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[x_1^{ν-1}-x_2^{ν-1}\right]$

Λόγω τούτων ἡ (2) γίνεται: $F(ν+1)=F(ν)+F(ν-1)$. Ἀπό τήν (1) ἔχουμε $F(0)=0$ καί $F(1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1-x_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{2}=1$. Ἄρα ἡ $F(ν)$ γιά $ν=0$ καί $ν=1$ δίνει ἀκέραιο. Ἔστω ὅτι ἡ $F(ν)$ γιά $ν=κ-1$ καί $ν=κ$ δίνει ἀκέραιο. Τότε καί ἡ $F(ν+1)$ θά δίνει ἀκέραιο, σάν ἄθροισμα ἀκεραίων.

136. Ἄν $x+\frac{1}{x}=y$ καί $ν\in N$, νά δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση $f(ν)=x^{ν}+\frac{1}{x^{ν}}$ γράφεται μέ μορφή ἀκέραιου πολυωνύμου ὡς πρός y

Ἀπόδειξη

Γιά $ν=1$ καί $ν=2$ ἔχουμε ἀντίστοιχα:

$f(1)=x+\frac{1}{x}=y$ καί $f(2)=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=y^2-2$ δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $ν=1$ καί $ν=2$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει καί γιά $ν=κ$ καί $ν=κ+1$ δηλ. ὅτι: $x^{κ}+\frac{1}{x^{κ}}=φ(y)$ (1) καί $x^{κ+1}+\frac{1}{x^{κ+1}}=σ(y)$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $ν=κ+2$ δηλ. ὅτι $x^{κ+2}+\frac{1}{x^{κ+2}}=f(y)$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $x+\frac{1}{x}$ καί ἔχουμε

$$(x^{\kappa+1}+\frac{1}{x^{\kappa+1}})(x+\frac{1}{x})=x\sigma(y) \quad \text{ή} \quad x^{\kappa+2}+x^{\kappa}+\frac{1}{x^{\kappa}}+\frac{1}{x^{\kappa+2}}=x\sigma(y)$$

$$\Longrightarrow x^{\kappa+2}+\frac{1}{x^{\kappa+2}}=x\sigma(y)-(x^{\kappa}+\frac{1}{x^{\kappa}}) \quad \text{καί λόγω τῆς (1):}$$

$$x^{\kappa+2}+\frac{1}{x^{\kappa+2}}=x\sigma(y)-\varphi(y) \qquad (3)$$

Ἐπειδή τά $\sigma(y)$ καί $\varphi(y)$ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ y τό δεύτερο μέλος τῆς (3) εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ y καί ἡ (3) δείχνει ὅτι ἡ παράσταση $x^{\kappa+2}+\frac{1}{x^{\kappa+2}}$ γράφεται μέ μορφή ἀκέραιου πολυωνύμου ὡς πρός y. Ἐπειδή ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $\nu=1$, $\nu=2$ καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ καί $\nu=\kappa+1$ ($\kappa\in N$), ἐδείχθη ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+2$, συμπεραίνουμε ὅτι ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ ΤΟΥ CAUCHY.

137. Ἄν $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu\in R^+$ καί $\nu\in N\geq 2$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{x_1x_2\ldots x_\nu}\geq\frac{\nu}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}} \qquad (1)$$

Ἄλλη ἀπόδειξη τῆς ἀνίσωσης τοῦ Caychy.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}\Longrightarrow(x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2\Longrightarrow(x_1-x_2)^2\geq 0$

δηλ. ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ πρώτη ἀνίσωση ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{\kappa}\geq\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa} \qquad (1)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}}{\kappa+1}\geq\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa x_{\kappa+1}} \qquad (2)$$

Ἡ (1) γράφεται $x_1+x_2+\ldots+x_\kappa\geq\kappa\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}$ (2). Προσθέτουμε στά μέλη τῆς (2) τό $x_{\kappa+1}$ καί ἔχουμε: $x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}\geq x_{\kappa+1}+\kappa\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι:

$$x_{\kappa+1}+\kappa\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\geq(\kappa+1)\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa x_{\kappa+1}}\Longrightarrow$$

$$x_{\kappa+1}\geq(\kappa+1)\sqrt[\kappa+1]{x_1x_2\ldots x_\kappa}\cdot\sqrt[\kappa+1]{x_{\kappa+1}}-\kappa\cdot\sqrt[\kappa]{x_1x_2\ldots x_\kappa} \quad \text{ἤ}$$

$$(\sqrt[\kappa+1]{x_{\kappa+1}})^{\kappa+1}\geq(\kappa+1)^{\kappa}\sqrt[\kappa+1]{(x_1x_2\ldots x_\kappa)^{\kappa}}\sqrt[\kappa+1]{x_{\kappa+1}}-\kappa\sqrt[\kappa+1]{(x_1x_2\ldots x_\kappa)^{\kappa+1}}$$

(3).

Θέτουμε $\sqrt[\kappa(\kappa+1)]{x_1x_2\ldots x_\kappa}=\alpha$ καί $\sqrt[\kappa+1]{x_{\kappa+1}}=\beta$ καί τότε ἡ (3) γράφεται $\beta^{\kappa+1}\geq(\kappa+1)\alpha^{\kappa}\beta-\kappa\alpha^{\kappa+1}$ πού ἰσχύει (Ἰδέ ἀσκ.**80**)

Ἂν στήν ἀποδειγμένη θέσουμε ἀντί: $x_1=\frac{1}{x_1}$, $x_2=\frac{1}{x_2}$, ..., $x_\nu=\frac{1}{x_\nu}$ ἔχουμε:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_\nu}} \quad \text{ἢ}$$

$$\sqrt[\nu]{x_1x_2\ldots x_\nu}\geq\frac{\nu}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}}$$

138. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\sqrt[x+y]{x^xy^y}$ (1) ἄν $x,y\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν φυσικούς ἀριθμούς ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{x_1x_2\ldots x_\nu} \qquad (1)$$

Ἔστω ὅτι $\nu=x+y$ καί $x_1=x_2=\ldots=x_\mu=x$ καί $x_{\mu+1}=x_{\mu+2}=\ldots=x_\nu$.

Ἡ (1) γράφεται τότε:

$$\frac{\overbrace{(x+x+\ldots+x)}^{x\text{ προσθετέοι}}+\overbrace{(y+y+\ldots+y)}^{y\text{ προσθετέοι}}}{x+y}\geq\sqrt[x+y]{\overbrace{(x\cdot x\cdot\ldots\cdot x)}^{x\text{ παράγοντ.}}\overbrace{(y\cdot y\cdot\ldots\cdot y)}^{y\text{ παράγοντες}}}$$

$$\Rightarrow\frac{x\cdot x+y\cdot y}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\sqrt[x+y]{x^xy^y}$$

139. Ἂν $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$ πού $i=1,2,\ldots,\nu$ καί ὄχι ὅλοι ἴσοι μεταξύ τους νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}>\sqrt[\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu]{\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_\nu^{\beta_\nu}} \qquad (1)$$

(Γενίκευση τῆς ἀνίσωσης Cauchy).

Ἀπόδειξη

Ἐφαρμόζουμε τόν τύπο: $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$ καί ἔχουμε

$$\frac{\overbrace{(\alpha_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_1)}^{\beta_1\text{ προσθετέοι}}+\overbrace{(\alpha_2+\alpha_2+\ldots+\alpha_2)}^{\beta_2\text{ προσθετέοι}}+\ldots+\overbrace{(\alpha_\nu+\alpha_\nu+\ldots+\alpha_\nu)}^{\beta_\nu\text{ προσθετέοι}}}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}>$$

$$>\sqrt[\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu]{\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_\nu^{\beta_\nu}} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}\geqslant\sqrt[\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu]{\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_\nu^{\beta_\nu}}$$

Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καί ὅταν οἱ β_1, β_2, ... , β_ν εἶναι ρητοί θετικοί ἀριθμοί, γιατί ἄν θέσουμε: $\beta_1=\frac{\gamma_1}{\varepsilon}$, $\beta_2=\frac{\gamma_2}{\varepsilon}$, ..., $\beta_\nu=\frac{\gamma_\nu}{\varepsilon}$ ὅπου $\gamma_i,\varepsilon>0$ καί ἀκέραιοι γίνεται τότε:

$$\frac{\alpha_1\frac{\gamma_1}{\varepsilon}+\alpha_2\frac{\gamma_2}{\varepsilon}+\ldots+\alpha_\nu\frac{\gamma_\nu}{\varepsilon}}{\frac{\gamma_1}{\varepsilon}+\frac{\gamma_2}{\varepsilon}+\ldots+\frac{\gamma_\nu}{\varepsilon}} > (\alpha_1^{\gamma_1}\alpha_2^{\gamma_2}\ldots\alpha_\nu^{\gamma_\nu})^{\frac{1}{\frac{\gamma_1}{\varepsilon}+\frac{\gamma_2}{\varepsilon}+\ldots+\frac{\gamma_\nu}{\varepsilon}}}$$

$$\left(\alpha_1^{\frac{\gamma_1}{\varepsilon}}\alpha_2^{\frac{\gamma_2}{\varepsilon}}\ldots\alpha_\nu^{\frac{\gamma_\nu}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\nu}} =$$

$$\sqrt[\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\nu]{\alpha_1^{\gamma_1}\alpha_2^{\gamma_2}\ldots\alpha_\nu^{\gamma_\nu}} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\ldots+\alpha_\nu\gamma_\nu}{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\nu} \geqslant \sqrt[\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\nu]{\alpha_1^{\gamma_1}\alpha_2^{\gamma_2}\ldots\alpha_\nu^{\gamma_\nu}}$$

ἡ ὁποία ἰσχύει καθώς δείχτηκε πιό πάνω.

Ἀφοῦ ὅμως οἱ β_i εἶναι ρητοί, μποροῦμε νά θέσουμε στήν (1) $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu=1$ καί τότε ἔχουμε:

$$\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu > \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_\nu^{\beta_\nu}$$

140. Ἄν $x,y,\omega>0$ καί ὄχι ὅλοι ἴσοι μεταξύ τους, νά δειχτεῖ ὅτι: $(x+y)^{1/3}\cdot(\omega+z)^{1/3} > x^{1/3}\omega^{2/3}+y^{1/3}x^{2/3}$.

Ἀπόδειξη

Κατά τόν τύπο (1) τῆς ἄσκησης 138 ἔχουμε:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x+y}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\omega}{\omega+z}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} > \sqrt[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}]{\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1/3}\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{1/3}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{x+y}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\omega}{\omega+z} > \left(\frac{x}{x+y}\right)^{1/3}\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{2/3} \text{ καί}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{x+y}+\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{\omega+z} > \left(\frac{y}{x+y}\right)^{1/3}\left(\frac{z}{\omega+z}\right)^{1/3}$$

Προσθέτουμε τίς ἀνισώσεις αὐτές κατά μέλη καί βρίσκουμε:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3} > \frac{x^{1/3}\omega^{2/3}+y^{1/3}z^{2/3}}{(x+y)^{1/3}(\omega+z)^{2/3}} \Longrightarrow$$

$$(x+y)^{1/3}(\omega+z)^{2/3} > x^{1/3}\omega^{2/3}+y^{1/3}z^{2/3}.$$

141. Ἄν $x,y,z,\omega>0$ καί ὄχι ὅλοι ἴσοι μεταξύ τους, νά δειχτεῖ ὅτι: $x\omega^{y-z}+y\omega^{z-x}+z\omega^{x-y} > x+y+z$.

Απόδειξη

Κατά τόν τύπο (1) τῆς ἄσκησης 138 ἔχουμε:

$$\frac{x\omega^{y-z}+y\omega^{z-x}+z\omega^{x-y}}{x+y+z} > \sqrt[x+y+z]{x^{x(y-z)}y^{y(z-x)}z^{z(x-y)}} =$$

$$\sqrt[x+y+z]{x^{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)}} = 1$$

ἄρα καί $x\omega^{y-z}+y\omega^{z-x}+z\omega^{x-y} > x+y+z$.

142. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$(x+\nu)^{2\nu-1} > (x+1)(x+2)\ldots(x+2\nu-1) \quad \text{ἄν } x>0 \ \wedge \nu\in N.$$

Απόδειξη

Θεωροῦμε τούς ἀριθμούς $x+1, x+2, \ldots, x+2\nu-1$.

Αὐτοί εἶναι: $(x+2\nu-1)-(x+1)+1=2\nu-1$ πλήθους.

Ἐφαρμόζουμε σ'αὐτούς τήν ἀνίσωση Cauchy καί ἔχουμε:

$$\frac{(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+2\nu-1)}{2\nu-1} > \sqrt[2\nu-1]{(x+1)(x+2)\ldots(x+2\nu-1)}$$

$$\frac{(x+1+x+2\nu-1)(2\nu-1)}{2\nu-1} > \sqrt[2\nu-1]{(x+1)(x+2)\ldots(x+2\nu-1)} \Longrightarrow$$

$$(x+\nu) > \sqrt[2\nu-1]{(x+1)(x+2)\ldots(x+2\nu-1)} \Longrightarrow$$

$$(x+\nu)^{2\nu-1} > (x+1)(x+2)\ldots(x+2\nu-1)$$

143. Ἄν $x_1, x_2, \ldots, x_{2^\nu} > 0$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2^\nu}^2 \geqslant 2^\nu \sqrt[2^\nu]{x_1x_2\ldots x_{2^\nu}}$$

Απόδειξη

Κατά τήν ἀνίσωση Cauchy ἔχουμε:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2^\nu}^2}{2^\nu} \geqslant \sqrt[2^\nu]{x_1^2x_2^2\ldots x_{2^\nu}^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2^\nu}^2}{2^\nu} \geqslant (x_1x_2\ldots x_{2^\nu})^{2/2^\nu} = (x_1x_2\ldots x_{2^\nu})^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} \Longrightarrow$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2^\nu}^2}{2^\nu} \geqslant \sqrt[2^{\nu-1}]{x_1x_2\ldots x_{2^\nu}} \Longrightarrow$$

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2^\nu}^2 \geqslant 2^\nu \sqrt[2^{\nu-1}]{x_1x_2\ldots x_{2^\nu}}.$$

144. Νά δειχτεῖ ὅτι $3\nu(3\nu+1)^2 > \sqrt[3\nu]{1\cdot 2\cdot 3\ldots 3\nu}$ $\forall\nu\in N$

Απόδειξη

Ἐφαρμόζουμε τήν ἀνίσωση Cauchy γιά τούς ἀριθμούς $1, 2, 3, \ldots, 3$ καί βρίσκουμε:

$$\frac{1+2+3+\ldots+3\nu}{3\nu} > \sqrt[3\nu]{1\cdot 2\cdot 3\ldots 3\nu} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1+3\nu)3\nu}{2\cdot 3\nu} > \sqrt[3\nu]{1\cdot 2\cdot 3\ldots 3\nu} \qquad (1)$$

Υψώνουμε τά μέλη τῆς (1) στόν κύβο καί ἔχουμε:

$$\frac{(1+3\nu)^3}{8} > \sqrt[\nu]{1\cdot 2\cdot 3\ldots 3\nu} \Rightarrow (1+3\nu)^2\,\frac{1+3\nu}{8} > \sqrt[\nu]{1\ 2\ 3\ldots 3\nu}$$

Ἀλλά $3\nu > \frac{1+3\nu}{8}$ καί γιά ἕνα λόγο πιό πολύ θά ἔχουμε

$$3\nu(1+3\nu)^2 > \sqrt[\nu]{1\cdot 2\cdot 3\ldots 3\nu}.$$

145. Ἄν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in R^+$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1)(\alpha_4+\alpha_1+\alpha_3) > \left[\frac{3}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\right]^4$$

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1+\alpha_4+\alpha_1+\alpha_2}{4} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[4]{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1)(\alpha_4+\alpha_1+\alpha_3)} \Rightarrow$$

$$\frac{3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{4} \geqslant \sqrt[4]{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1)(\alpha_4+\alpha_1+\alpha_3)} \qquad (1)$$

Υψώνοντας τήν (1) στήν 4η δύναμη ἔχουμε τήν ἀποδεικτέα.

146. Ἄν x,y,z,ω ἄνισοι καί θετικοί ἀριθμοί καί $K=x+y+z+\omega$, νά δειχτεῖ ὅτι: $(K-x)(K-y)(K-z)(K-\omega) \geqslant 81xyz\omega$.

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
&\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \frac{(K-\omega)^3}{3^3} \geqslant xyz \Leftrightarrow (K-\omega)^3 \geqslant 3^3xyz\\
&\frac{x+y+\omega}{3} \geqslant \sqrt[3]{xy\omega} \Leftrightarrow \frac{(K-z)^3}{3^3} \geqslant xy\omega \Leftrightarrow (K-z)^3 \geqslant 3^3xy\omega\\
&\frac{x+z+\omega}{3} \geqslant \sqrt[3]{xz\omega} \Leftrightarrow \frac{(K-y)^3}{3^3} \geqslant xz\omega \Leftrightarrow (K-y)^3 \geqslant 3^3xz\omega\\
&\frac{y+z+\omega}{3} \geqslant \sqrt[3]{yz\omega} \Leftrightarrow \frac{(K-x)^3}{3^3} \geqslant yz\omega \Leftrightarrow (K-x)^3 \geqslant 3^3yz\omega
\end{aligned} \qquad (1)$$

Πολ/ζουμε τίς (1) κατά μέλη, ἐπειδή τά μέλη τους εἶναι θετικά καί βρίσκουμε:

$$[(K-\omega)(K-z)(K-y)(K-x)]^3 \geqslant [3^4xyz\omega]^3 \Rightarrow$$

$$(K-x)(K-y)(K-z)(K-\omega) \geqslant 3^4xyz\omega.$$

Στίς (1) τό = δέν ἰσχύει γιατί $x\neq y\neq z\neq\omega$.

147. Ἄν $x,y,z \in Z^+$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$x^{\frac{x}{x+y+z}} \cdot y^{\frac{y}{x+y+z}} \cdot z^{\frac{z}{x+y+z}} \geq \frac{x+y+z}{3}$$

Παίρνουμε x ποσότητες ίσες πρός $\frac{1}{x}$, y ποσότητες ίσες πρός $\frac{1}{y}$, καί z ποσότητες ίσες πρός $\frac{1}{z}$. Κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy θά ἔχουμε:

$$\frac{x\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{1}{y}+z\cdot\frac{1}{z}}{x+y+z} \geq \sqrt[x+y+z]{\frac{1}{x^x}\cdot\frac{1}{y^y}\cdot\frac{1}{z^z}} \Rightarrow \frac{3}{x+y+z} \geq \sqrt[x+y+z]{\frac{1}{x^x}\cdot\frac{1}{y^y}\cdot\frac{1}{z^z}} \Rightarrow$$

$$x^{\frac{x}{x+y+z}} \cdot y^{\frac{y}{x+y+z}} \cdot z^{\frac{z}{x+y+z}} \geq \frac{x+y+z}{3}.$$

148. Νά δειχτεῖ ὅτι $\forall \nu\in N$ εἶναι: $(\nu+2)^{\nu+1} > 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu+2)$.

Ἀπόδειξη

Ἐφαρμόζουμε τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy γιά τούς ἀριθμούς 2, 4,6,...,2ν+2 καί ἔχουμε:

$$\frac{2+4+6+\ldots+(2\nu+2)}{\nu+1} > \sqrt[\nu+1]{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu+2)} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{2+2\nu+2}{2}\right)(\nu+1)}{\nu+1} > \sqrt[\nu+1]{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu+2)} \Rightarrow$$

$$\nu+2 > \sqrt[\nu+1]{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu+2)} \Rightarrow (\nu+2)^{\nu+1} > 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu+2).$$

149. Ἄν $x,y,z\in Q^+$ καί τέτοιοι, ὥστε τό ἄθροισμα δύο ἀπό αὐτούς νά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τόν τρίτο, νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\left(1+\frac{y-z}{x}\right)^x \left(1+\frac{z-x}{y}\right)^y \left(1+\frac{x-y}{z}\right)^z \leq 1 \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη

Θέτουμε $x=\frac{\alpha}{\rho}$, $y=\frac{\beta}{\rho}$, $z=\frac{\gamma}{\rho}$ πού $\alpha,\beta,\gamma,\rho\in Z^+$. Τότε τό πρῶτο μέλος τῆς (1) γράφεται: $\left(1+\frac{y-z}{x}\right)^x \left(1+\frac{z-x}{y}\right)^y \left(1+\frac{x-y}{z}\right)^z = \sqrt[\rho]{\left(1+\frac{y-z}{x}\right)^\alpha \left(1+\frac{z-x}{y}\right)^\beta \left(1+\frac{x-y}{z}\right)^\gamma}$.

Ἐπειδή οἱ $\alpha,\beta,\gamma\in Z^+$ τό ὑπόρριζο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι γινόμενο α παραγόντων ἴσων πρός $1+\frac{y-z}{x}$, β παραγόντων ἴσων πρός $1+\frac{z-x}{y}$ καί γ παραγόντων ἴσων πρός $1+\frac{x-y}{z}$ ὁ καθένας. Ἄρα:

$$\sqrt[\alpha+\beta+\gamma]{\left(1+\frac{y-z}{x}\right)^\alpha \left(1+\frac{z-x}{y}\right)^\beta \left(1+\frac{x-y}{z}\right)^\gamma} \leq \frac{\alpha\left(1+\frac{y-z}{x}\right)+\beta\left(1+\frac{z-x}{y}\right)+\gamma\left(1+\frac{x-y}{z}\right)}{\alpha+\beta+\gamma} = 1 \qquad (2)$$

Ὑψώνοντας τά μέλη τῆς (2) στήν $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\rho}=x+y+z$ βρίσκουμε τήν ζητούμενη.

150. Νά δειχτεῖ ὅτι $(2\nu+1)y^\nu(1-y) < 1-y^{2\nu+1} \forall \nu\in N$ $0<y<1$.

Απόδειξη

Κατά τήν άνίσωση Cauchy γιά τούς 2ν+1 τό πλῆθος άριθμούς $1, y, y^2, \ldots, y^{2\nu}$ βρίσκουμε:

$$\frac{1+y+y^2+\ldots+y^{2\nu}}{2\nu+1} \geq \sqrt[2\nu+1]{1 y y^2 \ldots y^{2\nu}} =$$

$$\sqrt[2\nu+1]{y^{1+2+3+\ldots+2\nu}} = \sqrt[2\nu+1]{y^{\frac{2\nu(2\nu+1)}{2}}} = y^{\nu}$$

δηλ. $1+y+y^2+\ldots+y^{2\nu} > (2\nu+1)y^{\nu}$ (1) Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (1) έπί $1-y$ καί έχουμε $(2\nu+1)y^{\nu}(1-y) > (1-y)(1+y+y^2+\ldots+y^{2\nu}) = 1-y^{2\nu+1}$

151. Άν $\Sigma = x_1+x_2+\ldots+x_\nu > 0$ καί οί διαφορές $\Sigma-x_1, \Sigma-x_2, \ldots \Sigma-x_\nu > 0$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma-x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma-x_2} + \ldots + \frac{\Sigma}{\Sigma-x_\nu} > \frac{\nu^2}{\nu-1}$$

Απόδειξη

Θεωροῦμε τούς θετικούς άριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τέτοιους ὥστε:

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma}{\Sigma-x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\Sigma}{\Sigma-x_2}, \ldots, \alpha_\nu = \frac{\Sigma}{\Sigma-x_\nu}$$ καί έπειδή

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}}$$ έχουμε

$$\frac{\frac{\Sigma}{\Sigma-x_1}+\frac{\Sigma}{\Sigma-x_2}+\ldots+\frac{\Sigma}{\Sigma-x_\nu}}{\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{\Sigma-x_1}{\Sigma}+\frac{\Sigma-x_2}{\Sigma}+\ldots+\frac{\Sigma-x_\nu}{\Sigma}}$$ ἤ

$$\frac{\frac{\Sigma}{\Sigma-x_1}+\frac{\Sigma}{\Sigma-x_2}+\ldots+\frac{\Sigma}{\Sigma-x_\nu}}{\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{\nu\Sigma-\Sigma}{\Sigma}}$$ ἤ

$$\frac{\Sigma}{\Sigma-x_1}+\frac{\Sigma}{\Sigma-x_2}+\ldots+\frac{\Sigma}{\Sigma-x_\nu} \geq \frac{\nu^2}{\nu-1}$$

152. Άν $\alpha, \beta \in Q^+$ νά δειχτεῖ ὅτι: $\left(\frac{\alpha\beta+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \geq \beta^{\alpha}$.

Απόδειξη

Παίρνουμε α άκέραιους άριθμούς, πού καθένας τους νά εἶναι ἴσος μέ β, καί τήν μονάδα, δηλ. α+1 τό πλῆθος άριθμούς. Τότε:

$$\frac{\overbrace{\beta+\beta+\ldots+\beta}^{\alpha \text{ τό πλῆθος}}+1}{\alpha+1} \geq \sqrt[\alpha+1]{\underbrace{\beta\cdot\beta\ldots\beta}_{\alpha \text{ παράγοντες}}\cdot 1} \Rightarrow \frac{\alpha\beta+1}{\alpha+1} \geq \sqrt[\alpha+1]{\beta^{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha\beta+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \geqslant \beta^{\alpha}.$$

Αν $\alpha\in Q$, τότε αὐτός θά εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\nu}$ $(\mu,\nu\in N)$. Παίρνουμε τώρα μ ἀριθμούς, πού καθένας τους νά ἰσοῦται μέ β καί ν ἀριθμούς πού καθένας τους νά εἶναι ἴσος μέ 1. Θά ἔχουμε τώρα:

$$\left(\frac{\mu\beta+\nu\cdot 1}{\mu+\nu}\right)^{\mu+\nu} \geqslant \beta^{\mu}\cdot 1^{\nu} \quad (1).$$ Ἀλλά $\mu=\alpha\nu$, ἄρα:

$$\left(\frac{\alpha\nu\beta+\nu\cdot 1}{\alpha\nu+\nu}\right)^{\alpha\nu+\nu} \geqslant \beta^{\alpha\nu} \Rightarrow \left[\frac{\nu(\alpha\beta+1)}{\nu(\alpha+1)}\right]^{\nu(\alpha+1)} \geqslant \beta^{\alpha\nu} \Rightarrow \left(\frac{\alpha\beta+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \geqslant \beta^{\alpha}.$$

153. Ἄν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu\in R^+$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\left(\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} \geqslant \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_\nu^{\alpha_\nu}$$

Ἀπόδειξη

Γιά τούς θετικούς ἀριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ ἰσχύει ἡ γνωστή ἀνίσωση τοῦ Cauchy.

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geqslant \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}.$$

Ἔχουμε: $$\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} \geqslant \frac{\overbrace{\alpha_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_1}^{\alpha_1\text{ τό πλῆθος}}+\overbrace{\alpha_2+\alpha_2+\ldots+\alpha_2}^{\alpha_2\text{ τό πλῆθος}}+\ldots+\overbrace{\alpha_\nu+\alpha_\nu+\ldots+\alpha_\nu}^{\alpha_\nu\text{ τό πλῆθος}}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} \geqslant$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu \sqrt{\underbrace{\alpha_1\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_1}_{\alpha_1\text{ τό πλῆθος}}\ \underbrace{\alpha_2\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_2}_{\alpha_2\text{ τό πλῆθος}}\ \ldots\ \underbrace{\alpha_\nu\ \alpha_\nu\ \ldots\ \alpha_\nu}_{\alpha_\nu\text{ τό πλῆθος}}} =$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu \sqrt{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_\nu^{\alpha_\nu}} \Rightarrow \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} \geqslant \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu \sqrt{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_\nu^{\alpha_\nu}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} \geqslant \alpha_1^{\alpha_1}\cdot\alpha_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu^{\alpha_\nu}$$

154. Ἄν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\in R^+$ καί $A=\Sigma\alpha_i$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ νά δειχτεῖ ὅτι: $\Pi(A-\alpha_i) \geqslant (\nu-1)^\nu \Pi\alpha_i$.

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A-\alpha_1}{\nu-1}=\frac{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1} \geqslant \sqrt[\nu-1]{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu} \\ \frac{A-\alpha_2}{\nu-1}=\frac{\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1} \geqslant \sqrt[\nu-1]{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A-\alpha_\nu}{\nu-1}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-1}}{\nu-1} \geqslant \sqrt[\nu-1]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-1}} \end{array}\right\}$$

Πολ/ζοντες αύτές κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\frac{\Pi(A-\alpha_i)}{(\nu-1)^\nu}\geqslant\Pi\alpha_i \iff \Pi(A-\alpha_i)\geqslant(\nu-1)^\nu\Pi\alpha_i.$$

155. Αν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in R^+$, $\Sigma=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu-1}$ καί $\Sigma>x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ νά δειχτεῖ ὅτι: $\Pi x_i\geqslant(\nu-1)^\nu\Pi(\Sigma-\alpha_i)$ $\quad(i=1,2,\ldots,\nu)$

Απόδειξη

Θέτουμε $\Sigma-x_1=\kappa_1,\Sigma-x_2=\kappa_2,\ldots,\Sigma-x_\nu=\kappa_\nu$ (1) καί τότε θά εἶναι:

$$\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_{\nu-1}=(\nu-1)\Sigma-(x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}) \Longrightarrow$$

$$\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_{\nu-1}=x_\nu,\quad \kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_{\nu-2}+\kappa_\nu=x_{\nu-1}\ldots$$

$$\kappa_2+\kappa_3+\ldots+\kappa_\nu=x_1$$

Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned}
\kappa_\nu &=\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_{\nu-1}\geqslant(\nu-1)\sqrt[\nu-1]{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{\nu-1}}\\
\kappa_{\nu-1}&=\kappa_1+\ldots+\kappa_{\nu-2}+\kappa_\nu\geqslant(\nu-1)\sqrt[\nu-1]{\kappa_1\ldots\kappa_{\nu-2}\kappa_\nu}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\kappa_1 &=\kappa_2+\kappa_3+\ldots+\kappa_\nu\geqslant(\nu-1)\sqrt[\nu-1]{\kappa_2\kappa_3\ldots\kappa_\nu}
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Πολ/ζοντες τίς (2) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\Pi x_i\geqslant(\nu-1)^\nu\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_\nu \quad\text{δηλ.}\quad \Pi x_i\geqslant(\nu-1)^\nu\Pi(\Sigma-\alpha_i).$$

156. Αν $\nu\neq1$, $\nu\in N$, νά δειχτεῖ ὅτι $(\frac{\nu+1}{2})^\nu>\nu!>(\nu+1)^{\frac{\nu-1}{2}}$

Απόδειξη

Κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Caychy γιά τούς ἀριθμούς $1,2,\ldots,\nu$ ἔχουμε:

$$\frac{1+2+\ldots+\nu}{\nu}\geqslant\sqrt{1\cdot2\ldots\nu} \quad(1)\Longrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu}\geqslant\sqrt{\nu!}\Longrightarrow$$

$$\frac{\nu+1}{2}\geqslant\sqrt{\nu!}\Longrightarrow(\frac{\nu+1}{2})^\nu>\nu! \quad(2)$$

Πρέπει νά δείξουμε ὅτι $\nu!>(\nu+1)^{\frac{\nu-1}{2}}$ (3) $\iff$ $(\nu!)^2>(\nu+1)^{\nu-1}$ (4). Ἀρκεῖ νά δείξουμε τήν (4). Γιά $\nu=2$ ἡ (4) γίνεται $(2!)^2>3^{2-1}$ δηλ. $4>3$, πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (4) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. $(\kappa!)^2>(\kappa+1)^{\kappa-1}$ (3) θά δείξουμε ὅτι ἀληθεύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. $[(\kappa+1)!]^2>(\kappa+2)^\kappa$ (6) Ἐπειδή κατά τήν ὑπόθεση ἀληθεύει ἡ (5) τότε $(\kappa!)^2(\kappa+1)^2>(\kappa+1)^{\kappa+1}\Longrightarrow$ $[(\kappa+1)!]^2>(\kappa+1)^{\kappa+1}$. Γιά νά ἰσχύει ἡ (6) ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ

$$(\kappa+1)^{\kappa+1}>(\kappa+2)^\kappa\Longrightarrow(\frac{\kappa+1}{\kappa+2})^\kappa>\frac{1}{\kappa+1}\iff(1-\frac{1}{\kappa+2})^\kappa>\frac{1}{\kappa+1} \qquad(8)$$

Ἐπειδή $\frac{1}{\kappa+1}>0$ κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli ἔχουμε:

$$(1-\frac{1}{\kappa+2})^\kappa>1-\frac{\kappa}{\kappa+2}=\frac{2}{\kappa+2}.$$

Ἀπό τό ἄλλο μέρος ἔχουμε: $\frac{2}{\kappa+2}>\frac{1}{\kappa+1}$ (10), γιατί αὐτό εἶναι ἰσοδύ-

ναμο μέ $2(\kappa+1)>\kappa+2 \Longrightarrow 2\kappa+2>\kappa+2$ πού ἰσχύει.

Συγκρίνουμε τήν (9) μέ τήν (10) καί συμπεραίνουμε ὅτι:

$$(1-\frac{1}{\kappa+2})^{\kappa}>\frac{1}{\kappa+1} \quad \text{δηλ.} \quad (\frac{\kappa+1}{\kappa+2})^{\kappa}>\frac{1}{\kappa+1} \Longrightarrow$$

$$(\kappa+1)^{\kappa+1}>(\kappa+2)^{\kappa} \qquad (11) \qquad (11)$$

Ἀπό τίς (7) καί (11) συμπεραίνουμε $[(\kappa+1)!]^2>(\kappa+2)^{\kappa}$, πού εἶναι ἡ (6). Ἄρα λοιπόν ἡ δοσμένη ἰσχύει $\forall \nu\in N$.

157 Ἄν $x_\nu=\sqrt[\nu]{\nu}$ $\nu\in N$, νά δειχτεῖ ὅτι:

α) $x_\nu<1-\frac{2}{\nu}+\frac{2}{\sqrt{\nu}}$ $\forall \nu\geqslant 2$,

β) ἄν δέ $x\in R^+$ καί $x_\nu=\sqrt[\nu]{x}$ $\nu\in N$ θά εἶναι:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\nu x}}<x_\nu<1+\frac{x}{\nu} \quad \forall \nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

α) Κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\nu-2}+\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}}{\nu}>\sqrt[\nu]{\overbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}^{\nu-2}\cdot\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu}} \qquad \forall \nu\geqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu-2+2\sqrt{\nu}}{\nu}>\sqrt[\nu]{\nu} \Leftrightarrow x_\nu=\sqrt[\nu]{\nu}<\frac{\nu-2+2\sqrt{\nu}}{\nu} \Leftrightarrow x_\nu<\sqrt[\nu]{\nu}<1-\frac{2}{\nu}+\frac{2}{\sqrt{\nu}}$$

β) Κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1+x}^{(\nu-1)\text{προσθετ.}}}{\nu}\geqslant\sqrt[\nu]{\overbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}^{\nu-1}\cdot x}\geqslant\frac{\nu}{1+1+\ldots+1+\frac{1}{x}} \qquad \forall \nu\in N$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu-1+x}{\nu}>\sqrt[\nu]{x}\geqslant\frac{\nu}{\nu-1+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\nu}+\frac{x}{\nu}>\sqrt[\nu]{x}>\frac{1}{1-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu x}} \Leftrightarrow$$

$$1+\frac{x}{\nu}>x_\nu>\frac{1}{1+\frac{1}{\nu x}} \qquad \forall \nu\in N.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

Α ομαδα

158. Αν $\nu\in N$ καί $\alpha\in Z$ νά δειχτεῖ ὅτι ὁ:

$$\left[(\alpha+1)^{\nu}\ (\nu\alpha^{-1}-\alpha^{-2})+\alpha^{-2}\right]$$

εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Μέ βάση αὐτό νά δειχτεῖ ὅτι:

$$11^{\nu}(10\nu-1)+1=\text{πολ}.100.$$

Ἀπόδειξη

Ἔστω ὅτι $(\alpha+1)^{\nu}(\nu\alpha^{-1}-\alpha^{-2})+\alpha^{-2}=\lambda\quad(\lambda\in N)$, τότε θά εἶναι:

$$(\alpha+1)^{\nu}(\nu\alpha-1)+1=\lambda\alpha^2 \qquad (1)$$

Ἀρχικά τό πρῶτο μέλος τῆς (1) εἶναι ἀκέραιος, γιατί $\nu\in N$ καί $\alpha\in N$.

Ἄρα μένει νά δειχτεῖ ὅτι διαιρεῖται καί μέ α^2, δηλ. ὅτι:

$$(\alpha+1)^{\nu}(\nu\alpha-1)+1=\text{πολ}.\alpha^2 \qquad (2)$$

Γιά $\nu=1$ τό πρῶτο μέλος τῆς (2) γίνεται: $(\alpha+1)(\alpha-1)+1=\alpha^2$ δηλ. ἰσχύει ἡ (2). Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι:

$$(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1)+1=\text{πολ}.\alpha^2.$$

Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι: $(\alpha+1)^{\kappa+1}(\kappa\alpha+\alpha-1)+1=\text{πολ}.\alpha^2$ (3)

Τό πρῶτο μέλος τῆς (3) γράφεται:

$$(\alpha+1)^{\kappa+1}(\kappa\alpha-1+\alpha)+1=(\alpha+1)^{\kappa+1}(\kappa\alpha-1)+\alpha(\alpha+1)^{\kappa+1}+1=$$
$$(\alpha+1)(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1)+\alpha(\alpha+1)^{\kappa+1}+1=$$
$$\alpha(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1)+(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1)+1+\alpha(\alpha+1)^{\kappa+1}=$$
$$\alpha(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1+\alpha+1)+(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1)+1=$$
$$\left[\alpha(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha+\alpha)\right]+\left[(\alpha+1)^{\kappa}(\kappa\alpha-1)+1\right]=$$
$$\text{πολ}.\alpha^2+\text{πολ}.\alpha^2=\text{πολ}.\alpha^2$$

Ἄρα ἡ (2) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

Ἄν στήν (2) θέσουμε $\alpha=10$ βρίσκουμε: $11^{\nu}(10\nu-1)+1=\text{πολ}.100$.

159. Ἄν $A=\alpha^{4\kappa+1}-2^{2\kappa}-1$, $B=2^{2\lambda}+15\lambda-1$ μέ $(\kappa,\lambda)\in N$ νά δειχτεῖ ὅτι:

Α. $B=\text{πολ}.81$

Απόδειξη

Είναι $A=2\cdot 2^{4\kappa}-2^{2\kappa}-1=2^{4\kappa}-2^{2\kappa}+2^{4\kappa}-1=2^{2\kappa}(2^{2\kappa}-1)+(2^{2\kappa})^2-1=$

$=(2^{2\kappa}-1)(2^{2\kappa}+2^{2\kappa}+1)=(2^{2\kappa}-1)(2^{2\kappa+1}+1)$.

Ο $2^{2\kappa}-1$ διαιρείται διά τού $2^2-1=3$, ό δέ $2^{2\kappa+1}+1$ διαιρείται διά $2+1=3$. Άρα $A=$πολ.3.

Άν στήν $B=2^{2\lambda}+15\lambda-1$ θέσουμε $\lambda=1$, βρίσκουμε $B=18=$πολ.9. Έστω ότι άληθεύει ή $B=$πολ.9 διά $\lambda=\mu\in N$ δηλ. $2^{2\mu}+15\mu-1=$πολ.9 θά δείξουμε ότι άληθεύει καί γιά $\lambda=\mu+1$.

Πράγματι έχουμε: $2^{2(\mu+1)}+15(\mu+1)-1=2^{2\mu}\cdot 4+15\mu+15-1=$

$=3\cdot 2^{2\mu}+15+2^{2\mu}+15\mu-1=3(2^{2\mu}+5)+$πολ.9

Αλλά: $2^{2\mu}+5=4^{\mu}+5=(3+1)^{\mu}+5=$πολ.3+1+5=πολ.3+6=πολ.3.

Άρα $(2^{2\mu}+5)3+$πολ.9=πολ.9+πολ.9=πολ.9. Άρα $B=$πολ.9 $\forall\mu\in N$.

Άρα $A\cdot B=$πολ.9$\cdot$ πολ.9=πολ.81.

160. Νά δειχτεί ότι $\forall\nu\in N$ είναι:

$$2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)(\nu+1)=2^{\nu}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1) \qquad (1)$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=2$ ή (1) ισχύει. Έστω ότι ισχύει γιά $\nu=\kappa$. θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$.

Πολ/ζουμε καί τά δύο μέλη τής (1) έπί $2(2\kappa+1)$ καί έχουμε:

$$2(2\kappa+1)2\kappa(2\kappa-1)\ldots(\kappa+2)(\kappa+1)=$$

$$=2^{\kappa+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\kappa-1)\cdot(2\kappa+1) \quad \text{ή}$$

$$(2\kappa+2)(2\kappa+1)2\kappa(2\kappa-1)\ldots(\kappa+2)=2^{\kappa+1}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\kappa-1)(2\kappa+1)$$

Άρα ή (1) ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, άρα καί $\forall\in N\geq 2$.

161. Νά δειχτεί ότι: $2^{\nu}>\dfrac{\nu^2+\nu+2}{2}$ (1) $\forall\nu\in N\geq 3$.

Απόδειξη

Η (1) ισχύει γιά $\nu=3$. Έστω ότι ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ότι:

$$2^{\kappa}>\frac{\kappa^2+\kappa+2}{2} \qquad (2)$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ότι ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ότι

$$2^{\kappa+1}>\frac{(\kappa+1)^2+(\kappa+1)+2}{2} \qquad (3)$$

Πράγματι, άπό τήν (1) παίρνουμε: $2^{\kappa}\cdot 2>\kappa^2+\kappa+2 \implies 2^{\kappa+1}>\kappa^2+\kappa+2$ (4)

Αλλά $\kappa^2+\kappa+2>\dfrac{(\kappa+1)^2+(\kappa+1)+2}{2}$, γιατί είναι $2\kappa^2+2\kappa+4>\kappa^2+3\kappa+4 \implies \kappa^2>\kappa$.

Άρα έχουμε κατά τήν μεταβατική ιδιότητα ότι:

$$2^{\kappa+1}>\kappa^2+\kappa+2>\frac{(\kappa+1)^2+(\kappa+1)+2}{2}.$$

Άρα ή (2) ισχύει.

162. Αν οί πραγματικοί άριθμοί $x_1,x_2,\ldots,x_\nu,\ldots$ $(\nu\in\mathbb{N}>3)$ έπαληθεύουν τή σχέση

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{\nu-1}^2)(x_2^2+x_3^2+\ldots+x_\nu^2)=(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{\nu-1}x_\nu)^2 \quad (1)$$

νά δειχτεί ότι οί $x_i\neq 0$ $(i=1,2,3,\ldots,\nu)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Απόδειξη

Γιά $\nu=3$ από τήν (1) έχουμε: $(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)=(x_1x_2+x_2x_3)^2\Longrightarrow (x_2^2-x_1x_3)^2=0\Longrightarrow x_2^2=x_1x_3$. Άρα οί x_1,x_2,x_3 είναι διαδοχικοί όροι σέ μιά γεωμετρική πρόοδο.

Έστω τώρα ότι οί $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa$ $(\kappa\in\mathbb{N}\geqslant 3)$ είναι διαδοχικοί όροι σέ μιά γεωμετρική πρόοδο. Έστω $\lambda\neq 0$ ό λόγος τής προόδου.

Από τή σχέση (1) καί γιά $\nu=\kappa+1\geqslant 3$ έχουμε:

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{\kappa-1}^2+x_\kappa^2)(x_2^2+x_3^2+\ldots+x_\kappa^2+x_{\kappa+1}^2)=$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{\kappa-1}x_\kappa+x_\kappa x_{\kappa+1})^2 \quad (2)$$

καί έπειδή $x_2=x_1\lambda, x_3=x_1\lambda^2,\ldots,x_{\kappa-1}=x_1\lambda^{\kappa-2}, x_\kappa=x_1\cdot\lambda^{\kappa-1}$ ή (2) γίνεται:

$$\left[x_1^2(1+\lambda^2+\ldots+\lambda^{2\kappa-4})+x_1^2\lambda^{2\kappa-2}\right]\left[x_1^2\lambda^2(1+\lambda^2+\lambda^4+\ldots+\lambda^{2\kappa-4})+x_{\kappa+1}^2\right]=$$
$$\left[x_1^2\lambda(1+\lambda^2+\lambda^4+\ldots+\lambda^{2\kappa-4})+x_1\lambda^{\kappa-1}x_{\kappa+1}\right]^2\Longrightarrow$$
$$(x_1^2\Sigma+x_1^2\lambda^{2\kappa-2})(x_1^2\lambda^2\Sigma+x_{\kappa+1}^2)=(x_1^2\lambda\Sigma+x_1\lambda^{\kappa-1}a_{\kappa+1})^2 \quad (3)$$

πού $\Sigma=1+\lambda^2+\lambda^4+\ldots+\lambda^{2\kappa-4}$

Από τήν (3) έχουμε: $x_1^4\lambda^2\Sigma^2+x_1^4\lambda^{2\kappa}\cdot\Sigma+x_1^2x_{\kappa+1}^2\Sigma+x_1^2\lambda^{2\kappa-2}x_{\kappa+1}^2=$

$$=x_1^4\lambda^2\Sigma^2+x_1\lambda^{2\kappa-2}x_{\kappa+1}^2+2x_1^3\lambda^\kappa x_{\kappa+1}\Sigma\Longrightarrow$$
$$x_1^2\lambda^{2\kappa}+x_{\kappa+1}^2-2x_1\lambda^\kappa x_{\kappa+1}=0\Longrightarrow$$
$$(x_{\kappa+1}-x_1\lambda^\kappa)^2=0\Longrightarrow x_{\kappa+1}=x_1\lambda^\kappa.$$

Άρα οί $x_1,x_2,\ldots,x_\nu,\ldots$ σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο.

163. Νά δειχτεί ότι:

$$1+2(1-x)+3(1-x)(1-2x)+\ldots+\nu(1-x)(1-2x)\ldots\left[1-(\nu-1)x\right]+$$
$$+\frac{1}{x}(1-x)(1-2x)\ldots(1-\nu x)=\frac{1}{x} \quad (1) \quad \forall\nu\in\mathbb{N} \text{ καί } x\in\mathbb{Z}.$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=1$ ή (1) γίνεται $1+\frac{1}{x}(1-x)=\frac{1}{x}$, πού ισχύει. Έστω ότι ή (1) ισχύει γιά $\nu=\kappa\in\mathbb{N}$ δηλ. ότι:

$1+2(1-x)+\ldots+(1-x)(1-2x)\ldots[1-(\kappa-1)x]+\frac{1}{x}(1-x)(1-2x)\ldots(1-\kappa x)=\frac{1}{x}$ (2)

Μέ τήν προϋπόθεση (2) θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ.ὅτι

$1+2(1-x)+3(1-x)(1-2x)+\ldots+[1-(\kappa-1)x]+(\kappa+1)(1-x)(1-2x)\ldots(1-\kappa x)+$

$+\frac{1}{x}(1-x)(1-2x)\ldots(1-\kappa x)[1-(\kappa+1)x]=\frac{1}{x}$ (3)

Θέτουμε $S=1+2(1-x)+\ldots+(1-x)(1-2x)\ldots[1-(\kappa-1)x]$ καί

$S_1=(1-x)(1-2x)\ldots(1-\kappa x)$

καί τότε οἱ (2) καί (3) γράφονται ἀντίστοιχα

$S+\frac{1}{x}S_1=\frac{1}{x}$, $S+(\kappa+1)S_1+\frac{1}{x}S_1[1-(\kappa+1)x]=\frac{1}{x}$.

Ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$S+\frac{1}{x}S_1=S+(\kappa+1)S_1+\frac{1}{x}S_1[1-(\kappa+1)x]$ ἤ

$\frac{1}{x}S_1=(\kappa+1)S_1+\frac{1}{x}S_1-\frac{1}{x}S_1(\kappa+1)x$ πού ἰσχύει

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

164. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\sqrt[\nu]{2^{\nu+1}}-\sqrt[\nu]{\nu+1}>\sqrt[\nu]{\nu^{1-\nu}+\nu^{-\nu}}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Τό δεύτερο μέλος τῆς (1) γίνεται:

$$\sqrt[\nu]{\nu^{1-\nu}+\nu^{-\nu}}=\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu^{\nu-1}}+\frac{1}{\nu^{\nu}}}=\sqrt[\nu]{\frac{\nu}{\nu^{\nu}}+\frac{1}{\nu^{\nu}}}=\sqrt[\nu]{\frac{\nu+1}{\nu^{\nu}}}=\frac{1}{\nu}\sqrt[\nu]{\nu+1}$$

Ἄρα ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\sqrt[\nu]{2^{\nu+1}}-\sqrt[\nu]{\nu+1}>\frac{1}{\nu}\sqrt[\nu]{\nu+1}\iff 2\sqrt[\nu]{2}-\sqrt[\nu]{\nu+1}>\frac{1}{\nu}\sqrt[\nu]{\nu+1}$$

$$\iff 2\nu\sqrt[\nu]{2}-\nu\sqrt[\nu]{\nu+1}>\sqrt[\nu]{\nu+1}\iff 2\nu\sqrt[\nu]{2}>(\nu+1)\sqrt[\nu]{\nu+1}$$

$$\iff\frac{2\nu}{\nu+1}>\frac{\sqrt[\nu]{\nu+1}}{\sqrt[\nu]{2}}\iff\left(\frac{2\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}>\frac{\nu+1}{2}\quad(1)$$

Ἀλλά $\frac{2\nu}{\nu+1}=\frac{(\nu+1)+(\nu-1)}{\nu+1}=1+\frac{\nu-1}{\nu+1}$. Ἄρα κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Bernoulli ἔχουμε: $(1+\frac{\nu-1}{\nu+1})^{\nu}>1+\nu(\frac{\nu-1}{\nu+1})=\frac{\nu^2+1}{\nu+1}$. Γιά νά δείξουμε λοιπόν τήν (1)ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $\frac{\nu^2+1}{\nu+1}>\frac{\nu+1}{2}\iff 2(\nu^2+1)>(\nu+1)^2\Longrightarrow(\nu-1)^2>0$ πού ἰσχύει.

165. Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in R^+$ καί $\Sigma_\nu=x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ νά δειχτεῖ ὅτι: $(\nu-1)(\Sigma_\nu)^{\nu}\geq\nu^{\nu}\Pi(\Sigma_\nu-\alpha_i)$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$.

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^{\nu}\geq\nu^{\nu}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha\quad(1).$$

Θέτουμε: $x_i=\frac{\Sigma_\nu-x_i}{\nu-1}$ στήν (1) καί βρίσκουμε:

$$\left|\Sigma\frac{\Sigma_\nu-x_i}{\nu-1}\right|^\nu\geqslant\nu^\nu\cdot\frac{\Pi(\Sigma_\nu-x_i)}{(\nu-1)^\nu}\Rightarrow\left|\frac{\nu\Sigma_\nu-\Sigma_\nu}{\nu-1}\right|^\nu\geqslant\nu^\nu\cdot\frac{\Pi(\Sigma_\nu-x_i)}{(\nu-1)^\nu}\Rightarrow$$

$$\frac{(\nu-1)^\nu(\Sigma_\nu)^\nu}{(\nu-1)}\geqslant\nu^\nu\cdot\frac{\Pi(\Sigma_\nu-x_i)}{(\nu-1)}\Rightarrow(\nu-1)^\nu(\Sigma_\nu)^\nu>\nu^\nu\Pi(\Sigma_\nu-x_i).$$

166. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\left|\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2(x+2)}{x^2+2}+\frac{3(x+3)}{x^2+3}+\ldots+\frac{\nu(x+\nu)}{x^2+\nu}\right|\leqslant\frac{\nu(\nu+1)}{2|x|}\quad(1)\quad\forall|x|\leqslant1$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται: $\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|<\frac{1}{|x|}\Rightarrow|x^2+x|<|x^2+1|$ (2)

Γιά νά ἰσχύει ἡ (2) πρέπει $-(x^2+1)<x^2+x<x^2+1$ (3). Τό δεύτερο μέρος αὐτῆς $x^2+x<x^2+1$ δίνει $x\leqslant1$ πού ἰσχύει, γιατί ἀπό τήν $|x|\leqslant1\Rightarrow$ $-1\leqslant x\leqslant1$. Τό πρῶτο μέλος της $-(x^2+1)\leqslant x^2+x$ γίνεται $2x^2+x+1\geqslant0$ (4). Ἡ (4) ἰσχύει, γιατί τό τριώνυμο $2x^2+x+1$ ἔχει ρίζες φανταστικές. Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει, ἄρα καί ἡ (2).

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ δηλ. ὅτι

$$\left|\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2(x+2)}{x^2+2}+\ldots+\frac{\kappa(x+\kappa)}{x^2+\kappa}\right|\leqslant\frac{\kappa(\kappa+1)}{2|x|}\qquad(5)$$

θά δείξουμε πώς ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\left|\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2(x+2)}{x^2+2}+\ldots+\frac{\kappa(x+\kappa)}{x^2+\kappa}+\frac{(\kappa+1)(x+\kappa+1)}{x^2+\kappa+1}\right|\leqslant\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2|x|}\qquad(6)$$

Ἄν ἀντί τῆς (5) δείξουμε πώς:

$$\left|\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2(x+2)}{x^2+2}+\ldots+\frac{\kappa(x+\kappa)}{x^2+\kappa}\right|+\left|\frac{(\kappa+1)(x+\kappa+1)}{x^2+\kappa+1}\right|\leqslant\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2|x|}\qquad(7)$$

Τότε κατά τή μεταβατική ἰδιότητα θά ἰσχύει ἡ (6).

Ἄν ἀντί τοῦ πρώτου ἀπόλυτου τῆς (7) βάλουμε λόγω τῆς (5) τό $\frac{\kappa(\kappa+1)}{2|x|}$ καί δείξουμε τήν καινούργια ἀνίσωση τότε κατά τήν μεταβατική ἰδιότητα θά ἰσχύει ἡ (6). Ἀρκεῖ λοιπόν νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{\kappa(\kappa+1)}{2|x|}+\left|\frac{(\kappa+1)(x+\kappa+1)}{x^2+\kappa+1}\right|\leqslant\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2|x|}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{x+\kappa+1}{x^2+\kappa+1}\right|\leqslant\frac{\kappa+2}{2|x|}-\frac{\kappa}{2|x|}=\frac{2}{2|x|}\quad\text{ἤ}\quad\left|\frac{x+\kappa+1}{x^2+\kappa+1}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}\Rightarrow$$

$$|x^2+(\kappa+1)x|\leqslant|x^2+\kappa+1|\qquad(8)$$

Ἡ (8) ἰσχύει γιατί ἀπό τήν $|x|\leqslant1\Rightarrow-1\leqslant x\leqslant1$, ἄρα καί

$$(\kappa+1)x\leqslant\kappa+1\Rightarrow x^2+(\kappa+1)x<x^2+\kappa+1.$$

Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

167. Νά δειχτεῖ ὅτι τό γινόμενο ν διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαιρεῖται μέ τό ν!.

Ἀπόδειξη

Ἔστω α+1,α+2,...α+ν, ν διαδοχικοί ἀριθμοί. Θά δείξουμε ὅτι $(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\nu)=\pi\text{ολ}.\nu!$ (1) μέ $\alpha\in Z$.

Γιά ν=2 ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς εἶναι πολ/σιο τοῦ 2, ἄρα ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=2. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά κ παράγοντες δηλ.

$$(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\kappa)=\pi\text{ολ}.\kappa! \qquad (2)$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά κ+1 παράγοντες δηλ. ὅτι:

$$(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\kappa)(\alpha+\kappa+1)=\pi\text{ολ}.(\kappa+1)! \qquad (3)$$

Ἀπό τήν (2) ἔχουμε:

$$(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\kappa)(\kappa+1)=\pi\text{ολ}.(\kappa+1)! \qquad (4)$$

Στήν (4) θέτουμε κ+1=(α+κ+1)-α καί ἔχουμε:

$$(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\kappa)(\alpha+\kappa+1)-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\kappa)=\pi\text{ολ}.(\kappa+1)!$$

Ἄρα $(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\kappa)(\alpha+\kappa+1)=\pi\text{ολ}.(\kappa+1)!$

Ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει $\forall\alpha\in Z$.

168. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{1}{\log_x 2\ \log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\ \log_x 8}+...+\frac{1}{\log_x 2^{\nu-1}\cdot\log_x 2^{\nu}}=$$

$$=\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\log_x^2 2} \qquad (1) \qquad \text{γιά } \forall\nu\in N>1.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=2 ἡ (1) γίνεται: $\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2^2}=\frac{1}{2\log_x^2 2}$

καί $\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\log_x^2 2}=\frac{1}{2\log_x^2 x^2}$ πού ἰσχύει

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ. Θά δείξουμε ὅτι ἀληθεύει καί γιά ν=κ+1. Ἄν μέ S_ν παραστήσουμε τό πρῶτο μέλος τῆς (1) γιά ν=κ θά ἔχουμε: $S_{\kappa+1}=S_\kappa+\frac{1}{\log_x 2^{\kappa}\cdot\log_x 2^{\kappa+1}}=\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}+\frac{1}{\log_x 2^{\kappa}\cdot\log_x 2^{\kappa+1}}=$

$$=\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\frac{1}{\log_x^2 2}+\frac{1}{\kappa(\kappa+1)}\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}=\left[\frac{\kappa-1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa(\kappa+1)}\right]\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{\kappa+1}\right)-\frac{1}{\log_x^2 2}.$$ Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N>1$.

169. Ἄν $\alpha\in Z$ καί $\nu\in N$ νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός

$$\alpha^{\nu+1}-\alpha(\nu+1)+\nu$$

είναι διαιρετός μέ δύναμη τοῦ $\alpha-1$, τῆς ὁποίας νά βρεθεῖ ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $\alpha^2-2\alpha+1=(\alpha-1)^2$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$\alpha^{\kappa+1}-\alpha(\kappa+1)+\kappa=\pi o\lambda.(\alpha-1)^x \qquad (1)$$

Θά δείξουμε ὑπό τήν προϋπόθεση αὐτή, ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι:

$$\alpha^{\kappa+2}-\alpha(\kappa+2)+(\kappa+1)=\pi o\lambda.(\alpha-1)^x \qquad (2)$$

Ἡ (2) γράφεται $\alpha^{\kappa+2}-\alpha(\kappa+1)+\kappa-\alpha+1$ καί λόγω τῆς (1):

$$\alpha^{\kappa+2}+\pi o\lambda.(\alpha-1)^x-\alpha^{\kappa+1}-\alpha+1=$$
$$\alpha^{\kappa+1}(\alpha-1)-(\alpha-1)+\pi o\lambda.(\alpha-1)^x=$$
$$(\alpha-1)(\alpha^{\kappa+1}-1)+\pi o\lambda.(\alpha-1)^x=$$
$$(\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha^\kappa+\alpha^{\kappa-1}+\ldots+1)+\pi o\lambda.(\alpha-1)^x=$$
$$(\alpha-1)^2(\text{θετικός ἀριθμός})+(\alpha-1)^x=$$
$$(\alpha-1)^x\left[\rho+(\alpha-1)^{2-x}.\ \text{θετικό}\right].$$

Γιά νά εἶναι ὁ $(\alpha-1)^{2-x}$ θετικός πρέπει $2-x\geq 0 \Longrightarrow x\leq 2$. Ἄρα $x_{max}=2$.

170. Νά δειχτεῖ ὅτι $\nu^7-\nu=\pi o\lambda.42 \quad (1)\ \forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$, καί $\nu=2$ ἡ (1) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι: $\kappa^7-\kappa=\pi o\lambda.42$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι $(\kappa+1)^7-(\kappa+1)=\pi o\lambda.42$ (3).

Ἀπό τήν (3) ἔχουμε: $\kappa^7+7\kappa^6+21\kappa^5+35\kappa^4+35\kappa^3+21\kappa^2+7\kappa+1-\kappa-1=$

$$=(\kappa^7-\kappa)+7\kappa(\kappa^5+3\kappa^4+5\kappa^3+5\kappa^2+3\kappa+1)$$

ἤ λόγω τῆς (2) $\pi o\lambda.42+7\kappa(\kappa+1)(\kappa^2+\kappa+1)$.

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δειχτεῖ ὅτι $\kappa(\kappa+1)(\kappa^2+\kappa+1)^2=\pi o\lambda.6\ \forall\nu\in N$ (4).

Ἀλλά $\kappa(\kappa+1)=\pi o\lambda.2\ \forall\kappa\in N$, ὁπότε ἀντί τῆς (4) ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι $\kappa(\kappa+1)\cdot(\kappa^2+\kappa+1)^2=\pi o\lambda.3\ \forall\kappa\in N$ (5).

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ἄν $\kappa=3\rho$ τότε ἡ (5) γίνεται $3\rho(3\rho+1)(9\rho^2+3\rho+1)^2=\pi o\lambda.3$ πού ἰσχύει.

β) Ἄν $\kappa=3\rho+1$ τότε ἡ (5) γίνεται

$$(3\rho+1)(3\rho+2)\left[(3\rho+1)^2+3\rho+1+1\right]^2=$$
$$=(3\rho+1)(3\rho+2)(9\rho^2+6\rho+3\rho+1+2)^2-(3\rho+1)(3\rho+2)3^2(3\rho^2+2\rho+1)^2=$$
$$=\pi o\lambda.3 \text{ πού ἰσχύει.}$$

γ) Αν $\nu=3\rho+2$ ή (5) γίνεται: $(3\rho+2)(3\rho+3)\left|(3\rho+2)^2+3\rho+3\right|=$πολ.3 που ισχύει. Άρα ή (5) ισχύει, άρα και ή (1) $\forall\nu\in N$.

171. Νά δειχτεῖ ὅτι $\prod_{\kappa=1}^{\nu}(2\nu-1)\leqslant\nu^{\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Ἡ (1) γράφεται: $1\cdot3\cdot5\ldots(2\nu-1)<\nu^{\nu}$ (2).

Γιά $\nu=1$ ισχύει τό ἴσο. Γιά $\nu=2$ ἔχουμε $1\cdot3<2^2$ δηλ. ισχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι $1\cdot3\cdot5\ldots(2\kappa-1)<\kappa^{\kappa}$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$1\cdot3\cdot5\ldots(2\kappa-1)(2\kappa+1)<(\kappa+1)^{\kappa+1} \quad (3) \qquad \kappa>1.$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί $(2\kappa+1)$ καί ἔχουμε:

$$1\cdot3\cdot5\ldots(2\kappa-1)(2\kappa+1)<(2\kappa+1)\kappa^{\kappa} \quad (4) \qquad (\kappa\neq1).$$

Συγκρίνοντας τίς (3) καί (4) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:

$$(\kappa+1)^{\kappa+1}\geqslant(2\kappa+1)\kappa^{\kappa}\Longrightarrow\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^{\kappa}>\frac{2\kappa+1}{\kappa+1}\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}\geqslant2-\frac{1}{\kappa+1}$$ πού ισχύει λόγω τῆς ἀνίσωσης τοῦ Bernoulli.

172. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sum_{\nu=1}^{\nu}\frac{x^{2^{\nu-1}}}{1-x^{2^{\nu}}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{\nu}}}$ (1) $\forall\nu\in N$ καί $|x|\neq1$.

Απόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $\frac{x^{2^{1-1}}}{1-x^2}=\frac{x^{2^0}}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}$ πού ισχύει

Ἔστω ὅτι ισχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$\frac{x^{2^{1-1}}}{1-x^2}+\frac{x^{2^{2-1}}}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^{2^{\kappa-1}}}{1-x^{2^{\kappa}}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{\kappa}}} \quad (2)$$

Θά δείξουμε ὅτι ισχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι

$$\frac{x^{2^{1-1}}}{1-x^{2^1}}+\frac{x^{2^{2-1}}}{1-x^{2^2}}+\ldots+\frac{x^{2^{\kappa-1}}}{1-x^{2^{\kappa}}}+\frac{x^{2^{\kappa}}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{\kappa+1}}} \quad (3)$$

Λόγω τῆς (1) ἡ (2) γράφεται: $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{\kappa}}}+\frac{x^{2^{\kappa}}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}=$

$$=\frac{1}{1-x}+\frac{x^{2^{\kappa}}(1-x^{2^{\kappa}})-(1-x^{2^{\kappa+1}})}{(1-x^{2^{\kappa}})(1-x^{2^{\kappa+1}})}=\frac{1}{1-x}+\frac{x^{2^{\kappa}}-1}{(1-x^{2^{\kappa}})(1-x^{2^{\kappa+1}})}=$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{\kappa+1}}},$$

δηλ. ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N.

173. Νά δειχτεῖ ὅτι: $A=(x^{\nu}-1)(x^{\nu+1}-1)\ldots(x^{\nu+\mu-1}-1)$ εἶναι διαιρετό διά τοῦ $B=(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 καί μ τυχόντα φυσικό, τό Α διαιρεῖται διά τοῦ Β.

Δηλ. ἄν ποῦμε: $\Pi_{\kappa,\mu}(x)=\frac{(x^{\kappa}-1)(x^{\kappa+1}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu-1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)}$ τό $\Pi_{\kappa,\mu}(x)$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο.

Θά δείξουμε ὅτι καί τό $\Pi_{\kappa+1,\mu}(x)=\frac{(x^{\kappa+1}-1)(x^{\kappa+2}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)}$ (1)

εἶναι ἀκέραιο πολύωνυμο.

Ἡ (1) γιά μ=1 εἶναι φανερό ὅτι ἰσχύει (δηλ. εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο). Ἄν τό $\Pi_{\kappa+1,\mu}(x)$ τό θεωρήσουμε ὅτι εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο, θά δείξουμε ὅτι καί τό $\Pi_{\kappa+1,\mu+1}(x)$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο. Σχηματίζουμε τή διαφορά

$$\Pi_{\kappa+1,\mu+1}(x)-\Pi_{\kappa+1,\mu}(x)=$$

$$=\frac{(x^{\kappa+1}-1)(x^{\kappa+2}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu+1}-1)}-\frac{(x^{\kappa+1}-1)(x^{\kappa+2}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)}=$$

$$=\frac{(x^{\kappa+1}-1)(x^{\kappa+2}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)}\left[\frac{x^{\kappa+\mu+1}-1}{x^{\mu+1}-1}\right]=$$

$$=\frac{(x^{\kappa+1}-1)(x^{\kappa+2}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)}\,\frac{x^{\kappa+\mu+1}-x^{\mu+1}}{x^{\mu+1}-1}=$$

$$=x^{\mu+1}\frac{x^{\kappa}-1}{x^{\kappa+1}-1}\,\frac{(x^{\kappa+1}-1)(x^{\kappa+2}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{\mu}-1)}=$$

$$=x^{\mu+1}\frac{(x^{\kappa}-1)(x^{\kappa+1}-1)\ldots(x^{\kappa+\mu}-1)}{(x-1)(x-2)\ldots(x^{\mu}-1)(x^{\mu+1}-1)}=$$

$$=x^{\mu+1}\Pi_{\kappa,\mu+1}(x).$$

Δηλ. $\Pi_{\kappa+1,\mu+1}(x)=\Pi_{\kappa+1,\mu}(x)+x^{\mu+1}\Pi_{\kappa,\mu+1}(x)$.

Τά $\Pi_{\kappa+1,\mu}(x)$ καί $\Pi_{\kappa,\mu+1}(x)$ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, ἄρα καί τό $\Pi_{\kappa+1,\mu+1}(x)$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο.

174. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$1+\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}+\ldots+\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu-1}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\nu})}=$$

$$=\frac{x^{\nu}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\nu})} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε: $1+\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1}=\frac{x}{x-\alpha_1}$.

Για ν=2 έχουμε: $1+\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}=\frac{x}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}=$

$$=\frac{x^2}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}.$$

Άρα η (1) ισχύει για ν=1 και ν=2.

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ δηλ. ότι:

$$1+\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}+\ldots+\frac{\alpha_\kappa x^{\kappa-1}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\kappa)}=$$

$$=\frac{x^\kappa}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\kappa)} \qquad (2)$$

θά δείξουμε πώς ισχύει και για ν=κ+1, δηλ. ότι:

$$1+\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}+\ldots+\frac{\alpha_\kappa x^{\kappa-1}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\kappa)}+$$

$$+\frac{\alpha_{\kappa+1}x^\kappa}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\kappa+1})}=\frac{x^{\kappa+1}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\kappa+1})} \qquad (3)$$

Αλλά λόγω της (2) η (3) γράφεται:

$$\frac{x^\kappa}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\kappa)}+\frac{\alpha_{\kappa+1}x^\kappa}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\kappa+1})}=$$

$=\frac{x^{\kappa+1}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\kappa+1})}$ δηλ. η (1) ισχύει και για ν=κ+1, άρα

και $\forall \nu\in N$.

175. Αν $\alpha_i,\beta_i>0$, $i=1,2,\ldots,\nu$ και όχι ανάλογοι μεταξύ των και για τούς θετικούς ρητούς α και β είναι $\alpha+\beta=1$, να δειχτεί ότι:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)^\alpha\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa\right)^\beta>\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\beta).$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=A_\nu$ και $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu=B_\nu$ και επειδή $\alpha+\beta=1$, εφαρμόζουμε την ανίσωση $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_\nu b_\nu>a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\ldots a_\nu^{\beta_\nu}$ άν $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu=1$ και έχουμε για τούς $\frac{\alpha_\kappa}{A_\nu}$, $\frac{\beta_\kappa}{B_\nu}$ όπου $\kappa=1,2,\ldots,\nu$.

$$\alpha\frac{\alpha_\kappa}{A_\nu}+\beta\frac{\beta_\kappa}{B_\nu}>\left(\frac{\alpha_\kappa}{A_\nu}\right)^\alpha\left(\frac{\beta_\kappa}{B_\nu}\right)^\beta \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{A_\nu}\alpha_\kappa+\frac{\beta}{B_\nu}\beta_\kappa>\frac{\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\alpha}{A_\nu^\alpha B_\nu^\alpha}$$

και διατηρώντας σταθερό τό ν σταθερό για $\kappa=1,2,\ldots,\nu$ βρίσκουμε:

$$\frac{\alpha}{A_\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa+\frac{\beta}{B_\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa>\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\beta)}{A_\nu^\alpha B_\nu^\alpha}\Longrightarrow\frac{\alpha}{A_\nu}A_\nu+\frac{\beta}{B_\nu}B_\nu>\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\beta)}{A_\nu^\alpha B_\nu^\beta}\Longrightarrow$$

$$1=\alpha+\beta>\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\beta)}{A_\nu^\alpha B_\nu^\beta}\Longrightarrow A_\nu^\alpha B_\nu^\beta>\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\beta)\Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)^\alpha\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa\right)^\beta>\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa^\alpha\beta_\kappa^\beta).$$

176. Αν $\alpha_i,\beta_i>0$, $i=1,2,\dots,\nu$ καί όχι άνάλογοι μεταξύ των καί $\alpha+\beta=1$ πού $\alpha>1$ ή $\alpha<0$, νά δειχτεῖ ὅτι:

$$(\Sigma a_\nu)^\alpha\ (\Sigma\beta_\nu)^\beta<\Sigma(a_\nu^\alpha\beta_\nu^\beta).$$

Απόδειξη

α) Έστω $\alpha>1$, τότε έπειδή $\alpha+\beta=1\Longrightarrow\beta<0$ καί μποροῦμε νά βάλουμε $\alpha=\frac{1}{\gamma}$ καί $\gamma+\delta=1$ πού $0<\gamma,\ \delta<1$ όπότε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1-\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-1=\gamma-1=-\delta$.

Θέτουμε: $a_\nu=\gamma_\nu\chi_\nu$, $\beta_\nu=\chi_\nu^{-\alpha/\beta}$ καί έχουμε $a_\nu^\alpha\beta_\nu^\beta=\gamma_\nu^\alpha\chi_\nu^\alpha\chi_\nu^{-\alpha}=\gamma_\nu^\alpha=\gamma_\nu^{1/\gamma}$ καί $\chi_\nu=\beta_\nu^{-\beta/\alpha}=\beta_\nu^\delta$..

Σχηματίζουμε τήν άνίσωση τῆς προηγούμενης ἄσκησης καί ἔχουμε:

$$\Sigma\left[(\gamma_\nu^{1/\gamma})^\gamma\,(\chi_\nu^{1/\delta})^\delta\right]<(\Sigma\gamma_\nu^{1/\gamma})^\gamma\ (\Sigma\chi_\nu^{1/\delta})^\delta\Longrightarrow$$

$$\Sigma(\gamma_\nu\chi_\nu)<(\Sigma a_\nu^\alpha\beta_\nu^\beta)^{1/\alpha}\ (\Sigma\beta_\nu)^{-\beta/\alpha}\qquad\text{ἤ}$$

$$\Sigma a_\nu<(\Sigma a_\nu^\alpha\beta_\nu^\beta)^{1/\alpha}\ (\Sigma\beta_\nu)^{\beta/\alpha}\qquad\text{ἤ}$$

$$(\Sigma a_\nu)\ (\Sigma\beta_\nu)^{\beta/\alpha}<(\Sigma a_\nu\beta_\nu)^{1/\alpha}\qquad\text{ἤ}$$

$$(\Sigma a_\nu)^\alpha\ (\Sigma\beta_\nu)^\beta<\Sigma(a_\nu^\alpha\beta_\nu^\beta).$$

β) Έστω $\alpha<0$, τότε $\beta>1$ καί ἐπομένως ἡ ἀνίσωση ἰσχύει, ὅπως δείχτηκε πιό πάνω.

177. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$(1-x^{2^{\nu+1}})\prod_{\kappa=0}^{\nu}(1-\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa})(1-x)\prod_{\kappa=0}^{\nu}\left[1+\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa}(1-x^{2^\kappa})\right]\qquad(1)\quad\forall\nu\in Z^+.$$

Απόδειξη

Γιά $\nu=0$ ἡ (1) γίνεται:

$$(1-x^2)(1-\tfrac{1}{2}x)=(1-x)\left[1+\tfrac{1}{2}x(1-x)\right]=(1-x)(1+\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{2})\text{ πού ἰσχύει.}$$

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται:

$$(1-x^{2^2})(1-\tfrac{1}{2}x)(1-\tfrac{1}{2}x^2)=(1-x)\left[1+\tfrac{1}{2}x(1-x)\right]\left[1+\tfrac{1}{2}x^2(1-x^2)\right]\qquad\text{ἤ}$$

$$(1-x^4)(1-\tfrac{x}{2})(1-\tfrac{x^4}{2})=(1-x)(1+\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{2})(1+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^4}{2}).$$

Αν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις καί στά δύο μέλη βρίσκουμε ὅτι ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\rho\in N$ δηλ. ὅτι:

$$(1-x^{2^{\rho+1}})\prod_{\kappa=0}^{\rho}(1-\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa})=(1-x)\prod_{\kappa=0}^{\rho}\left[1+\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa}(1-x^{2^\kappa})\right]\qquad(2)$$

θά δείξουμε πῶς ἰσχύει καί γιά $\nu=\rho+1$, δηλ.

$$(1-x^{2^{\rho+2}})\prod_{\kappa=0}^{\rho+1}(1-\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa})=(1-x)\prod_{\kappa=0}^{\rho+1}\left[1+\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa}(1-x^{2^\kappa})\right]\qquad(3)$$

Ἀπό τό πρῶτο μέλος τῆς (3) λόγω τῆς (2) ἔχουμε:

$$(1-x^{2^{\rho+2}})(1-\tfrac{1}{2}x^{2^{\rho+1}})(1-x^{2^{\rho+1}})\prod_{\kappa=0}^{\rho}(1-\tfrac{1}{2}x^{2^\kappa})=$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}x^{2^{\rho+1}}\left(1-x^{2^{\rho+1}}\right)\right](1-x)\prod_{\kappa=0}^{\rho}\left[1+\frac{1}{2}x^{2^{\kappa}}\left(1-x^{2^{\kappa}}\right)\right]=$$

$$=(1-x)\prod_{\kappa=0}^{\rho+1}\left[1+\frac{1}{2}x^{2^{\kappa}}\left(1-x^{2^{\kappa}}\right)\right].$$

Άρα ή (1) ισχύει και για ν=ρ+1, άρα και $\forall\nu\in N$.

178. Αν $\Pi_\nu(x)=\dfrac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\nu}$ (1) $\forall\nu\in N$, να δειχτεί ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu}\Pi_\nu(x)=\Pi_\mu(x+1)-1 \qquad (2) \qquad \text{και}$$

$$0<\Pi_\nu\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}} \qquad (3).$$

Απόδειξη

α) Για ν=2 ή (1) γίνεται $\Pi_2(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$, ή δε (2) γίνεται:

$$\sum_{\nu=1}^{2}\Pi_2(x)=x+\frac{x(x+1)}{1\cdot 2}=\frac{x(x+3)}{1\cdot 2}=\frac{(x+1)(x+2)}{1\cdot 2}-1.$$

Άρα ή (2) ισχύει για ν=2. Έστω ότι ή (2) ισχύει για μ=κ∈N δηλ. ότι: $\sum_{\nu=1}^{\kappa}\Pi_\nu(x)=\Pi_\kappa(x+1)-1$ (4)

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αύτή ότι ισχύει και για μ=κ+1.

Προσθέτουμε στά μέλη της (4) τόν όρο $\dfrac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+\kappa)}{1\cdot 2\ldots(\kappa+1)}$ και έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa+1}\Pi_\nu(x)=\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+\kappa)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\kappa}+\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+\kappa)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\kappa+1)}-1=$$

$$=\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+\kappa)(\kappa+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\kappa+1)}-\frac{x(x+1)\ldots(x+\kappa)}{1\cdot 2\cdot\ldots(\kappa+1)}-1=$$

$$=\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+\kappa)(x+\kappa+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\kappa(\kappa+1)}-1=\Pi_{\kappa+1}(x+1)-1$$

δηλ. ή (2) ισχύει και για μ=κ+1, άρα και $\forall\nu\in N$.

β) Η $\Pi_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$ 0 είναι φανερή. Έστω ότι ή $\Pi_\nu\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$ ισχύει.

Πολ/ζουμε τά μέλη της έπί $\dfrac{2\nu+1}{2(\nu+1)}$ και έχουμε:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2\nu-1}{2}}{1\cdot 2\cdot\ldots\nu}\cdot\frac{\frac{2\nu+1}{2}}{\nu+1}=\Pi_{\nu+1}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{και}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}\cdot\frac{2\nu+1}{2(\nu+1)}=\frac{\sqrt{2\nu+1}}{2(\nu+1)}=\sqrt{\frac{2\nu+1}{4\nu^2+8\nu+4}}.$$

Αλλά $4\nu^2+8\nu+3=(2\nu+3)(2\nu+1)<4\nu^2+8\nu+4$. Άρα $\dfrac{2\nu+1}{4\nu^2+8\nu+4}<\dfrac{1}{\sqrt{2\nu+3}}$.

Άρα ή $\Pi_{\nu+1}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{\sqrt{2\nu+3}}$ δηλ. ή (3) ισχύει και για ν=ν+1, άρα και $\forall\nu\in N$.

179. Αν $x+y=\alpha$, $xy=\beta$, $A_2=\alpha-\frac{\beta}{\alpha-1}$, $A_3=\frac{\gamma}{\alpha-\frac{\beta}{\alpha-1}}$ κ.οὕ.κ. δηλ.

$\forall\kappa>1$ εἶναι $A_{\kappa+1}=\alpha-\frac{\beta}{A_\kappa}$ $(\alpha\neq1,\ x\neq y)$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$A_\nu=\frac{(x^{\nu+1}-y^{\nu+1})-(x^\nu-y^\nu)}{(x^\nu-y^\nu)-(x^{\nu-1}-y^{\nu-1})} \qquad (1) \qquad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=1$ ἡ (1) ἰσχύει, γιατί λόγω τῶν δοσμένων συνθηκῶν ἔχουμε:

$$A_2=\alpha-\frac{\beta}{\alpha-1}=x+y-\frac{xy}{(x+y)-1}=\frac{x^2+y^2+xy-x-y}{x+y-1}.$$

Ἡ (1) γιά $\nu=2$ γίνεται:

$$\frac{(x^3-y^3)-(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)-(x-y)}=\frac{(x-y)(x^2+y^2+xy-x-y)}{(x-y)(x+y-1)}=\frac{x^2+y^2+xy-x-y}{x+y+1}.$$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι:

$$A_\kappa=\frac{(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})-(x^\kappa-y^\kappa)}{(x^\kappa-y^\kappa)-(x^{\kappa-1}-y^{\kappa-1})} \qquad (2)$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$A_{\kappa+1}=\frac{(x^{\kappa+2}-y^{\kappa+2})-(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})}{(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})-(x^\kappa-y^\kappa)}.$$

Ἐπειδή $A_{\kappa+1}=\alpha-\frac{\beta}{A_\kappa}=x+y-\frac{xy}{A_\kappa}$ καί λόγω τῆς (2) ἔχουμε:

$$A_{\kappa+1}=x+y-\frac{xy\left[(x^\kappa-y^\kappa)-(x^{\kappa-1}-y^{\kappa-1})\right]}{(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})-(x^\kappa-y^\kappa)}=\frac{(x^{\kappa+2}-y^{\kappa+2})-(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})}{(x^{\kappa+1}-y^{\kappa+1})-(x^\kappa-y^\kappa)}.$$

δηλ. ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

180. Δίνονται οἱ θετικοί ἀριθμοί α καί β $(\alpha<\beta)$. Κατασκευάζουμε τίς ἀκολουθίες x_ν καί y_ν πού $x_1=\alpha$, $y_1=\beta$

$$x_{\nu+1}=\sqrt{x_\nu\frac{x_\nu+y_\nu}{2}},\quad y_{\nu+1}=\sqrt{x_\nu y_\nu}.$$

Νά δειχτεῖ ὅτι $x_\nu<y_\nu$ $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ὑπόθεση εἶναι $y_1>x_1$.

Ἄν λοιπόν δειχτεῖ ὅτι $y_\nu>x_\nu \implies y_{\nu+1}>x_{\nu+1}$ ἡ πρόταση ἰσχύει $\forall\nu\in N$. Εἶναι:

$$y_{\nu+1}^2-x_{\nu+1}^2=x_\nu y_\nu-x_\nu\frac{x_\nu+y_\nu}{2}=\frac{x_\nu y_\nu-x_\nu^2}{2}=\frac{x_\nu(y_\nu-x_\nu)}{2}$$ καί ἐπειδή $x_\nu>0$ γιά

αὐτό ἡ $y_\nu>x_\nu \implies \frac{x_\nu(y_\nu-x_\nu)}{2}>0 \implies y_{\nu+1}^2-x_{\nu+1}^2>0$ καί ἐπειδή

$y_{\nu+1}>0$, $x_{\nu+1}>0 \implies y_{\nu+1}>x_{\nu+1}$.

$y_\nu>x_\nu \implies y_{\nu+1}>x_{\nu+1}$.

181. Αν οἱ ἀριθμοί $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu,\ldots$ συνδέονται μέ τή σχέση $\alpha_{\nu+1}=\rho\alpha_\nu+\lambda\alpha_{\nu-1}$ (1) $\forall\nu\in N$ καί ὁ ἀριθμός $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ $(\alpha_0\neq 0)$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης $x^2-\rho x-\lambda=0$ (2), νά δειχτεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά $\nu=1$ γίνεται: $\alpha_2=\rho\alpha_1+\lambda\alpha_0=\alpha_0(\rho\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\lambda)$ (3)

Ἐπειδή ὁ $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ εἶναι ρίζα τῆς (2) ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}-\rho\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}-\lambda=0 \Longrightarrow \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}=\rho\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\lambda,$$

καί τότε ἡ (3) γίνεται: $\alpha_2=\alpha_0\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}=\alpha_1\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ (4).

Ἡ (1) γιά $\nu=2$ γίνεται: $\alpha_3=\rho\alpha_2+\lambda\alpha_1=\alpha_1(\rho\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\lambda)$ καί τότε αὐτή λόγω τῆς (4) γίνεται:

$$\alpha_3=\alpha_1(\rho\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\lambda)=\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2} \Longrightarrow \alpha_3=\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}=\alpha_2\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Ἄρα εἶναι $\alpha_1=\alpha_0\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $\alpha_2=\alpha_1\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $\alpha_3=\alpha_2\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$. Ἄρα οἱ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο μέ λόγο $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $\nu=\kappa-1$ δηλ. ὅτι εἶναι:

$$\alpha_{\kappa-1}=\alpha_{\kappa-2}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \qquad (5)$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει τότε καί γιά $\nu=\kappa$.

Ἔχουμε: $\alpha_\nu=\rho\alpha_{\nu-1}+\lambda\alpha_{\nu-2}=\alpha_{\nu-2}(\rho\cdot\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}}+\lambda)$ ἤ λόγω τῆς (5)

$$\alpha_\nu=\alpha_{\nu-2}(\rho\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\lambda)$$

Ἀπό αὐτή ἐπειδή $\rho\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha}+\lambda=\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}$ παίρνουμε: $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-2}\cdot\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}=\alpha_{\nu-2}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

Λύτή λόγω τῆς (5) γίνεται: $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, δηλ. ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

182. Δίνονται οἱ ἀκολουθίες $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu$ καί $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_\nu,\ldots$ πού $\beta_0=1$, $\gamma_0=0$, $\beta_1=\alpha_1$, $\gamma_1=1$, καί

$$\beta_{\nu+2}=\alpha_{\nu+2}\beta_{\nu+1}+\beta_\nu, \qquad \gamma_{\nu+2}=\alpha_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}+\gamma_\nu$$

πού $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ φυσικοί ἀριθμοί.

Νά δειχτεῖ:

α) ὅτι $\beta_{\nu+1}\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1}\beta_\nu=(-1)^{\nu+1}$ (1)

β) Τά κλάσματα $\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}$ εἶναι ἀνάγωγα

γ) τά κλάσματα μέ ἄρτιο δείχτη προχωροῦν ἐλαττούμενα, ὅταν ὁ δείχτης προχωρεῖ αὐξανόμενος, ἐνῶ τά κλάσματα μέ περιττό δείχτη προχωροῦν αὐξανόμενα καί εἶναι πιό μικρά ἀπό τά κλάσματα μέ ἄρτιο δείχτη.

Απόδειξη

α) Η (1) γιά ν=0 γίνεται: $\beta_1\gamma_0-\gamma_1\beta_0=(-1)^1$ ἤ $\alpha_1 0\cdot 1-1=(-1)^1$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι αὐτή ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ὅτι:

$$\beta_{\kappa+1}\gamma_\kappa-\gamma_{\kappa+1}\beta_\kappa=(-1)^{\kappa+1} \qquad (1)$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι:

$$\beta_{\kappa+2}\gamma_{\kappa+1}-\gamma_{\kappa+2}\beta_{\kappa+1}=(-1)^{\kappa+2}=(-1)^\kappa \qquad (2)$$

Στήν (2) ἀντικαθιστοῦμε τά $\beta_{\kappa+2}$, $\gamma_{\kappa+2}$ ἀπό τίς δοθεῖσες καί ἔχουμε:

$$(\alpha_{\kappa+2}\beta_{\kappa+1}+\beta_\kappa)\gamma_{\kappa+1}-(\alpha_{\kappa+2}\gamma_{\kappa+1}+\gamma_\kappa)\beta_{\kappa+1}=(-1)^\kappa \quad \text{ἤ}$$

$$\beta_\kappa\gamma_{\kappa+1}-\beta_{\kappa+1}\gamma_\kappa=(-1)^\kappa \quad \text{ἤ}$$

$$\beta_{\kappa+1}\gamma_\kappa-\beta_\kappa\gamma_{\kappa+1}=(-1)(-1)^\kappa=(-1)^{\kappa+1}$$ πού ἰσχύει λόγω τῆς (1).

β) Τό κλάσμα $\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ εἶναι ἀνάγωγο. Πράγματι ἄν οἱ β_ν καί γ_ν εἶχαν κάποιο κοινό διαιρέτη, ὁ διαιρέτης αὐτός θά διαιροῦσε τό πρῶτο μέλος τῆς (1), ἄρα καί τό δεύτερο, δηλ. τήν μονάδα.. Ἄρα οἱ β_ν καί γ_ν εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους, ἄρα τό κλάσμα $\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ εἶναι ἀνάγωγο.

γ) Ἔστω τώρα τρία κλάσματα $\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}, \frac{\beta_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}}, \frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}}$. Σχηματίζουμε τή διαφορά $\frac{\beta_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}}-\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}=\frac{\beta_{\nu+1}\gamma_\nu-\beta_\nu\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu+1}}=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu+1}}$ (2).

Ἄν λοιπόν ὁ ν εἶναι περιττός, τότε $\frac{\beta_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}}>\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ καί ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος $\frac{\beta_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}}<\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$. Ἄρα ἀπό δύο διαδοχικά κλάσματα, τό κλάσμα πού ἔχει ἄρτιο δείκτη εἶναι μεγαλύτερο.

Σχηματίζουμε τή διαφορά $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}}-\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}=\frac{\beta_{\nu+2}\gamma_\nu-\beta_\nu\gamma_{\nu+2}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu+2}}=\frac{\alpha_{\nu+2}(-1)^{\nu+1}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu+2}}$

λόγω τῶν δοσμένων ἀπό τήν (1). Ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος τότε: $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}}<\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$, ἄρα τά κλάσματα μέ ἄρτιο δείκτη προχωροῦν ἐλαττούμενα.

Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός τότε $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}}>\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu}$, ἄρα τά κλάσματα μέ περιττό δείκτη προχωροῦν αὐξανόμενα μαζί μέ τόν δείκτη.

Λέμε τώρα ὅτι εἶναι $\forall\nu,\forall\mu\in N$ $\frac{\beta_{2\nu}}{\gamma_{2\nu}}>\frac{\beta_{2\mu+1}}{\gamma_{2\mu+1}}$. Ξέρουμε τώρα ὅτι αὐτό σχύει γιά μ=ν ἤ μ=ν-1. Γιά μ>ν εἶναι τότε $\frac{\beta_{2\nu}}{\gamma_{2\nu}}>\frac{\beta_{2\mu}}{\gamma_{2\mu}}>\frac{\beta_{2\mu+1}}{\gamma_{2\mu+1}}$.

Ἄν μ<ν-1 τότε $\frac{\beta_{2\mu+1}}{\gamma_{2\mu+1}}<\frac{\beta_{2(\mu-1)+1}}{\gamma_{2(\mu-1)+1}}<\frac{\beta_{2\nu-1}}{\gamma_{2\nu-1}}<\frac{\beta_{2\nu}}{\gamma_{2\nu}}$.

183. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση

$$(x^2+2x-2)^{2\nu+1}+5^{2\nu+1}(x-2)^{\nu+2}$$

εἶναι διαιρετή διά τῆς x^2-3x+3 $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά ν=0 ή δοσμένη παράσταση γίνεται

$x^2+2x-2+5(x-2)^2=6(x^2-3x+3)=$πολ.$(x^2-3x+3)$ δηλ. ισχύει.

Γιά ν=1 ή δοσμένη παράσταση γίνεται:

$$(x^2+2x-2)^3+5(x-2)^3=$$

$$[(x^2+2x-2)+5(x-2)]\,[(x^2+2x-2)^2-5(x^2+2x-2)(x-2)+25(x-2)^2]=$$

$(x^2+7x-12)(x^2+2x+28)(x^2-3x-3)$ δηλ. πάλι ισχύει.

Έστω ότι ή πρόταση ισχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ότι

$$(x^2+2x-2)^{2\kappa+1}+5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}=$$

$(x^2-3x+3)\Pi(x)$ (1) πού $\Pi(x)$ άκέραιο ώς πρός x πολυώνυμο τοῦ x βαθμοῦ 4κ.

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ὅτι ισχύει καί γιά ν=κ+1. Έχουμε:

$$(x^2+2x-2)^{2(\kappa+1)+1}+5^{2(\kappa+1)+1}(x-2)^{(\kappa+1)+2}=$$

$$(x^2+2x-2)^2(x^2+2x-2)^{2\kappa+1}+25\cdot 5^{2\kappa+1}(x-2)(x-2)^{\kappa+2} \qquad (2)$$

Άπό τήν (1) έχουμε:

$$(x^2+2x-2)^{2\kappa+1}=(x^2-3x-3)\Pi(x)-5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}$$

καί άντικαθιστώντας στήν (2) έχουμε:

$$(x^2+2x-2)^{2(\kappa+1)+1}+5^{2(\kappa+1)+1}(x-2)^{(\kappa+1)+2}=$$

$$(x^2+2x-2)^2\left[(x^2-3x+3)\Pi(x)-5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}\right]+25\cdot 5^{2\kappa+1}(x-2)(x-2)^{\kappa+2}=$$

$$(x^2+2x-2)^2(x^2-3x+3)\Pi(x)-5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}\left[(x^2+2x-2)^2-25(x-2)\right]=$$

$$(x^2+2x-2)^2(x^2-3x+3)\Pi(x)-5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}(x^4+4x^3-33x+54)=$$

$$(x^2+2x-2)^2(x^2-3x+3)\Pi(x)-5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}(x^2+7x+18)(x^2-3x+3)=$$

$$\left[(x^2+2x-2)^2\Pi(x)-5^{2\kappa+1}(x-2)^{\kappa+2}(x^2+7x+18)\right](x^2-3x+3).$$

Άρα ή πρόταση ισχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

184. Άν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2\nu+1}\in R$ καί

$$\alpha_2-\alpha_1\leqslant\alpha_3-\alpha_2\leqslant\alpha_4-\alpha_3\leqslant\ldots\leqslant\alpha_{2\nu+1}-\alpha_{2\nu},$$

νά δειχτεῖ ὅτι: $(\nu+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu})\leqslant\nu(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\nu+1})$ (1) $\forall\nu\in N$. Νά δειχτεῖ ἐπίσης ὅτι στήν τελευταία σχέση τό σημεῖο τῆς ισότητας ισχύει τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ δοσμένοι ἀριθμοί σχηματίζουν ἀριθμητική πρόοδο.

Απόδειξη

Γιά ν=1 ή ἀκολουθία ἀποτελεῖται ἀπό τούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ἀπό δέ τήν ὑπόθεση θά εἶναι $\alpha_2-\alpha_1\leqslant\alpha_3-\alpha_2 \Longrightarrow 2\alpha_2\leqslant\alpha_1-\alpha_3$ πού ισχύει.

Έστω ὅτι αὐτή πού θέλουμε νά δείξουμε ισχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ὅτι ισχύει ή $(\kappa+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\kappa})\leqslant\kappa(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\kappa+1})$ (2)

θά δείξουμε ὅτι μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ.ὅ-
τι: $(\kappa+2)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\kappa}+a_{2\kappa+2})\leqslant(\kappa+1)(a_1+a_3+\ldots+a_{2\kappa+3})$ (3)

Ἐφαρμόζοντας τήν σχέση (2) σέ (2κ+1) ὅρους τῆς ἀκολουθίας $a_1,a_2,$ $a_3,\ldots,a_{2\kappa+1},a_{2\kappa+2},a_{2\kappa+3}$ πού τούς διαλέγουμε κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε δύο τυχαῖες ὁμάδες νά διαφέρουν κατά δύο ὅρους, καί ἔτσι παίρνουμε (κ+1) τό πλῆθος ἀνισώσεις μέ μορφή

$$(\kappa+1)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\kappa})\leqslant\kappa(a_1+a_3+\ldots+a_{2\kappa+1}).$$

Τίς ἀνισώσεις αὐτές προσθέτουμε κατά μέλη καί ἔχουμε:

$\kappa(\kappa+1)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\kappa}+a_{2\kappa+2})\leqslant\kappa^2(a_1+a_3+\ldots+a_{2\kappa-1}+a_{2\kappa+3})+\kappa(\kappa+1)a_{2\kappa+1}$ ἤ

$(\kappa+1)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\kappa}+a_{2\kappa+2})\leqslant\kappa(a_1+a_3+\ldots+a_{2\kappa-1}+a_{2\kappa+3})+(\kappa+1)a_{2\kappa+1}$

Ἀλλά ἀπό τήν ὑπόθεση $a_\lambda-a_{\lambda-1}\leqslant a_{\lambda+1}-a_\lambda$ παίρνουμε κ+1 τό πλῆθος ἀ-
νισώσεις τῆς μορφῆς $2a_2\leqslant a_1+a_3$, $2a_4\leqslant a_3+a_5$, ... (4) (προσέχουμε, ὥστε καμιά ἀπό τίς ἀνισώσεις νά περιέχει τόν ὅρο $a_{2\kappa+1}$) τίς ὁποῖες προσθέτουμε καί παίρνουμε

$$a_2+a_4+\ldots+a_{2\kappa}+a_{2\kappa+2}\leqslant a_1+a_3+\ldots+a_{2\kappa+1}+a_{2\kappa+3} \qquad (5)$$

Προσθέτουμε τίς (3) καί (5) καί παίρνουμε

$$(\kappa+2)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\kappa}+a_{2\kappa+2})\leqslant(\kappa+1)(a_1+a_3+\ldots+a_{2\kappa+1}+a_{2\kappa+3})$$

δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in\mathbb{N}$.

Ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας σχηματίζουν ἀριθμ. πρόοδο δηλ. ὅταν

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_{2\nu+1}-a_{2\nu}$$

τότε οἱ ἀκολουθίες $a_1,a_3,a_5,\ldots,a_{2\nu+1}$ καί $a_2,a_4,\ldots,a_{2\nu}$ εἶναι ἀριθμητικές πρόοδοι. Θά ἔχουμε σάν συνέπεια τίς ἰσότητες

$$a_2+a_4+\ldots+a_{2\nu}=\frac{a_2+a_{2\nu}}{2}\cdot\nu \qquad \text{καί}$$

$$a_1+a_3+\ldots+a_{2\nu-1}+a_{2\nu+1}=\frac{a_1+a_{2\nu+1}}{2} \qquad \text{ἤ τίς}$$

$$\left.\begin{aligned}(\nu+1)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\nu})&=\frac{a_2+a_{2\nu}}{2}\nu(\nu+1)\\ \nu(a_1+a_3+\ldots+a_{2\nu+1})&=\frac{a_1+a_{2\nu+1}}{2}\nu(\nu+1)\end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Ἐπειδή ὅμως $a_2-a_1=a_{2\nu}-a_{2\nu-1}$ ἤ $a_2+a_{2\nu}=a_1+a_{2\nu+1}$ (ἀπό τήν ὑπόθεση) τότε ἀπό τίς (α) παίρνουμε:

$$(\nu+1)(a_2+a_4+\ldots+a_{2\nu})=\nu(a_1+a_3+\ldots+a_{2\nu+1}).$$

Παρατηροῦμε δηλ. ὅτι στήν περίπτωση τῆς ἀριθμ. προόδου ἰσχύει ἀπό τή σχέση (1) μόνον ἡ ἰσότητα. Σέ κάθε ἄλλη περίπτωση ἡ (α) ἰσχύει σάν ἀνισότητα ὅπως φαίνεται ἀπό τίς (4) καί (5).

185. Αν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\in R^+$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής ή γεωμετρικής ή αρμονικής προόδου, να δειχτεί ότι $\forall\nu\geq 2$ είναι $\alpha^\nu+\gamma^\nu>2\beta^\nu$ (1).

Απόδειξη

α) Αν οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμ.προόδου τότε

$$2\beta=\alpha+\gamma \qquad (2)$$

Η (1) για ν=2 γράφεται:

$$\alpha^2+\gamma^2>2\beta^2 \Longrightarrow \alpha^2+\gamma^2\geq 2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2 \quad \text{λόγω της (2).}$$

Από αυτήν έχουμε: $\alpha^2+\gamma^2>\frac{\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma}{2} \Longrightarrow \alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma>0 \Longrightarrow (\alpha-\gamma)^2>0$, που ισχύει.

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ δηλ. ότι $\alpha^\kappa+\gamma^\kappa>2\beta^\kappa$ (3). Θά δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1, δηλ. ότι είναι: $\alpha^{\kappa+1}+\gamma^{\kappa+1}>2\beta^{\kappa+1}$.

Επειδή $\beta>0$ από την (3) έπεται: $\alpha^\kappa\beta+\gamma^\kappa\beta>2\beta^{\kappa+1}$.

Αρκεί να δειχτεί ότι:

$$\alpha^{\kappa+1}+\gamma^{\kappa+1}>\alpha^\kappa\beta+\gamma^\kappa\beta \Longrightarrow \alpha^{\kappa+1}+\gamma^{\kappa+1}>\alpha^\kappa\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+\gamma^\kappa\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\Longrightarrow$$

$$2\alpha^{\kappa+1}+2\gamma^{\kappa+1}>\alpha^{\kappa+1}+\alpha^\kappa\gamma+\alpha\cdot\gamma^\kappa+\gamma^{\kappa+1} \Longrightarrow \alpha^{\kappa+1}+\gamma^{\kappa+1}-\alpha^\kappa\gamma-\alpha\gamma^\kappa>0\Longrightarrow$$

$$(\alpha-\gamma)(\alpha^\kappa-\gamma^\kappa)>0 \Longrightarrow (\alpha-\gamma)^2(\alpha^{\kappa-1}+\alpha^{\kappa-2}\gamma+\alpha^{\kappa-3}\gamma^2+\ldots+\gamma^{\kappa-1})>0$$

που ισχύει.

β) Αν οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμ.προόδου τότε $\beta^2=\alpha\gamma$. Για να ισχύει η $\alpha^\nu+\gamma^\nu>2\beta^\nu$, αρκεί να δειχτεί ότι

$$\alpha^\nu+\gamma^\nu>2(\alpha\gamma)^{\nu/2} \Longrightarrow \alpha^{2\nu}+\gamma^{2\nu}+2\alpha^\nu\gamma^\nu>4\alpha^\nu\gamma^\nu \Longrightarrow \alpha^{2\nu}+\gamma^{2\nu}-2\alpha^\nu\gamma^\nu>0\Longrightarrow$$

$(\alpha^\nu-\gamma^\nu)^2>0$ που ισχύει.

γ) Αν οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου τότε οι $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και ισχύει λόγω της (1) ότι: $\frac{1}{\alpha^\nu}+\frac{1}{\gamma^\nu}>\frac{2}{\beta^\nu}$ ή $\frac{\alpha^\nu+\gamma^\nu}{\alpha^\nu\gamma^\nu}>\frac{2}{\beta^\nu} \Longrightarrow \alpha^\nu+\gamma^\nu>\frac{2\alpha^\nu\gamma^\nu}{\beta^\nu}$.

Άρα $\alpha^\nu+\gamma^\nu>2\beta^\nu$. Αρκεί λοιπόν να δειχτεί ότι:

$$\frac{2\alpha^\nu\gamma^\nu}{\beta^\nu}>2\beta^\nu\Longrightarrow\alpha^\nu\gamma^\nu>\beta^{2\nu}\Longrightarrow\alpha\gamma>\beta^2 \text{ ή } \alpha\gamma>\left(\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}\right)^2\Longrightarrow\alpha\gamma>\frac{4\alpha^2\gamma^2}{(\alpha+\gamma)^2}$$

$$(\alpha+\gamma)^2>4\alpha\gamma \Longrightarrow (\alpha-\gamma)^2>0 \quad \text{που ισχύει.}$$

186. Μιά ακολουθία $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ σχηματίζεται ως εξής. Ο α_1 είναι ο μέσος αριθμητικός των α_1 και $\beta_{\nu-1}$, ο β_ν είναι ο μέσος αρμονικός των β_1 και $\alpha_{\nu-1}$. Να δειχτεί ότι

$$\alpha_\nu\beta_\nu=\alpha_1\beta_1.$$

Απόδειξη

Έχουμε: $\alpha_2=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$, $\beta_2=\frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}$, άρα $\alpha_2\beta_2=\alpha_1\beta_1$.

Η πρόταση λοιπόν ισχύει γιά ν=2.

Έχομε: $\alpha_1\beta_\nu=\alpha_1\beta_\nu$, $\alpha_{\nu+1}=\frac{\alpha_1+\beta_\nu}{2}$, $\beta_{\nu+1}=\frac{2\beta_1\alpha_\nu}{\beta_1+\alpha_\nu}$.

$$\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+1}=\frac{(\alpha_1+\alpha_1)\beta_1\alpha_\nu}{\beta_1+\alpha_1}=\frac{\left(\alpha_1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_\nu}\right)\beta_1\alpha_\nu}{\beta_1+\alpha_\nu} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+1}=\alpha_1\beta_1.$$

187. Οι φυσικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\mu,\nu$ από τούς οποίους ο γ δέν είναι τέλειο τετράγωνο, έπαληθεύουν τίς σχέσεις

$$0<\alpha-\beta\sqrt{\gamma}<1 \quad \text{καί} \quad \alpha^2-\beta^2\gamma=4\mu.$$

Θέτουμε $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu=\alpha_\nu+\beta_\nu\sqrt{\gamma}$. Νά δειχτεί ότι ο α_ν είναι ίσος μέ τόν άκέραιο τόν άμέσως μεγαλύτερο από τόν $\beta_\nu\sqrt{\gamma}$ καί ότι ο άκέραιος ο άμέσως μεγαλύτερος τοῦ $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu$ είναι πολλ.2^2 $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Στήν ισότητα $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu=\alpha_\nu+\beta_\nu\sqrt{\gamma}$ οί α_ν,β_ν είναι φανερό ότι είναι φυσικοί, καί άν θέσουμε όπου $\sqrt{\gamma}$ τόν $-\sqrt{\gamma}$ θά βροῦμε τήν ισότητα

$$(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu=\alpha_\nu-\beta_\nu\sqrt{\gamma},$$

καί έπομένως $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu=2\alpha_\nu$ (1).

Θά δείξουμε ότι είναι $\alpha_\nu=[\beta_\nu\sqrt{\gamma}]+1$ (2).

Από τήν $0<\alpha-\beta\sqrt{\gamma}<1 \Longrightarrow \alpha-1<\beta\sqrt{\gamma}$ καί $\beta\sqrt{\gamma}<\alpha$ δηλ.

$\alpha-1<\beta\sqrt{\gamma}<\alpha \Longrightarrow [\beta\sqrt{\gamma}]=\alpha-1 \Longleftrightarrow \alpha=[\beta\sqrt{\gamma}]+1$ δηλ. ή σχέση (2) ισχύει όταν ν=1. Έστω ότι ή (2) ισχύει γιά ν=κ. Θά είναι:

$\alpha_\kappa=[\beta_\kappa\sqrt{\gamma}]+1 \Longrightarrow \alpha_\kappa-1=[\beta\sqrt{\gamma}]$ άρα $\alpha_\kappa-1<\beta_\kappa\sqrt{\gamma}<\alpha_\kappa \Longrightarrow$

$0<\alpha_\kappa-\beta_\kappa\sqrt{\gamma}<1$ (3).

Είναι δέ: $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\kappa=\alpha_\kappa+\beta_\kappa\sqrt{\gamma}$ (4). Θά δείξουμε ότι ή (2) ισχύει καί γιά ν=κ+1. Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (4) έπί $\alpha+\beta\sqrt{\gamma}$ καί έχουμε:

$(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\kappa+1}=(\alpha_\kappa+\beta_\kappa\sqrt{\gamma})(\alpha+\beta\sqrt{\gamma}) \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}+\beta_{\kappa+1}\sqrt{\gamma}=$

$(\alpha\alpha_\kappa+\beta\beta_\kappa\gamma)+(\alpha\beta_\kappa+\beta\alpha_\kappa)\sqrt{\gamma}$ (5)

Από τήν $0<\alpha-\beta\sqrt{\gamma}<1$ καί τήν (3) έχουμε:

$0<(\alpha_\kappa-\beta_\kappa\sqrt{\gamma})(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})<1 \Longrightarrow (\alpha\alpha_\kappa+\beta\beta_\kappa\gamma)-(\alpha\beta_\kappa+\beta\alpha_\kappa)\sqrt{\gamma}<1 \Longrightarrow$

$0<\alpha_{\kappa+1}-\beta_{\kappa+1}\sqrt{\gamma}<1 \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}-1<\beta_{\kappa+1}\sqrt{\gamma}<\alpha_{\kappa+1} \Longrightarrow$

$[\beta_{\kappa+1}\sqrt{\gamma}]=\alpha_{\kappa+1}-1 \Longrightarrow \alpha_{\kappa+1}=[\beta_{\kappa+1}\sqrt{\gamma}]+1.$

Άρα ή (2) ισχύει $\forall\nu\in N$.

Θά δείξουμε ότι είναι $[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu]+1=$πολλ.$2^\nu$ (6)

Η (6) γράφεται: $[\alpha_\nu+\beta_\nu\sqrt{\gamma}]+1=\pi o\lambda\lambda.2^\nu \Longrightarrow \alpha_\nu+[\beta_\nu\sqrt{\gamma}]+1=\pi o\lambda\lambda.2^\nu$

$\Longrightarrow \alpha_\nu+\alpha_\nu=\pi o\lambda\lambda.2^\nu \Longrightarrow 2\alpha_\nu=\pi o\lambda\lambda.2^\nu$

καί λόγω τῆς (1) πρέπει νά δείξουμε ὅτι

$$(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu=\pi o\lambda\lambda.2^\nu \qquad (7)$$

Γιά ν=1 ἡ (7) γίνεται: $\alpha+\beta\sqrt{\gamma}+\alpha-\beta\sqrt{\gamma}=2\alpha=\pi o\lambda\lambda.2^1$, ἄρα ἰσχύει.

Γιά ν=2 ἔχουμε: $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^2+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^2=2\alpha^2+2\beta^2\gamma$, ἐπειδή δέ $\alpha^2=\beta^2\gamma+4\mu$ βρίσκουμε $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^2+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^2=4\beta^2\gamma+8\mu=4(\beta^2\gamma+2\mu)=\pi o\lambda\lambda.2^2$, ἄρα ἡ (7) ἰσχύει καί γιά ν=2.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά ν=κ. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1.

Παίρνουμε τό γινόμενο $[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\kappa+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\kappa]\,[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})]$ πού εἶναι φανερό ὅτι $2\alpha_\kappa\cdot 2\alpha=\pi o\lambda\lambda.2^\kappa\cdot\pi o\lambda\lambda.2^1=\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}$ καί κάνοντας τόν πολ/σμό βρίσκουμε:

$$\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}=(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\kappa+1}+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\kappa+1}+(\alpha^2-\beta^2\gamma)(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\kappa-1}+(\alpha^2-\beta^2\gamma)(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\kappa-1}$$

δηλ. $\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}=2\alpha_{\kappa+1}+4\mu(2\alpha_{\kappa-1})$ ἤ καί

$\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}=2\alpha_{\kappa+1}+\pi o\lambda\lambda.2^2\cdot\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa-1}$ ἤ καί

$2\alpha_{\kappa+1}=\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}-\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}=\pi o\lambda\lambda.2^{\kappa+1}$.

Ἄρα ἡ (7) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

188. Νά δειχτεῖ ὅτι, ἄν $x^3=x^2+x+1$ θά εἶναι καί

$$x^{3\nu}=A_\nu x^2+B_\nu x+\Gamma_\nu \qquad (1)$$

πού $A_{\nu+1}=4A_\nu+2B_\nu+\Gamma_\nu$, $B_{\nu+1}=3A_\nu+2B_\nu+\Gamma_\nu$ καί

$\Gamma_{\nu+1}=2A_\nu+B_\nu+\Gamma_\nu$ μέ $\nu\geq 2$.

Ἀπόδειξη

Η (1) γιά ν=2 γίνεται

$$x^{3\cdot 2}=7x^2+6x+4=(4\cdot 1+2\cdot 1+1)x^2+(3\cdot 1+2\cdot 1+1)x+(2\cdot 1+1+1)\ \text{δηλ.}$$

ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ δηλ. ὅτι $x^{3\kappa}=A_\kappa x^2+B_\kappa x+\Gamma_\kappa$ (2).

Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή θά δείξουμε πώς ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι

$$x^{3\,\kappa+1}=A_{\kappa+1}x^2+B_{\kappa+1}x+\Gamma_{\kappa+1} \qquad (3)$$

Πολ/ζουμε τά μέλη τῆς (2) ἐπί x^3 καί ἔχουμε:

$$x^{3\,(\kappa+1)}=x^3(A_\kappa x^2+B_\kappa x+\Gamma_\kappa)-(x^2+x+1)(A_\kappa x^2+B_\kappa x+\Gamma_\kappa)=$$

$$A_\kappa x^4+(A_\kappa+B_\kappa)x^3+(A_\kappa+B_\kappa+\Gamma_\kappa)x^2+(B_\kappa+\Gamma_\kappa)x+\Gamma_\kappa=$$

$$A_\kappa x(x^2+x+1)+(A_\kappa+B_\kappa)(x^2+x+1)+(A_\kappa+B_\kappa+\Gamma_\kappa)x^2+(B_\kappa+\Gamma_\kappa)x+\Gamma_\kappa=$$

Ἀντικαθιστοῦμε ὅμοια τό x^3 μέ τό x^2+x+1 καί ἔχουμε:

$$x^{3\,(\kappa+1)}=(3A_\kappa+2B_\kappa+\Gamma_\kappa)x^2+(3A_\kappa+2B_\kappa+\Gamma_\kappa)x+(2A_\kappa+B_\kappa+\Gamma_\kappa)=$$

$$A_{\kappa+1}x^2+B_{\kappa+1}x+\Gamma_{\kappa+1}.$$

Άρα ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί $\forall \nu\in N_{\geq 2}$.

189. Νά δειχτεῖ ὅτι $\Pi^2 \geq (\nu-2)^{\nu(\nu-1)} (x_1x_2\ldots x_\nu)^{\nu-1}$ ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu \in R^+$ $\Sigma=x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ καί

$\Pi=(\Sigma-x_1-x_2)(\Sigma-x_1-x_3)\ldots(\Sigma-x_1-x_\nu)(\Sigma-x_2-x_3)\ldots(\Sigma-x_2-x_\nu)\ldots(\Sigma-x_{\nu-1}-x_\nu)$.

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ἀνίσωση Cauchy ἔχουμε:

$$\frac{x_3+x_4+\ldots+x_\nu}{\nu-2} \geq \sqrt[\nu-2]{x_3x_4\ldots x_\nu} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\Sigma-x_1-x_2}{\nu-2} \geq \sqrt[\nu-2]{x_3x_4\ldots x_\nu} \Longrightarrow \Sigma-x_1-x_2 \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_3x_4\ldots x_\nu}$$

ὅμοια εἶναι

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma-x_1-x_3 \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_2x_4\ldots x_\nu}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Sigma-x_1-x_\nu \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_2x_3\ldots x_{\nu-1}}\end{array}\right\}(\nu-1)\text{ἀνισώσεις}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma-x_2-x_3 \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_1x_4\ldots x_\nu}\\ \Sigma-x_2-x_4 \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_1x_3\ldots x_\nu}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Sigma-x_2-x_\nu \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_1x_3\ldots x_{\nu-1}}\end{array}\right\}(\nu-2)\text{ἀνισώσεις}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma-x_{\nu-1}-x_\nu \geq (\nu-2)\sqrt[\nu-2]{x_1x_2\ldots x_{\nu-1}} \quad 1\ \text{ἀνίσωση}$$

Πολ/ζουμε αὐτές κατά μέλη καί βρίσκουμε:

$$\Pi \geq (\nu-2)^{1+2+\ldots+(\nu-1)} \sqrt[\nu-2]{x_1^{1+2+\ldots+(\nu-2)}\, x_2^{1+2+\ldots+(\nu-2)} \ldots x_\nu^{1+2+\ldots+(\nu-2)}}$$

$$\Pi \geq (\nu-2)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \sqrt[\nu-2]{(x_1x_2\ldots x_\nu)^{1+2+\ldots+(\nu-2)}} =$$

$$(\nu-2)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \sqrt[\nu-2]{(x_1x_2\ldots x_\nu)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}} =$$

$$(\nu-2)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} (x_1x_2\ldots x)^{\frac{\nu-1}{2}} \Longrightarrow$$

$$\Pi^2 \geq (\nu-2)^{\nu(\nu-1)} (x_1x_2\ldots x)^{\nu-1}.$$

190. Νά δειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς: $x+(x-2)x+\frac{(x-4)x(x-1)}{2!}+\frac{(x-6)x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots$

εἶναι ἴσο μέ: $\frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{(\nu-1)!}$

Ἀπόδειξη

Ὁ ὁποιοσδήποτε ὅρος τῆς σειρᾶς, ἔστω ἐκεῖνος τῆς τάξεως ρ εἶναι: $\frac{(x-2\rho+2)x(x-1)(x-2)\ldots(x-\rho+2)}{(\rho-1)!}$

Έστω S_ν τό άθροισμα τῶν ν ὅρων. Τό $S_2=x+(x-2)x=x(x-1)$ δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει. Έστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι:

$$S_\nu=x+(x-2)+x+\frac{(x-4)x(x-1)}{2!}+\ldots \text{ μέ } \kappa \text{ ὅρους}=\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa+1)}{(\kappa-1)!}$$

θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι

$$S_{\nu+1}=S_\nu+\frac{[x-2(\kappa+1)+2]x(x-1)(x-2)\ldots(x-\kappa+1)}{\kappa!}=$$

$$=\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa+1)}{(\kappa-1)!}+\frac{(x-2\kappa)x(x-1)(x-2)\ldots(x-\kappa+1)}{\kappa!}=$$

$$=\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa+1)}{\kappa!}[\kappa+x-2\kappa]=\frac{x(x-1)\ldots(x-\kappa+1)(x-\kappa)}{\kappa!}$$ δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

191. Αν $\nu\in N$ νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα

$$\Sigma=1\cdot\nu+2(\nu-1)+3(\nu-2)+\ldots+\nu\cdot 1$$

καί σά συνέχεια νά δειχτεῖ ὅτι:

α) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\nu}}<2\sqrt{\nu}$

β) $(\frac{1}{4}\nu)^\nu<\nu!<\left[\frac{1}{6}(\nu+1)(\nu+2)\right]^{\nu/2}$

Απόδειξη

Ὁ γενικός ὅρος τοῦ ἀθροίσματος γράφεται:

$$\nu[\nu-(\nu-1)]=\nu^2-\nu(\nu-1).$$

Άρα θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
1\cdot\nu&=1\nu-1\cdot 0\\
2(\nu-1)&=2\nu-2\cdot 1\\
3(\nu-2)&=3\nu-3\cdot 2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\nu[\nu-(\nu-1)]&=\nu\cdot\nu-\nu(\nu-1).
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε αὐτές κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$\Sigma=\nu(1+2+3+\ldots+\nu)-[2\cdot 1+3\cdot 2+\ldots+\nu(\nu-1)]=$$

$$=\nu(\frac{\nu+1}{2})-\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6}$$

α) Γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $1<2\sqrt{1}$ πού ἰσχύει. Έστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N$ δηλ. ὅτι: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\kappa}}<2\sqrt{\kappa}$ (1)

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}<2\sqrt{\kappa+1} \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}<2\sqrt{\kappa}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}$$

'Αρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι:

$$2\sqrt{\kappa}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}<2\sqrt{\kappa+1} \Rightarrow 2\sqrt{\kappa(\kappa+1)}+1<2(\kappa+1) \Rightarrow 2\sqrt{\kappa(\kappa+1)}<2\kappa+1$$

$$\Rightarrow 4\kappa^2+4\kappa<4\kappa^2+4\kappa+1 \Rightarrow 0<1 \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

"Αρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall \nu\in N$.

β) "Εχουμε: $\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\nu}}}{\nu} > \sqrt[\nu]{1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}}}$ ἤ καί

$$2\sqrt{\nu}>\nu\sqrt[\nu]{\frac{1}{\sqrt{\nu!}}} \Rightarrow 2^{\nu}\cdot\nu^{\nu/2}>\nu^{\nu}\frac{1}{\sqrt{\nu!}} \Rightarrow (\nu!)^{1/2}>\frac{\nu^{\nu/2}}{2^{\nu}} \Rightarrow$$

$$\nu!>\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\nu}$$

'Επίσης: $\dfrac{\nu\cdot 1+2(\nu-1)+3(\nu-2)\ldots+\nu\cdot 1}{\nu} > \sqrt[\nu]{(\nu!)^2} \Rightarrow$

$$\left[\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6\nu}\right]^{\nu}>(\nu!)^2 \Rightarrow \left[\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6}\right]^{\nu/2}>\nu!$$

192. "Αν α_ν παριστάνει τόν $\nu^{ον}$ ὅρο τοῦ ἀθροίσματος

$$1+\frac{2^2}{1(1+2\cdot 2^2)}+\frac{3^2}{1(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)}+\ldots$$

νά δειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων του εἶναι:

$$\frac{3\nu^2-\alpha_\nu}{2\nu^2}.$$

'Απόδειξη

'Ο $\nu_{ος}$ ὅρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι:

$$\alpha_\nu=\frac{\nu^2}{1(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)\ldots(1+2\nu^2)}$$

Λέμε ὅτι τό ἄθροισμα των ν πρώτων ὅρων εἶναι:

$$\frac{3\cdot[1(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)\ldots(1+2\nu^2)-1]}{2\cdot 1(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)\ldots(1+2\nu^2)} \qquad (1)$$

"Εστω ὅτι ἡ παράσταση (1) εἶναι τό ἄθροισμα τῶννπρώτων ὅρων τοῦ δοσμένου ἀθροίσματος. Γιά νά εἶναι ὁ τύπος αὐτός γενικός πρέπει νά δειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν (ν+1) πρώτων ὅρων του

$$\frac{3\left[1(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)\ldots(1+2\nu^2)(1+2(\nu+1)^2)-1\right]}{2\cdot 1(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\,1+2(\nu+1)^2]}.$$

Γι'αὐτό στούς ν πρώτους ὅρους τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ καί στήν (1)προσθέτουμε τόν ὅρο

$$\alpha_{\nu+1}=\frac{(\nu+1)^2}{1(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2\right]}$$

καί ἔχουμε

$$1+\frac{2^2}{1(1+2\cdot 2^2)}+\ldots+\frac{(\nu+1)^2}{1(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2\right]}=$$

$$=\frac{3\left[1+(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2\right]\right]+2(\nu+1)^2}{2\cdot 1(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2(1+2\cdot 2^2)(1+2\cdot 3^2)\ldots(1+2\nu^2)}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{2(\nu+1)^2-\left[1+2(\nu+1)^2\right]}{2\cdot 1(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2-1\right]}{1(1+2\cdot 2^2)\ldots(1+2\nu^2)\left[1+2(\nu+1)^2\right]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3(\nu+1)^2-\alpha_{\nu+1}}{(\nu+1)^2}\right].$$

δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί ν+1 ὅρους, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

193. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$(1+2+3+\ldots+\nu)^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)^3+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\nu\right)^3+\frac{\alpha^3}{27}\geqslant\nu^3\alpha$$

ἄν $\alpha\geqslant 0$ καί $\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

Ἐπειδή $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geqslant 3\alpha\beta\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$, ἔχουμε:

$$(1+2+3+\ldots+\nu)^3\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)^3+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\nu\right)^3+\frac{\alpha^3}{27}\geqslant$$

$$3(1+2+3+\ldots+\nu)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\nu\right)\frac{\alpha}{3} \qquad (1)$$

Ἀλλά ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε: $1+2+\ldots+\nu\geqslant\nu\sqrt[\nu]{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu}$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\geqslant\nu\cdot\frac{1}{\sqrt[\nu]{1\,2\ldots\nu}}\,,\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{\nu}{1}\geqslant\nu\frac{\sqrt[\nu]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}}{\sqrt[\nu]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}}$$

Τότε στό δεύτερο μέλος τῆς (1) μποροῦμε νά βάλουμε ἀντί τῶν $(1+2+\ldots+\nu),\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{\nu}{1}\right)$ τά μικρότερα ἤ ἴσα των, καί τότε θά ἰσχύει γιά ἕνα λόγο παραπάνω. Ἄρα ἔχουμε:

$$(1+2+\ldots+\nu)^3\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)^3+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\nu\right)^3+\frac{\alpha^3}{27}\geqslant$$

$$3\nu\cdot\sqrt[\nu]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}\cdot\frac{\nu}{\sqrt[\nu]{1\cdot 2\ldots\nu}}\cdot\nu\cdot\frac{\alpha}{3}=\nu^3\alpha.$$

194. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\left(\frac{\tau-\alpha}{\nu-1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\tau-\beta}{\nu-1}\right)^{\beta}\left(\frac{\tau-\gamma}{\nu-1}\right)^{\gamma}\ldots<\left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{\tau}$

ἄν $\tau=\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ καί ν τό πλῆθος τῶν ἄνισων θετικῶν ἀριθμῶν $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$

Απόδειξη

Στήν άρχή ύποθέτουμε ὅτι οἱ α,β,γ,... εἶναι ἀκέραιοι. Ἔχουμε κατά τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy:

$$\underbrace{[(\tau-\alpha)+(\tau-\alpha)+\ldots]}_{\alpha\ \text{προσθετέοι}}\ \underbrace{[(\tau-\beta)+(\tau-\beta)+\ldots+(\tau-\beta)]}_{\beta\ \text{προσθετέοι}}+\ldots \longrightarrow$$

$$\alpha+\beta+\ldots \sqrt{(\tau-\alpha)^{\alpha}(\tau-\beta)^{\beta}\ldots} \Longrightarrow$$

$$\left[\frac{\Sigma\alpha(\tau-\alpha)}{\tau}\right]^{\tau}>(\tau-\alpha)^{\alpha}(\tau-\beta)^{\beta}\ldots \qquad (1)$$

Ἀλλά $\Sigma\alpha(\tau-\alpha)=\tau^2-\Sigma\alpha^2$ καί $\tau^2-\Sigma\alpha^2<\frac{\nu-1}{\nu}\tau^2$ ἄν $\nu\Sigma\alpha^2>(\alpha+\beta+\ldots)^2$

$\Longrightarrow\Sigma(\alpha-\beta)^2>0$ πού ἰσχύει.

Ἐπειδή $\Sigma\alpha(\tau-\alpha)<\frac{\nu-1}{\nu}\tau^2$ ἔχουμε: $\left[\frac{(\nu-1)\tau}{\nu}\right]^{\tau}>\left[\frac{\Sigma\alpha(\tau-\alpha)}{\tau}\right]^{\tau}$ (2)

Ἀπό τίς (1) καί (2) $\Longrightarrow (\frac{\tau}{\nu})^{\tau}>(\frac{\tau-\alpha}{\nu-1})^{\alpha}(\frac{\tau-\beta}{\nu-1})^{\beta}\ldots$

Ἄν οἱ α,β,... δέν εἶναι ἀκέραιοι, τότε οἱ λα, λβ,... εἶναι ὅλοι ἀκέραιοι καί τότε ἔχουμε:

$$(\frac{\lambda\tau}{\nu})^{\lambda\tau}>(\frac{\lambda\tau-\lambda\alpha}{\nu-1})^{\lambda\alpha}(\frac{\lambda\tau-\lambda\beta}{\nu-1})^{\lambda\beta}\ldots\Longrightarrow(\frac{\tau}{\nu})^{\tau}>(\frac{\tau-\alpha}{\nu-1})^{\alpha}(\frac{\tau-\beta}{\nu-1})^{\beta}\ldots$$

195. Ἄν οἱ $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in R^+$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$x_1x_2\ldots x_\nu\geq[x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}-(\nu-2)x_\nu]\,[x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-2}-(\nu-2)x_{\nu-1}+x_\nu]\ldots$
$[-(\nu-2)x_1+x_2+\ldots+x_\nu]$.

Απόδειξη

Θέτουμε:

$$\left.\begin{array}{l}
-(\nu-2)x_1+x_2+\ldots+x_\nu=k_1\\
x_1-(\nu-2)x_2+x_3+\ldots+x_\nu=k_2\\
x_1+x_2-(\nu-2)x_3+\ldots+x_\nu=k_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{\nu-2}-(\nu-2)x_{\nu-1}+x_\nu=k_{\nu-1}\\
x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{\nu-1}-(\nu-2)x_\nu=k_\nu
\end{array}\right\}(1)$$

Ἀπό τίς (1) παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l}
k_1+k_2+\ldots+k_{\nu-1}=(\nu-1)x_\nu\\
k_1+k_2+\ldots+k_{\nu-2}+k_\nu=(\nu-1)x_{\nu-1}\\
k_1+k_2+\ldots+k_{\nu-2}+k_{\nu-1}+k_\nu=x_{\nu-2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_2+k_3+\ldots+k_\nu=(\nu-1)x_1
\end{array}\right\}(2)$$

κατά τήν άνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε ἀπό τήν πρώτη τῶν (2):

$$\frac{k_1+k_2+\ldots+k_{\nu-1}}{\nu-1}\geqslant\sqrt[\nu-1]{k_1k_2\ldots k_{\nu-1}} \Longrightarrow x_\nu\geqslant\sqrt[\nu-1]{k_1k_2\ldots k_{\nu-1}}$$

Ὅμοια ἔχουμε:

$$\frac{k_1+k_2+\ldots+k_{\nu-2}+k_\nu}{\nu-1}\geqslant\sqrt[\nu-1]{k_1k_2\ldots k_{\nu-2}k_\nu} \Longrightarrow x_{\nu-1}\geqslant\sqrt[\nu-1]{k_1k_2\ldots k_{\nu-2}k_\nu}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{k_2+k_3+\ldots+k_\nu}{\nu-1}\geqslant\sqrt[\nu-1]{k_2k_3\ldots k_\nu} \Longrightarrow x_1\geqslant\sqrt[\nu-1]{k_1k_2\ldots k_{\nu-2}k_\nu}$$

Πολ/ζουμε αὐτές κατά μέλη καί βρίσκουμε:

$x_1x_2\ldots x_\nu\geqslant\left[-(\nu-2)x_1+x_2+\ldots+x_\nu\right]\left[x_1-(\nu-2)x_2+x_3+\ldots+x_\nu\right]\ldots$

$\left[x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}-(\nu-2)x_\nu\right]$.

196. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_\nu^3-3x_1x_2x_3-\ldots-3x_1x_2x_\nu-\ldots-3x_{\nu-2}x_{\nu-1}x_\nu=$

$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2-x_1x_2-x_1x_3-\ldots-x_1x_\nu-x_2x_3-\ldots-x_{\nu-1}x_\nu)$ (1)

ἄν οἱ $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in R$ ἤ C.

Ἀπόδειξη

Γιά $\nu=3$ ἡ (1) γίνεται:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)$$

πού ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa\in N\geqslant 3$ δηλ. ὅτι:

$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_\kappa^3-3x_1x_2x_3-\ldots-3x_1x_2x_\kappa-\ldots-3x_{\kappa-2}x_{\kappa-1}x_\kappa=$

$(x_1+x_2+\ldots+x_\kappa)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_1x_\kappa-\ldots-x_{\kappa-1}x_\kappa)$ (2)

Θά δείξουμε μέ τήν προϋπόθεση (2) ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι:

$(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_\kappa^3+x_{\kappa+1}^3-3x_1x_2x_3-\ldots-3x_1x_2x_\kappa-3x_1x_2x_{\kappa+1}-\ldots-3x_{\kappa-1}x_\kappa x_{\kappa+1})=$

$(x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1})(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\kappa^2+x_{\kappa+1}^2-x_1x_2-\ldots-x_1x_\kappa-x_1x_{\kappa+1}-$

$-\ldots-x_\kappa x_{\kappa+1})$ (3)

Θέτουμε: $S_1=x_1+x_2+\ldots+x_{\kappa-1}+x_\kappa$, $S_2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{\kappa-1}^2+x_\kappa^2$,

$S_3=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{\kappa-1}^3+x_\kappa^3$, $S_1'=x_1+x_2+\ldots+x_\kappa+x_{\kappa+1}=S_1+x_{\kappa+1}$,

$S_2'=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\kappa^2+x_{\kappa+1}^2=S_2+x_{\kappa+1}^2$, $S_3'=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_\kappa^3+x_{\kappa+1}^3=S_3+x_{\kappa+1}^3$

$\Sigma_1=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_\kappa+x_2x_3+\ldots+x_{\kappa-1}x_\kappa$,

$\Sigma_2=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_1x_2x_\kappa+\ldots+x_{\kappa-2}x_{\kappa-1}x_\kappa$,

$\Sigma_1'=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_\kappa+x_1x_{\kappa+1}+\ldots+x_\kappa x_{\kappa+1}=\Sigma+x_{\kappa+1}S_1$

$\Sigma_2'=x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2x_\kappa+x_1x_2x_{\kappa+1}+\ldots+x_{\kappa-1}x_\kappa x_{\kappa+1}=\Sigma_2+x_{\kappa+1}\Sigma_1$

καί τότε οἱ (2) καί (3) γράφονται:

$S_3-3\Sigma_2=S_1(S_2-S_1)$ (2′) $S_3'-3\Sigma_2'=S_1'(S_2'-\Sigma_1')$ (3′)

καί τότε ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς (3′), ἄν ἰσχύει ἡ (2′).

Ἐπειδή $(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^2=\Sigma x_1^2+2\Sigma x_1x_2$ θά εἶναι $S_1^2=S_2+2\Sigma_1$ ἤ $2\Sigma_1+S_2-S_1^2=0$.

Γιά νά ἀληθεύει ἡ (3′) πρέπει καί ἀρκεῖ:

$S_3+x_{\kappa}^3+_1-3\Sigma_2-3\Sigma_1x_{\kappa+1}=(S_1+x_{\kappa+1})(S_2+x_{\kappa}^2+_1-\Sigma_1-S_1x_{\kappa+1})$ ἤ

$S_3-3\Sigma_2+x_{\kappa}^3+_1-3\Sigma_1x_{\kappa+1}=$

$S_1S_2+S_1x_{\kappa}^2+_1-S_1\Sigma_1-S_1^2x_{\kappa}^2+_1+S_2x_{\kappa+1}+x_{\kappa}^3+_1-\Sigma_1x_{\kappa}+_1-S_1x_{\kappa}^2+_1$ ἤ

$S_3-3\Sigma_2-S_1S_2-S_1\Sigma_1+x_{\kappa+1}(2\Sigma_1+S_2-S_1^2)$ ἤ

$S_3-3\Sigma_2=S_1(S_2-\Sigma_1)+x_{\kappa+1}(2\Sigma_1+S_2-S_1)^2$ καί ἐπειδή $2\Sigma_1+S_2-S_1^2=0$ ἕπεται ὅτι $S_3-3\Sigma_2=S_1(S_2-\Sigma_1)$.

Ἄρα ἄν ἰσχύει ἡ (2′) θά ἰσχύει καί ἡ (3′), δηλ. ἡ (1) θά ἰσχύει γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N\geqslant 3$.

197. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+}}}}\ldots$ (1) καί

$$\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+}}}}\ldots \qquad (2)$$

πού στά δεύτερα μέλη ὑπάρχουν ν ἀλλεπάλληλα ριζικά $\forall\nu\in N$.

Ἀπόδειξη

α) Γιά $\nu=1$ ἔχουμε $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε: $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^3}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$. Ἔστω δηλ. ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+}}}\ldots \quad (\kappa \text{ ριζικά}).$$

Τότε: $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+2}}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}}=$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ($\kappa+1$ ριζικά).

Δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

β) Γιά $\nu=1$ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=\kappa$. Τότε:

$$\eta\mu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+}}}\ldots \quad (\kappa \text{ ριζικά}).$$

Ἄρα $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}=\sqrt{1-\eta\mu^2\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+}}\ldots\right)}$ ($\kappa-1$ ριζικά

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}$ (κ ριζικά), άρα καί $\eta\mu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$ (κ+1 ριζικά).

Δηλ. ή (2) ίσχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί $\forall\nu\in N$.

198 Νά δειχτεῖ ὅτι $\forall\nu\in R$ εἶναι $2^{\sigma\upsilon\nu\nu}+2^{\eta\mu\nu}\geqslant 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Πότε ἰσχύει τό ἴσον;

Ἀπόδειξη

Ἀπό τήν ἀνίσωση τοῦ Cauchy ἔχουμε:

$$2^{\sigma\upsilon\nu\nu}+2^{\eta\mu\nu}\geqslant 2\sqrt{2^{\sigma\upsilon\nu\nu+\eta\mu\nu}} \qquad (1)$$

καί ἐπειδή $\sigma\upsilon\nu\nu+\eta\mu\nu\geqslant-\sqrt{2}$ (2) θά ἔχουμε $\sqrt{2^{\sigma\upsilon\nu\nu+\eta\mu\nu}}\geqslant\sqrt{2^{-\sqrt{2}}}$

Ἄρα $2^{\sigma\upsilon\nu\nu}+2^{\eta\mu\nu}\geqslant 2\sqrt{2^{-\sqrt{2}}}=2\cdot 2^{-\sqrt{2}/2}=2^{1-\sqrt{2}/2}$

Τό ἴσον ἰσχύει ὅταν συγχρόνως ἰσχύουν οἱ (1) καί (2) δηλ. ὅταν $\sigma\upsilon\nu\nu+\eta\mu\nu=-\sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$ (3). Λύνουμε αὐτές καί βρίσκουμε τίς ζητούμενες τιμές. Ἡ (2) δίνει $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}$ ἡ δέ (3) $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$. Οἱ κοινές λύσεις τους εἶναι $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}$ πού $\kappa\in Z$.

199. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\left|\frac{\eta\mu\lambda x}{\eta\mu x}\right|\leqslant\lambda$ (1) $\forall\lambda\in N\wedge x\neq\kappa\pi$.

Ἀπόδειξη

Ἡ (1) γιά λ=1 γίνεται $|1|=1$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά λ=κ∈N δηλ. $\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|\leqslant\kappa$ (2). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά λ=κ+1 δηλ. ὅτι: $\left|\frac{\eta\mu(\kappa+1)x}{\eta\mu x}\right|\leqslant\kappa+1$ (3) $\Longrightarrow$ $\left|\frac{\eta\mu(\kappa+1)x}{\eta\mu x}\right|-\kappa\leqslant 1$ (4)

Λόγω τῆς (4) εἶναι: $\left|\frac{\eta\mu(\kappa+1)x}{\eta\mu x}\right|-\kappa\leqslant\left|\frac{\eta\mu(\kappa+1)x}{\eta\mu x}\right|-\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|$.

Ἀρκεῖ λοιπόν ἀντί τῆς (4) νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\left|\frac{\eta\mu(\kappa+1)x}{\eta\mu x}\right|-\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|\leqslant 1 \qquad (5).$$

Ἡ (5) γράφεται: $A=\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\kappa x\right|-\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|\leqslant 1$ (6)

Ἀλλά $\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\kappa x\right|-\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|\leqslant\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|\left|\sigma\upsilon\nu x\right|+\left|\sigma\upsilon\nu\kappa x\right|-\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|=$

$=\left[\left|\sigma\upsilon\nu x\right|-1\right]\left|\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu x}\right|+\left|\sigma\upsilon\nu\kappa x\right|$ καί ἐπειδή $\left|\sigma\upsilon\nu x\right|-1\leqslant 0$ θά ἔχουμε:

$A\leqslant\left|\sigma\upsilon\nu\kappa x\right|$ ἤ ἐπειδή $\left|\sigma\upsilon\nu\kappa x\right|\leqslant 1$ θά εἶναι $A\leqslant 1$.

Ἄρα ἰσχύει ἡ (6). Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

200. Ἄν $2\sigma\upsilon\nu x=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παράστασης $2\sigma\upsilon\nu(3^{\nu}x)$ (1) $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Η (1) για ν=1 γίνεται: $2\sigma\upsilon\nu 3x=2(4\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu x)=$

$$2^3\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x-3\cdot 2\sigma\upsilon\nu x=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3},$$

και για ν=2 γίνεται: $2\sigma\upsilon\nu 9x=2(4\sigma\upsilon\nu^3 3x-3\sigma\upsilon\nu 3x)=(2\sigma\upsilon\nu x)^3-2\cdot 3\sigma\upsilon\nu x=$

$$=\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)^3-3\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)=\alpha^9+\frac{1}{\alpha^9}.$$

Δηλ. οι εκθέτες του α προχωρούν αυξανόμενοι, ίσως κατά γεωμετρική πρόοδο. Αν συμβαίνει αυτό, θά είναι:

$$2\sigma\upsilon\nu(3^\nu x)=\alpha^{3^\nu}+\frac{1}{\alpha^{3^\nu}}$$

Για ν=1 έχουμε: $2\sigma\upsilon\nu 3x=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}$. Έστω ότι η (2) ισχύει για ν=κ δηλ. ότι: $2\sigma\upsilon\nu(3^\kappa x)=\alpha^{3^\kappa}+\frac{1}{\alpha^{3^\kappa}}$. Θά δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1, δηλ. ότι: $2\sigma\upsilon\nu(3^{\kappa+1}x)=\alpha^{3^{\kappa+1}}+\frac{1}{\alpha^{3^{\kappa+1}}}$.

Πράγματι έχουμε: $2\sigma\upsilon\nu(3^{\kappa+1}x)\cdot 2\sigma\upsilon\nu[3(3^\kappa x)]=2[4\sigma\upsilon\nu^3(3^\kappa x)-3\sigma\upsilon\nu(3^\kappa x)]=$

$$=[2\sigma\upsilon\nu(3^\kappa x)]^3-3\cdot 2\sigma\upsilon\nu(3^\kappa x)=\left(\alpha^{3^\kappa}+\frac{1}{\alpha^{3^\kappa}}\right)^3-3\left(\alpha^{3^\kappa}+\frac{1}{\alpha^{3^\kappa}}\right)=$$

$$=\alpha^{3^{\kappa+1}}+\frac{1}{\alpha^{3^{\kappa+1}}}.$$

201. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 4\alpha\cdot\ldots\ \sigma\upsilon\nu 2^\nu\alpha=\frac{\eta\mu 2^{\nu+1}\alpha}{2^{\nu+1}\eta\mu\alpha}\qquad(1)\qquad\forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Για ν=0 η (1) γίνεται $\Pi_0=\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}=\sigma\upsilon\nu\alpha$. Για ν=1 έχουμε: $\Pi_1=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{\eta\mu 4\alpha}{4\eta\mu\alpha}=\frac{4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{4\eta\mu\alpha}=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$. Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ δηλ. $\Pi_\kappa=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha\ldots\sigma\upsilon\nu 2^\kappa\alpha=\frac{\eta\mu 2^{\kappa+1}\alpha}{2^{\kappa+1}\eta\mu\alpha}$. Θά δείξουμε μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ότι ισχύει και για ν=κ+1. Πράγματι:

$$\Pi_{\kappa+1}=\Pi_\kappa\sigma\upsilon\nu(2^{\kappa+1}\alpha)\implies\Pi_{\kappa+1}=\frac{\eta\mu 2^{\kappa+1}\alpha}{2^{\kappa+1}\eta\mu\alpha}\sigma\upsilon\nu 2^{\kappa+1}\alpha=$$

$$\frac{\eta\mu 2^{\kappa+1}\alpha}{2^{\kappa+1}\eta\mu\alpha}\cdot\frac{2\sigma\upsilon\nu 2^{\kappa+1}\alpha}{2}=\frac{2\eta\mu 2^{\kappa+1}\alpha\sigma\upsilon\nu 2^{\kappa+1}\alpha}{2\cdot 2^{\kappa+1}\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu[2\cdot 2^{\kappa+1}\alpha]}{2^{\kappa+2}\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu(2^{\kappa+2}\alpha)}{2^{\kappa+2}\eta\mu\alpha}.$$

202. Νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha_\nu=\sigma\upsilon\nu\nu\theta$, ἄν $\alpha_1=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha_2=\sigma\upsilon\nu 2\theta$ καί για $\kappa\in Z$ ὑπάρχει ἡ σχέση $\alpha_\kappa=2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\alpha_{\kappa-1}-\alpha_{\kappa-2}$.

Απόδειξη

Η πρόταση ισχύει για ν=1 και ν=2.

Έστω $\alpha_{\kappa-2}=\sigma\upsilon\nu(\kappa-2)\theta$, $\alpha_{\kappa-1}=\sigma\upsilon\nu(\kappa-1)\theta$.

Τότε $\alpha_\kappa=2\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu(\kappa-1)\theta-\sigma\upsilon\nu(\kappa-2)\theta=\sigma\upsilon\nu\kappa\theta$. Άρα η πρόταση ισχύει $\forall\nu\in N$.

203. Να δειχτεί ότι:

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha+\ldots+\eta\mu\nu\alpha=\frac{\eta\mu\frac{\nu+1}{2}\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}\cdot\eta\mu\frac{\nu\alpha}{2} \qquad (1) \quad \forall\nu\in N$$

Απόδειξη

Για ν=1 η (1) ισχύει. Έστω ότι ισχύει για ν=κ∈N δηλ. ότι

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha+\ldots\eta\mu\kappa\alpha=\frac{\eta\mu\frac{\kappa+1}{2}\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}\cdot\eta\mu\frac{\kappa\alpha}{2} \qquad (2).$$

θά δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1. Προσθέτουμε και στά δύο μέλη της (2) τό $\eta\mu(\kappa+1)\alpha$ και έχουμε:

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha+\ldots+\eta\mu\kappa\alpha+\eta\mu(\kappa+1)\alpha=\frac{\eta\mu\frac{\kappa+1}{2}\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}\cdot\eta\mu\frac{\kappa\alpha}{2}+\eta\mu(\kappa+1)\alpha=$$

$$\frac{\eta\mu\frac{\kappa+1}{2}\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}\cdot\eta\mu\frac{\kappa\alpha}{2}+2\eta\mu\frac{\kappa+1}{2}\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\kappa+1}{2}\alpha=\frac{\eta\mu\frac{\kappa+2}{2}\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}\cdot\eta\mu\frac{\kappa+1}{2}\alpha,$$

γιατί $2\sigma\upsilon\nu\frac{\kappa+1}{2}\alpha\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\eta\mu\frac{\kappa+2}{2}\alpha-\eta\mu\frac{\kappa\alpha}{2}$.

Άρα η (1) ισχύει και για ν=κ+1, άρα και $\forall\nu\in N$.

204. Να δειχτεί ότι:

$$\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\ldots+\sigma\upsilon\nu\nu\alpha=\frac{\eta\mu\frac{2\nu+1}{2}\alpha}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \qquad (1) \qquad \forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Για ν=1 η (1) ισχύει, γιατί $\frac{\eta\mu\frac{3\alpha}{2}}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}+\left(\eta\mu\frac{3\alpha}{2}-\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu\alpha.$

Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ∈N δηλ.

$$1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\ldots+\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha=\frac{\eta\mu\frac{2\kappa+1}{2}\alpha}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \qquad (1).$$

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Προσθέτουμε στά μέλη τῆς (2) τό συν(κ+1)α καί ἔχουμε:

$$\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\ldots+\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha+\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha=\frac{\eta\mu\frac{2\kappa+1}{2}\alpha}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}+\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha=$$

$$=\frac{\eta\mu\frac{2\kappa+1}{2}\alpha+2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{2\kappa+1}{2}\alpha+\left(\eta\mu\frac{2\kappa+3}{2}\alpha-\eta\mu\frac{2\kappa+1}{2}\alpha\right)}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\eta\mu\frac{2\kappa+3}{2}\alpha}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}},\quad \text{δηλ. ἰσχύει καί γιά } \nu=\kappa+1, \text{ ἄρα καί } \forall\nu\in N.$$

205. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\eta\mu\alpha+2\eta\mu 2\alpha+3\eta\mu 3\alpha+\ldots\nu\eta\mu\nu\alpha=\frac{(\nu+1)\eta\mu\nu\alpha-\nu\eta\mu(\nu+1)\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}\quad (1)\ \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) ἰσχύει, ἐπειδή $\frac{2\eta\mu\alpha-\eta\mu 2\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=\eta\mu\alpha.$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ὅτι

$$\eta\mu\alpha+2\eta\mu 2\alpha+3\eta\mu 3\alpha+\ldots+\kappa\eta\mu\kappa\alpha=\frac{(\kappa+1)\eta\mu\kappa\alpha-\kappa\eta\mu(\kappa+1)\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}\qquad (2)$$

θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Προσθέτουμε στά δύο μέλη τῆς (2) τό (κ+1)ημ(κ+1)α καί ἔχουμε:

$$\eta\mu\alpha+2\eta\mu 2\alpha+\ldots+\kappa\eta\mu\kappa\alpha+(\kappa+1)\eta\mu(\kappa+1)\alpha=$$

$$=\frac{(\kappa+1)\eta\mu\kappa\alpha-\kappa\eta\mu(\kappa+1)\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}+(\kappa+1)\eta\mu(\kappa+1)\alpha=$$

$$=\frac{(\kappa+1)\eta\mu\kappa\alpha-\kappa\eta\mu(\kappa+1)\alpha+2(\kappa+1)\eta\mu(\kappa+1)\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(\kappa+2)\eta\mu(\kappa+1)\alpha+(\kappa+1)\eta\mu\kappa\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\kappa+1)\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(\kappa+2)\eta\mu(\kappa+1)\alpha-(\kappa+1)\eta\mu\kappa\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{(\kappa+1)\left[\eta\mu(\kappa+2)\alpha+\eta\mu\alpha\right]}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(\kappa+2)\eta\mu(\kappa+1)\alpha-(\kappa+1)\eta\mu(\kappa+2)\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}},$$

δηλ. ή (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall \nu\in N$.

206. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\ldots+\nu\sigma\upsilon\nu\nu\alpha=\frac{(\nu+1)\sigma\upsilon\nu\nu\alpha-\nu\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\alpha-1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}} \quad (1) \quad \forall\nu\in N.$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) ἰσχύει γιατί $\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha-1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha-2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\ldots\kappa\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha=\frac{(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha-\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha-1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1. Προσθέτουμε στά μέλη τῆς (2) τό $(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha$ καί ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\ldots+\kappa\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha+(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha=$$

$$=\frac{(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha-\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha-1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}+(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha=$$

$$=\frac{(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha-\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha-1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(\kappa+2)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha+(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha+1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(\kappa+2)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha+(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{(\kappa+1)\left[\sigma\upsilon\nu(\kappa+2)\alpha+\sigma\upsilon\nu\kappa\alpha\right]+1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(\kappa+2)\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha-(\kappa+1)\sigma\upsilon\nu(\kappa+2)\alpha-1}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

207. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{1}{2^\nu}=\frac{1}{2^\nu}\sigma\varphi\frac{1}{2^\nu}-\sigma\varphi\alpha \quad (1),$$

ὅταν $\alpha\neq\kappa\pi$ καί $\nu\in N$.

Απόδειξη

Για ν=1 η (1) ισχύει δηλ. $\frac{1}{2}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\sigma\varphi\alpha=\frac{1}{2}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}=\frac{\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}=$

$=\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$. Έστω ότι η (1) ισχύει για ν=κ∈N δηλ. ότι:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\kappa}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\kappa}=\frac{1}{2^\kappa}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\kappa}-\sigma\varphi\alpha \qquad (2).$$

Θά δείξουμε ότι ισχύει καί γιά ν=κ+1, Προσθέτουμε στά μέλη τῆς (1) τό $\frac{1}{2^{\kappa+1}}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}$ καί έχουμε:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\kappa}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\kappa}+\frac{1}{2^{\kappa+1}}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^\kappa}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\kappa}-\sigma\varphi\alpha+\frac{1}{2^{\kappa+1}}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}=\frac{1}{2^{\kappa+1}}\cdot\frac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}-1}{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}}+\frac{1}{2^{\kappa+1}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}}-\sigma\varphi\alpha=$$

$$=\frac{1}{2^{\kappa+1}}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\kappa+1}}-\sigma\varphi\alpha\ .$$

Άρα η (1) ισχύει καί γιά ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N.

208. Νά δειχτεῖ ότι:

$$\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}+\frac{2\eta\mu 2x}{2\sigma\upsilon\nu 2x-1}+\ldots+\frac{2^{\nu-1}\eta\mu 2x^{\nu-1}}{2\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}2x-1}=$$

$$=\frac{2^\nu\eta\mu 2^\nu x}{2\sigma\upsilon\nu 2^\nu x-1}\quad\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1} \qquad (1) \qquad \forall\nu\in N.$$

Απόδειξη

Για ν=1 έχουμε $\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}=\frac{2\eta\mu 2x}{2\sigma\upsilon\nu 2x+1}-\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x+1}=$

$$=\eta\mu x\left[\frac{4\sigma\upsilon\nu x}{4\sigma\upsilon\nu^2 x-1}-\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu x+1}\right]=\eta\mu x\ \frac{2\sigma\upsilon\nu x+1}{4\sigma\upsilon\nu^2 x-1}=\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1} \qquad (2)$$

πού ισχύει. Έστω ότι η (1) ισχύει γιά ν=κ∈N δηλ. ότι $A_\kappa=B_\kappa$ (A_κ καί B_κ εἶναι τό πρῶτο καί δεύτερο μέλος τῆς (1) γιά ν>κ). Θά δείξουμε ὅτι ή (1) ισχύει καί γιά ν=κ+1, δηλ. ότι $A_{\kappa+1}=B_{\kappa+1}$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ότι $A_{\kappa+1}-A_\kappa=B_{\kappa+1}-B_\kappa$ (3).

Ἀλλά $A_{\kappa+1}-A_\kappa=\frac{2^\kappa\eta\mu 2^\kappa x}{2\sigma\upsilon\nu 2^\kappa x-1}=\frac{2^\kappa\eta\mu y}{2\sigma\upsilon\nu y-1}$ (βάλαμε ὅπου $2^\kappa x=y$) καί

$$B_{\kappa+1}-B_\kappa=\frac{2^{\kappa+1}\eta\mu 2^{\kappa+1}x}{2\sigma\upsilon\nu 2^{\kappa+1}x+1}-\frac{2^\kappa\eta\mu 2^\kappa x}{2\sigma\upsilon\nu 2^\kappa x+1}=\frac{2^{\kappa+1}\eta\mu 2y}{2\sigma\upsilon\nu 2y+1}-\frac{2^\kappa\eta\mu y}{2\sigma\upsilon\nu y+1} \qquad (5)$$

Ἡ (3) λόγω τῶν (4) καί (5) γίνεται:

$$\frac{\eta\mu y}{2\sigma\upsilon\nu y-1}=\frac{2\eta\mu 2y}{2\sigma\upsilon\nu 2y+1}-\frac{\eta\mu y}{2\sigma\upsilon\nu y+1}$$

πού ισχύει. Ἀρα η (1) ισχύει ∀ν∈N.

209. Νά δειχτεῖ ὅτι $\prod_{\nu=1}^{\nu} \sigma\upsilon\nu 2^{-\nu}x=\frac{2\eta\mu x}{\eta\mu 2^{-\nu}x}$ (1)$\forall\nu\in N\wedge\eta\mu 2^{-\nu}x\neq 0$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε $\sigma\upsilon\nu 2^{-1}x=\frac{2^{-1}\eta\mu x}{\eta\mu 2^{-1}x}=2^{-1}\frac{2\eta\mu 2^{-1}x\sigma\upsilon\nu 2^{-1}x}{2\eta\mu 2^{-1}x}=\sigma\upsilon\nu 2^{-1}x$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=1. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ∈N δηλ.

$$\prod_{\kappa=1}^{\nu} \sigma\upsilon\nu 2^{-\kappa}x=\frac{2^{-\kappa}\eta\mu x}{\eta\mu 2^{-\kappa}x} \qquad (2)$$

θά δείξουμε πώς ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι

$$\prod_{\kappa=1}^{\kappa+1} \sigma\upsilon\nu 2^{-\kappa}x=2^{-\kappa-1}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2^{-\kappa-1}x} \qquad (3)$$

Διαιροῦμε τίς (3) καί (2) κατά μέλη καί βρίσκουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2^{-\kappa-1}x=\frac{2^{-\kappa-1}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2^{-\kappa-1}x}}{2^{-\kappa}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2^{-\kappa}x}}=2^{-1}\frac{\eta\mu 2^{-\kappa}x}{\eta\mu 2^{-\kappa-1}x}=$$

$$=\frac{2^{-1}2\eta\mu 2^{-\kappa-1}x\sigma\upsilon\nu 2^{-\kappa-1}x}{\eta\mu 2^{-\kappa-1}x}=\sigma\upsilon\nu 2^{-\kappa-1}x.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=κ+1, ἄρα καί $\forall\nu\in N$.

210. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \sigma\upsilon\nu(2\kappa-1)x=\frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}$ (1) $\forall\nu\in N\wedge\eta\mu x\neq 0$.

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἔχουμε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x$. Δηλ. ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=1. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά ν=ν∈N. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ν=κ+1 δηλ. ὅτι $\sum_{\kappa=1}^{\nu+1}(2\kappa-1)x=\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{2\eta\mu x}$ (2)

Προσθέτουμε στά μέλη τῆς (1) τό $\sigma\upsilon\nu(2\nu+1)x$ καί ἔχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu(2\kappa-1)x+\sigma\upsilon\nu(2\nu+1)x=\frac{\eta\mu 2\nu x}{2\eta\mu x}+\sigma\upsilon\nu(2\nu+1)x=$$

$$=\frac{\eta\mu 2\nu x}{2\eta\mu x}+\frac{2\sigma\upsilon\nu(2\nu+1)x\eta\mu x}{2\eta\mu x}=\frac{\eta\mu 2\nu x+\eta\mu(2\nu+1+1)x-\eta\mu(2\nu+1-1)x}{2\eta\mu x}=$$

$$=\frac{\eta\mu 2\nu x+\eta\mu 2(\nu+1)x-\eta\mu 2\nu x}{2\eta\mu x}=\frac{\eta\mu 2(\nu+1)x}{2\eta\mu x}$$ δηλ. ἡ (2).

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

211. Νά δειχτεῖ ὅτι $\forall\nu\in N$ εἶναι:

$$\eta\mu\frac{\pi}{3}+\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\ldots+\eta\mu\frac{\nu\pi}{3}=2\eta\mu\frac{\nu\pi}{6}\eta\mu\frac{(\nu+1)\pi}{6} \qquad (1).$$

Ἀπόδειξη

Γιά ν=1 ἡ (1) γίνεται: $\eta\mu\frac{\pi}{3}=2\eta\mu\frac{\pi}{6}\eta\mu\frac{\pi}{6}$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ

(1) ισχύει για ν=κ∈N. Θά δείξουμε ότι ισχύει καί για ν=κ+1.

Έχουμε: $\eta\mu\frac{\pi}{3}+\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\ldots+\eta\mu\frac{\kappa\pi}{3}+\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{3}=2\eta\mu\frac{\kappa\pi}{6}\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}+\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}=$

$=2\eta\mu\frac{\kappa\pi}{6}\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}+2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}=$

$=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot\left[\eta\mu\frac{\kappa\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\right]=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot 2\eta\mu\frac{\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{(\kappa-1)\pi}{6}=$

$=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{(\kappa-1)\pi}{6}=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot\eta\mu\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(\kappa-1)\pi}{6}\right]=$

$=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot\eta\mu\frac{(4-\kappa)\pi}{6}=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot\eta\mu\left[\pi-\frac{(4-\kappa)\pi}{6}\right]=$

$=2\eta\mu\frac{(\kappa+1)\pi}{6}\cdot\eta\mu\frac{(\kappa+2)\pi}{6}.$

Άρα ή (1) ισχύει καί για ν=κ+1, άρα καί ∀ν∈N.

212. Νά δειχτεί ότι:

$$\text{τοξσφ3}+\text{τοξσφ5}+\ldots+\text{τοξσφ}(2\nu+1)=$$

$$\text{τοξεφ2}+\text{τοξεφ}\frac{3}{2}+\ldots+\text{τοξεφ}\frac{\nu+1}{\nu}-\nu\,\text{τοξεφ1} \qquad (1).$$

Απόδειξη

Έχουμε $\varepsilon\varphi(\text{τοξεφ2}-\text{τοξεφ1})=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{τοξεφ2}-\text{τοξεφ1}=$

$=\text{τοξεφ}\frac{1}{3}=\text{τοξσφ3}$. Άρα ή (1) ισχύει για ν=1.

Δείχνουμε ακόμη ότι: $\text{τοξσφ}(2\kappa+3)=\text{τοξ}\,\varepsilon\varphi\frac{\kappa+2}{\kappa+1}-\text{τοξεφ1}$ (2)

Πράγματι: $\varepsilon\varphi(\text{τοξεφ}\frac{\kappa+2}{\kappa+1}-\text{τοξεφ1})=\frac{\frac{\kappa+2}{\kappa+1}-1}{1-\frac{\kappa+2}{\kappa+1}}=\frac{1}{2\kappa+3}.$

Άρα $\text{τοξεφ}\frac{1}{2\kappa+3}=\text{τοξσφ}(2\kappa+3)=\text{τοξεφ}\frac{\kappa+2}{\kappa+1}-\text{τοξεφ1}.$

Έστω ότι ή (1) ισχύει για ν=κ δηλ. ότι:

$$\text{τοξσφ3}+\text{τοξσφ5}+\ldots+\text{τοξσφ}(2\kappa+1)=$$

$$=\text{τοξεφ2}+\text{τοξεφ}\frac{3}{2}+\ldots+\text{τοξεφ}\frac{\kappa+1}{\kappa}-\kappa\,\text{τοξεφ1} \qquad (3)$$

θά δείξουμε πώς ισχύει καί για ν=κ+1 δηλ. ότι:

$$\text{τοξσφ3}+\text{τοξσφ5}+\ldots+\text{τοξσφ}(2\kappa+3)=$$

$$=\text{τοξεφ2}+\ldots+\text{τοξεφ}\frac{\kappa+2}{\kappa+1}-(\kappa+1)\,\text{τοξεφ1} \qquad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς (1) καί (2) καί βρίσκουμε τήν (4).

213. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\eta\mu\alpha_\kappa<\kappa\eta\mu\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa}{\kappa}$ (1)

πού $\alpha_\kappa\in[0,\pi]$ $\forall\nu\in N$.

Απόδειξη

Γιά $\nu=2$ ἔχουμε $\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2\leqslant 2\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (2) πού ἰσχύει γιατί $\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2=2\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ καί τότε ἡ (2) δίνει $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant 1$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\mu\in N$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=2\mu$. Ἔχουμε:

$$\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2+\ldots+\eta\mu\alpha_\mu\leqslant\mu\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}$$ καί

$$\eta\mu\alpha_{\mu+1}+\eta\mu\alpha_{\mu+2}+\ldots+\eta\mu\alpha_{2\mu}\leqslant\eta\mu\frac{\alpha_{\mu+1}+\ldots+\alpha_{2\mu}}{\mu}.$$

Προσθέτουμε αὐτές κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2+\ldots+\eta\mu\alpha_{\mu+1}+\ldots+\eta\mu\alpha_{2\mu}\leqslant\mu\left[\eta\mu\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}+\eta\mu\frac{\alpha_{\mu+1}+\ldots+\alpha_{2\mu}}{\mu}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\mu 2\eta\mu\frac{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}+\frac{\alpha_{\mu+1}+\ldots+\alpha_{2\mu}}{\mu}}{2}=2\mu\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\mu}}{2\mu}.$$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu=\mu+1$. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\mu$. Εἶναι: $\eta\mu\alpha_1+\ldots+\eta\mu\alpha_\mu+\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}\leqslant$

$$\leqslant(\mu+1)\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}}{\mu+1}=(\mu+1)\eta\mu\frac{(\mu+1)(\alpha_1+\ldots+\alpha_\mu)}{\mu(\mu+1)}=$$

$$(\mu+1)\eta\mu\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}\right)\Longrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2+\ldots+\eta\mu\alpha_\mu\leqslant\mu\eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}{\mu}.$$

Ἄρα ἡ (1) ἰσχύει $\forall\nu\in N$.

214. Οἱ $\alpha,\beta\in R^+$ καί $\alpha<\beta$. Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία τῶν ζευγῶν τῶν ἀριθμῶν (α_1,β_1), $(\alpha_2,\beta_2),\ldots,(\alpha_\nu,\beta_\nu)$ πού $\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta_1=\sqrt{\alpha_1\beta}$, $\alpha_2=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$, $\beta_2=\sqrt{\alpha_2\beta_1}$, ..., $\alpha_\nu=\frac{\alpha_{\nu-1}+\beta_{\nu-1}}{2}$, $\beta_\nu=\sqrt{\alpha_\nu\beta_{\nu-1}}$ καί $\alpha=\beta\sigma\upsilon\nu\varphi$ $(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$.

Νά δειχτεῖ ὅτι: $\beta_\nu=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\nu}$.

Απόδειξη

Ἔχουμε $\alpha_1=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\varphi+\beta}{2}=\frac{\beta(\sigma\upsilon\nu\varphi+1)}{2}=\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}$ καί

$$\beta_1=\sqrt{\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}\beta}=\sqrt{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}}=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2},$$

$$\alpha_2=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}+\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}}{2}=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}+1)}{2}=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}\quad\text{καί}$$

$$\beta_2=\sqrt{\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}}=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}$$

. . . . . .

$$\alpha_\nu=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2^\nu}\qquad(1)\qquad\text{καί}$$

$$\beta_\nu=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\nu}\qquad(2)$$

Ἀρκεῖ νά δείξουμε τίς (1) καί (2).

Γιά ν=1 ἔχουμε $\alpha_1=\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}$ καί $\beta_1=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}$ πού ἰσχύουν.

Ἔστω ὅτι οἱ (1) καί (2) ἰσχύουν γιά ν=κ∈ℕ. Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύουν καί γιά ν=κ+1.

Ἔχουμε: $\alpha_{\kappa+1}=\frac{\alpha_\kappa+\beta_\kappa}{2}=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2^\kappa}+\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}}{2}=$

$$=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}+1)}{2}=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^{\kappa+1}}$$

καί $\beta_{\kappa+1}=\sqrt{\alpha_{\kappa+1}\beta_\kappa}=$

$$=\sqrt{\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2^{\kappa+1}}\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}}=$$

$$=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^\kappa}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2^{\kappa+1}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ

Νά δειχτεῖ μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ὅτι:

215. $1+3+5+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$ $\forall \nu\in N.$

216. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+\nu(\nu+1)=\frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$ $\forall \nu\in N.$

217. $2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+\ldots(\nu+1)(\nu+2)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$ $\forall \nu\in N.$

218. $2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+\nu\cdot 2^{\nu-1}=2^\nu(\nu-1)$ $\forall \nu$ $N\geqslant 2.$

219. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(\nu-1)\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(3\nu^2-\nu-2)}{12}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

220. $3+7+11+\ldots+(4\nu-1)=\nu(2\nu+1)$ $\nu\in N\geqslant 1.$

221. $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2\nu)^2=\frac{2\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{3}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

222. $1\cdot 5+2\cdot 5^2+\ldots+\nu\cdot 5^2=\frac{5+(4\nu-1)5^{\nu+1}}{16}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

223. $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2\nu)^3=2\nu^2(\nu+1)^2$ $\forall \nu\in N\geqslant 1$

224. $1^4+2^4+\ldots+\nu^4=\frac{1}{30}\nu(\nu+1)(6\nu^3+9\nu^2+\nu-1)$ $\forall \nu\in N.$

225. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}=\frac{\nu(\nu+2)}{(\nu+1)^2}$ $\forall \nu\in N.$

226. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}=1-\frac{1}{2^\nu}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

227. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu-1}}=2-\frac{1}{2^{\nu-2}}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

228. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{\nu}{2^\nu}=2-\frac{\nu+2}{2^\nu}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

229. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu(\nu+3)}{4(\nu+1)(\nu+2)}$ $\forall \nu\in N\geqslant 1.$

230. $1\cdot 2+2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\nu(\nu+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}=$

$=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}(\nu^2+5\nu+8)$ $\forall \nu\in N.$

231. $\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{\nu(\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}+\ldots+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 2\cdot 1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots 2\nu}=\frac{1}{2}$ $\forall\nu\in N.$

232. $1+2(\nu-1)+2^2\frac{(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2}+2^3\frac{(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=$

$=-\frac{1}{3}\left[2^{\nu+1}+(-1)^{\nu}\right]$ $\forall\nu\in N.$

233. $1\cdot 2\cdot 3\ldots\mu+\ldots+(\nu-1)\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\mu-2)+\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\mu-1)=$

$=\frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\mu)}{\mu+1}$ $\forall\nu,\mu\in N.$

234. $1-3\nu+\frac{3\nu(3\nu-3)}{1\cdot 2}-\frac{3\nu(3\nu-4)(3\nu-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=2(-1)^{\nu}$ $\forall\nu\in N.$

235. $1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-3)2^{\nu-1}=\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-2)$ $\forall\nu\ N\geq 2.$

236. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $3^{4\nu+1}+10\cdot 3^{\nu}-13=$ πολ.260 $\forall\nu\in N.$

237. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $3\cdot 5^{2\nu+1}+2^{3\nu+1}=$ πολ.17 $\forall\nu\in N.$

238. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $9^{\nu}-8\nu-1=$ πολ.64 $\forall\nu\in N.$

239. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $2^{4(\nu+2)}-15\nu-31=$ πολ.225 $\forall\nu\in N.$

240. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $2^{7\nu-3}+3^{2\nu+3}\cdot 5^{4\nu+1}=$ πολ.23 $\forall\nu\in N.$

241. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $5^{2\nu+1}+2^{\nu+4}+2^{\nu+1}=$ πολ.23 $\forall\nu\in N.$

242. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}<2$ γιά ὁσαδήποτε ριζικά.

243. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $(\nu^2+1)^{2\nu}>\nu^{2\nu}(\nu-1)^{\nu-1}\cdot(\nu+1)^{\nu+1}$ $\forall\nu\in N.$

244. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ $2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu<(\nu+1)^{\nu}$ $\forall\nu\in N\geq 1.$

245. Νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{3\cdot 7\cdot 11\ldots(4\nu-1)}{5\cdot 9\cdot 13\ldots(4\nu+1)}>\sqrt{\frac{3}{4\nu+3}}$ $\forall\nu\in N.$

246. Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}<1$ καί ὅτι

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}<2$ $\forall\nu\in N\geq 1.$

247. Νά δειχτεῖ ὅτι $2^{\nu}>1+\nu\sqrt{2^{\nu-1}}$ $\forall\nu\in N.$

248. Νά δειχτεῖ ὅτι $2^{\nu}>\frac{\nu^2+\nu+2}{2}$ καί ὅτι $\sqrt[\nu]{\nu}<\sqrt[3]{3}$ $\forall\nu\in N\geq 3.$

249. Νά δειχτεῖ ὅτι $(\nu!)^2>\nu^{\nu}$ $\forall\nu\in N\geq 2.$

250. Νά δειχτεῖ ὅτι $3^{\nu-1}>\nu^2$ $\forall\nu\in N\geq 4$ καί ὅτι $2^{\nu}>3^{\nu}$ $\forall\nu\in N\geq 10.$

251. Νά δειχτεῖ ὅτι $\nu\alpha^{\nu-1}>\frac{\alpha^{\nu}-1}{\alpha-1}>\nu$ $\forall\nu\in N$ καί $\alpha>1.$

252. Νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha^{\nu}>1+\nu(\alpha-1)$ $\forall\nu\in N$ καί $\alpha<1.$

253. Να δειχτεί ότι $1+x+x^2+\ldots+x^\nu<\frac{1}{1-x}$ $\forall\nu\in N$ και $0<x<1$.

254. Να δειχτεί ότι $\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^\nu\geq 1-\frac{1}{\nu}$ $\forall\nu\in N$.

255. Να δειχτεί ότι $\left(\nu+\frac{2\nu}{4\nu^2+1}\right)^2<\nu^2+1<\left(\nu+\frac{2\nu+1}{4\nu^2+1}\right)^2$ $\forall\nu\in N$.

256. Να δειχτεί ότι $1+\frac{\alpha}{\nu(\alpha+1)}<\frac{1}{1-\frac{\alpha}{\nu(\alpha+1)}}<\sqrt[\nu]{\alpha+1}$ αν $\alpha\in R^+$ και $\nu\neq 0$.

257. Να δειχτεί ότι $\sqrt[3]{2}>\sqrt[\nu]{\nu}$ $\forall\nu\in N$ και $\nu\geq 10$.

258. Να δειχτεί ότι $2^{2^{\nu+1}}>3^\nu$ και $\left(\frac{4}{3}\right)^\nu>\frac{\nu+1}{2}$ $\forall\nu\in N$.

259. Να δειχτεί ότι $\sqrt[\nu]{\frac{x^{2\nu+1}+1}{x^{2\nu-1}}}>\frac{x}{x-1}$ αν $x>1$ και $\forall\nu\in N$.

260. Να δειχτεί ότι $\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}<1$ $\forall\nu\in N$.

261. Να δειχτεί ότι $\nu^{x+1}\frac{1}{+1}<1^x+2^x+\ldots+\nu^x<(\nu+1)^{x+1}\frac{1}{x+1}$ $\forall\nu\in N\geq 1$ και $x\in N$.

262. Να δειχτεί ότι $\frac{1}{3\nu^2}>\nu-\frac{1}{3\nu^2}-\sqrt[3]{\nu^3-1}>0$ $\forall\nu\in N\geq 1$.

263. Να δειχτεί ότι $(\nu^2+\nu+1)^\nu>(2\nu^2+1)(\nu^2+1)^{\nu-1}$ $\forall\nu\in N$.

264. Να δειχτεί ότι $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_\nu)\geq 2\sqrt[\nu]{x_1x_2\ldots x_\nu}$ αν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in N$ και $\forall\nu\in N$.

265. Να δειχτεί ότι $\frac{\nu^3}{3}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\nu(\nu+1)<\frac{2(\nu+1)^3}{3}$ $\forall\nu\in N$.

266. Να δειχτεί ότι $\frac{2}{3}\nu\sqrt{\nu}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{\nu}<\frac{4\nu+3}{6}\sqrt{\nu}$ $\forall\nu\in N$.

267. Να δειχτεί ότι $(\nu!)^3<\nu^\nu<\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{2\nu}$ $\forall\nu\in N$.

268. Να δειχτεί ότι $1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)<\nu^\nu$.

269. Να δειχτεί ότι $\frac{\nu^2}{2}<\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu<\frac{(\nu+1)^2}{2}$ $\forall\nu\in N\geq 1$.

270. Να δειχτεί ότι $\frac{\nu^3}{3}<\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu^2<\frac{(\nu+1)^3}{2}$ $\forall\nu\in N$.

271. Να δειχτεί ότι $(1+x^\nu)(1+x)^\nu>2^{\nu+1}x^\nu$ $\forall\nu\in N$.

272. Να δειχτεί ότι $x^\nu-1>\nu(x-1)$ αν $\nu\in N\geq 2$ και $x\in R^+$

273. "Αν οἱ ἀριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ εἶναι ὁμόσημοι, νά δειχτεῖ ὅτι $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\geqslant\nu^2$ καί ἀκολούθως ὅτι: $\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{\nu+\kappa}>2$ ὅταν $\kappa\to\infty$.

274. "Αν $x\geqslant y>0$ καί $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ καί $\alpha+\beta=1$ νά δειχτεῖ ὅτι

$$x^\alpha y^\beta\geqslant\alpha x+\beta y.$$

275. "Αν $\nu\in\mathbb{N}$ ἤ 0 νά δειχτεῖ ὅτι τό πολυώνυμο

$$x^{\nu+2}-(\nu+2)x+(\nu+1)\quad\text{ἔχει διπλή ρίζα.}$$

276. "Αν $\nu\in\mathbb{N}$ νά δειχτεῖ ὅτι

$$2^{\nu(\nu+1)}>(\nu+1)^{\nu+1}\left(\frac{\nu}{1}\right)^\nu\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^{\nu-1}\ldots\left(\frac{2}{\nu-1}\right)^2\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

277. "Αν $\nu\in\mathbb{N}$ καί $1\leqslant\nu<\alpha+1$ καί $\alpha\in\mathbb{N}$ νά δειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα $\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu}\frac{\alpha-\nu+1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu}\frac{\alpha-\nu+1}{\nu+1}\frac{\alpha-\nu}{\nu+2}-\frac{1}{\nu}\frac{\alpha-\nu+1}{\nu+1}\frac{\alpha-\nu}{\nu+2}\frac{\alpha-\nu+1}{\nu+3}$ ἐκ $\alpha-\nu+2$ ὅρων ἰσοῦται μέ $\frac{1}{\alpha+1}$.

278. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sum_{\nu=0}^{\nu-1}(\nu-\kappa)(\kappa+1)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6}\quad\forall\nu\in\mathbb{N}\geqslant 2$.

279. "Αν $\nu\in\mathbb{N}$ καί $\mu+\nu>0$ νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{1}{\mu+1}-\frac{\nu-1}{(\mu+1)(\mu+2)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}+\ldots=\frac{1}{\mu+\nu}.$$

280. Δίνεται ἡ ἀκολουθία τοῦ Fibonaci $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ πού $\alpha_1=\alpha_2=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ καί $\nu\geqslant 3$. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα $\Sigma=\alpha_2+\alpha_5+\ldots+\alpha_{3\nu-1}$ σά συνάρτηση τοῦ $\alpha_{3\nu+1}$.

281. "Αν $\alpha_{\nu+2}=\frac{\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu}{2}$ καί $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\frac{\alpha+\nu}{2}$ τότε γιά $\forall\nu\in\mathbb{N}$ θά εἶναι $3\alpha_\nu=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}\right]+\nu\left[2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}\right]$.

282. Στήν ἀκολουθία τοῦ Fibonaci νά δειχτεῖ ὅτι:

α) $\alpha_\nu^2-\alpha_{\nu-1}^2=\alpha_{2\nu-1}$, β) $1+\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu}=\alpha_{2\nu+1}$

γ) $\alpha_\nu^2-\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}=(-1)^{\nu-1}$.

283. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ πού $\alpha_1=1$ καί $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\nu$. Νά δειχτεῖ ὅτι: α) $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(\nu+2)$

β) $\alpha_\nu=\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{2}$.

284. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ πού $x_{\nu+1}=\alpha x_\nu+\beta x_{\nu-1}$ $\forall \nu\in N$. Ἄν ὁ $\frac{x}{x_0}$ $(x_0\neq 0)$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης $y^2-\alpha y-\beta=0$, τότε ἡ ἀκολουθία εἶναι γεωμ. πρόοδος.

285. Ἄν $\alpha_{2\nu+1}=(x+\sqrt{y})^{2\nu+1}+(x-\sqrt{y})^{2\nu+1}$, $(x,y\in Q)$ καί διάφορος τετραγώνου ρητοῦ ἀριθμοῦ καί θετικός νά ἐκφραστεῖ τό $\alpha_{2\nu+3}$ σάν συνάρτηση τοῦ $\alpha_{2\nu+1}$ καί $\alpha_{2\nu-1}$, καί νά δειχτεῖ πώς ὁ $\alpha_{2\nu+1}\in Q$, $\forall \nu\in N$ καί γιά $\nu=0$.

286. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ $(\nu\in N\geqslant 3)$ πού $x_1=x_2=1$ καί $x_\nu=x_{\nu-1}+x_{\nu-2}$. Νά δειχτεῖ ὅτι α) $x_{2\nu+3}+x_\nu x_{\nu+3}=2x_{\nu+2}^2$ β) $x_{2\nu+3}-x_\nu x_{\nu+3}=2x_{\nu+1}^2$ γ) $x_\nu^2 x_{\nu+3}^2+4x_{\nu+1}^2 x_{\nu+2}^2=x_{2\nu+1}^2$.

287. Ἄν σέ μιά ἀκολουθία ἀριθμῶν $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ ἰσχύει ἡ σχέση $\alpha_1\alpha_{\nu-1}+\alpha_2\alpha_{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu=(\nu-1)\alpha_0\alpha_1$ μέ $\nu\in N\geqslant 2$ νά δειχτεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία εἶναι γεωμετρική πρόοδος.

288. Ἄν $\nu\in N\geqslant 3$ καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ γιά τήν ὁποία $\alpha_1=1$, $\alpha_2=4$, $\alpha_\nu-2\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}=2$ νά δειχτεῖ ὅτι $\alpha_\nu=\nu^2$.

289. Δίνεται ἡ ἀκολουθία $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ πού $x_\nu=x_{\nu-1}x_{\nu-2}$ $\forall \nu\in N\geqslant 3$. Ἄν Π_ν παριστάνει τό γινόμενο τῶν ν ὅρων της νά δειχτεῖ ὅτι $\Pi_\nu=x_2\Pi_{\nu-1}\Pi_{\nu-2}$.

290. Ἄν $\nu\in N$ καί $\alpha,\beta\in Z^+$ καί $\alpha>\beta$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha > \left(1+\frac{x}{\beta}\right)^\beta$$

291. Ἄν $\nu\in N$ καί $\alpha_\nu=(2+\sqrt{2})^\nu+(2-\sqrt{2})^\nu$ νά δειχτεῖ ὅτι ὁ α_ν εἶναι ἄρτιος $(2+\sqrt{2})^\nu=\alpha_\nu-1$.

292. Νά δειχτεῖ ὅτι $(1+i)^\nu=2^{\nu/2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\nu\pi}{4}\right)$ $\forall \nu\in N$

293. Νά δειχτεῖ ὅτι $\eta\mu 2x+\eta\mu 4x+\ldots+\eta\mu 2(\nu-1)x=$

$$=\frac{\eta\mu(\nu-1)x\,\eta\mu\nu x}{\eta\mu x} \quad \forall \nu\in N.$$

294. Νά δειχτεῖ ὅτι $\eta\mu x\eta\mu 2x+\eta\mu 2x\eta\mu 3x+\ldots+\eta\mu\nu x\eta\mu(\nu+1)x=$

$$=\frac{(\nu+1)\eta\mu 2x-\eta\mu(2\nu+2)x}{4\eta\mu x} \quad \forall \nu\in N.$$

295. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu 2x+\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 3x+\ldots\eta\mu 2\nu x\sigma\upsilon\nu(2\nu+1)x=$

$$=\frac{\eta\mu 2(\nu+1)x\,\eta\mu 2\nu x}{2\eta\mu x}$$

296. Νά δειχτεῖ ὅτι $\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 2x+\ldots+\eta\mu^2 \nu x=$

$$=\frac{(2\nu+1)\eta\mu x-\eta\mu(2\nu+1)x}{4\eta\mu x} \qquad \forall \nu\in N.$$

297. Νά δειχτεῖ ὅτι $\eta\mu x+\eta\mu(x+\alpha)+\ldots\eta\mu(x+\nu\alpha)=$

$$=\frac{\eta\mu\left(x+\frac{\nu\alpha}{2}\right)\eta\mu\frac{(\nu+1)}{2}\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$$

298. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\nu\sigma\upsilon\nu x+(\nu-1)\sigma\upsilon\nu 2x+\ldots+2\sigma\upsilon\nu(\nu-1)x+\sigma\upsilon\nu\nu x=$

$$=-\frac{\nu}{2}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}$$

299. Νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha\eta\mu^2 2\alpha}+\frac{\eta\mu 6\alpha}{\eta\mu 2\alpha\eta\mu^2 4\alpha}+\ldots$ μέ ν ὅρους

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}-\frac{\sigma\upsilon\nu 2^{\nu+1}\alpha}{\eta\mu^2 2^\nu\alpha} \qquad \forall \nu\in N$$

300. Νά δειχτεῖ ὅτι $\eta\mu^3\frac{x}{3}+3\eta\mu^3\frac{x}{3^2}+\ldots+3^{\nu-1}\eta\mu^3\frac{x}{3^\nu}=$

$$=\frac{1}{4}\left(3^\nu\eta\mu\frac{x}{3^\nu}-\eta\mu x\right) \qquad \forall \nu\in N$$

301. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\sigma\upsilon\nu 3^\nu x-4\left[\sigma\upsilon\nu^3(3^{\nu-1}x)-3\sigma\upsilon\nu^3(3^{\nu-2}x)+3^2\sigma\upsilon\nu^3(3^{\nu-3}x)+\ldots\right.$

$\left.+(-1)^\nu 3^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu^3 x\right]=(-1)^\nu 3^\nu\sigma\upsilon\nu x.$

302. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\eta\mu^3(3^{\nu-1}x)+3\eta\mu^3(3^{\nu-2}x)+3^2\eta\mu^3(3^{\nu-3}x)+\ldots+3^{\nu-1}\eta\mu^3 x=$

$$=\frac{3^\nu\eta\mu x-\eta\mu 3^\nu x}{4}.$$

303. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon\varphi^3 3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2 3\alpha}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\varepsilon\varphi^3 3^2\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2 3^2\alpha}+\ldots \text{ μέ ν ὅρους}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(-3\varepsilon\varphi\alpha+\frac{1}{3^{\nu-1}}\varepsilon\varphi 3^\nu\alpha\right).$$

304. Νά δειχτεῖ ὅτι $\tau\varepsilon\mu\alpha\tau\varepsilon\mu 2\alpha+\tau\varepsilon\mu 2\alpha\tau\varepsilon\mu 3\alpha+\ldots$ μέ ν ὅρους=

$$=\frac{1}{\eta\mu\alpha}\left[\varepsilon\varphi(\nu+1)\alpha-\varepsilon\varphi\alpha\right].$$

305. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\tau\varepsilon\mu^2 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2^2\alpha\sigma\tau\varepsilon\mu^2 2^2\alpha+\ldots$ μέ ν ὅρους=

$$=\frac{1}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha-2^{\nu-1}\sigma\tau\varepsilon\mu^2 2^{\nu}\alpha.$$

306. Νά δειχτεῖ ὅτι $\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha}{2}+\sigma\tau\varepsilon\mu^2\frac{\alpha}{2^2}+\ldots$ μέ ν ὅρους=

$$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu}}-\sigma\varphi\alpha.$$

307. Νά δειχτεῖ ὅτι $\varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi^2\alpha+\frac{1}{2}\varepsilon\varphi 4\alpha\varepsilon\varphi^2 2\alpha+\ldots$ μέ ν ὅρους=

$$=\frac{1}{2^{\nu-1}}\varepsilon\varphi 2^{\nu}\alpha-2\varepsilon\varphi\alpha.$$

308. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha\eta\mu 4\alpha+\eta\mu 4\alpha\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\ldots$μέ 2ν ὅρους=$\frac{1}{2}\eta\mu(2\nu+2)\alpha\eta\mu 2\nu\alpha\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha.$

309. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\eta\mu\alpha\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 2\alpha\eta\mu 4\alpha+\eta\mu 3\alpha\eta\mu 5\alpha+\ldots$ μέ ν ὅρους=

$=\frac{\nu}{2}\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\nu+3)\alpha\eta\mu\nu\alpha\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha.$

310. Νά δειχτεῖ ὅτι

$\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\nu-4}{\nu-2}\alpha+\eta\mu\frac{\nu-6}{\nu-2}\alpha+\ldots$ μέ ν ὅρους$=-\eta\mu\frac{\nu\alpha}{\nu-2}$.

ΑΛΛΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

1) Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας, Τόμος Α'
2) Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας, Τόμος Β'
3) Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας, Τόμος Γ'
4) Ἀσκήσεις Πρακτ. Γεωμετρίας (ἐξαντλημένο)
5) Γεωμετρία-Βιβλία Α καί Β (ἐξαντλημένο)