Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

'Ομιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

Παρασκευη, 26 Νοεμβριου 2021.

Καθηγητης: *Σ.Χασάπης*

Μέρος I

0820β-26/11/2021

Βασικά σχήματα και θεωρήματα στα Εγγεγραμμένα σχήματα

1 Εικασία του Collatz

Πάρτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό. Αν αυτός είναι άρτιος, διαιρέστε τον με το 2 ενώ αν αυτός είναι περιττός, πολλαπλασιάστε τον επί 3 και προσθέστε στο γινόμενο 1. Επαναλάβετε με τον αριθμό που προέκυψε.

1. Τι παρατηρείτε;
2. Μπορείτε να δώσετε εξηγήσεις;

Παράδειγμα 1.

- *5, 16, 8, 4, 2, 1*
- *21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1*
- *27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1*

2 Εξάσκηση σε διάφορα επίπεδα

Μαθητές Α′ λυκείου εξασκούνται για μισή ώρα στο σχήμα Vecten.

Μαθητές Β′ λυκείου εξασκούνται για μισή ώρα σε κάποιες από τις παρακάτω ασκήσεις.

Στη συνέχεια δουλεύουμε όλοι θεωρήματα στα εγγράψιμα τετράπλευρα 3

Πρόβλημα 1 (Γραμματόσημα ταχυδρομικής υπηρεσίας)**.** *Ένα ταχυδρομείο διαθέτει γραμματόσημα των 3 και των 5 λεπτών του €. Να αποδείξετε ότι με χρήση γραμματοσήμων των αξιών αυτών μπορούν να παραχθούν όλα τα ακέραια ταχυδρομικά κόστη από 8 λεπτά του € και πάνω.*

Δείτε υπόδειξη εδώ 11

Πρόβλημα 2. *Να εξετάσετε για ποιους ακέραιους $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $k = 2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.*

Υπόδειξη: 11

Θεώρημα 1 (Αρχή ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής)**.** *Αν μία πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για $n = n_0$ και όταν η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n_0 \leq n \leq k$, αποδεικνύεται ότι είναι αληθής και για $k+1$, τότε θα είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$.*

Πρόβλημα 3. *Κάθε θετικός ακέραιος, μεγαλύτερος ή ίσος του 2, είτε είναι πρώτος, είτε είναι γινόμενο πρώτων.*

Απόδειξη. Για $n = 2$ έχουμε ότι ο 2 είναι πρώτος.

Έστω ότι ισχύει η πρόταση για $2 \geq n \geq k$ και θεωρούμε τον $k+1$.

Αν ο $k+1$ είναι πρώτος, τότε ΟΚ.Αν ο $k+1$ δεν είναι πρώτος, τότε μπορεί να γραφεί ως $k+1 = p \cdot q, p \leq k, q \leq k$. Από επαγωγική υπόθεση οι $p, q \leq k$ είτε θα είναι πρώτοι, είτε θα είναι γινόμενο πρώτων καθένας τους. Συνεπώς, η πρόταση ισχύει και για τον $k+1$. □

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε περιττό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $A = n^2 - 1$ διαιρείται από το 8.*

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε περιττό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $A = n^4 - 1$ διαιρείται από το 16.*

Άσκηση 3. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $A = n^3 + 2n$ διαιρείται από το 3.*

Άσκηση 4. Να αποδείξετε αν ν αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι όλοι μεγαλύτεροι του -1 τότε ισχύει:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\nu) \geq 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$$

Άσκηση 5. Να αποδείξετε αν ν θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ έχουν γινόμενο 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \geq \nu$$

Άσκηση 6. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Άσκηση 7. *Να αποδείξετε ότι:*

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

Άσκηση 8. *Να αποδείξετε ότι:*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Άσκηση 9. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \forall n \in \mathbb{N}, x \neq 1$$

Άσκηση 10. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Άσκηση 11 (Ανισότητα I)**.** *Να αποδείξετε ότι:*

$$n^2 > 2n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$$

Άσκηση 12 (Ανισότητα II)**.** *Να αποδείξετε ότι:*

$$2^n > n^3, \forall n \geq 10, \ n \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 13 (Ανισότητα III)**.** *Να αποδείξετε ότι:*

$$3^n > n^2, \forall n \geq 2, \ n \in \mathbb{Z}$$

Πρόβλημα 4 (Η Βασίλισσα και οι μνηστήρες στο παλάτι - Μας το απέκρυψε ο Όμηρος;)**.** *Η Βασίλισσα Πηνελόπη, μετά το χάος της δοκιμασίας με το τόξο και τα τσεκούρια, έθεσε στους μνηστήρες το εξής πρόβλημα:*

-« Σε όλους σας θα φορέσω αύριο καπέλα. Κάποιοι από εσάς(τουλάχιστον ένας) θα έχετε λευκό καπέλο και οι υπόλοιποι μαύρο καπέλο.»

Μπορείτε να κοιτιέστε μεταξύ σας, αλλά όχι να μιλάτε ή να συνεννοείστε μεταξύ σας. Κάθε πρωί που θα έρχομαι από αύριο, θέλω αμέσως όσοι από εσάς έχετε καταλάβει ότι φοράτε άσπρο καπέλο να έρχεστε να μου το πείτε. Εφόσον, κάποια μέρα όλοι σας όσοι φοράτε άσπρο καπέλο και μόνον αυτοί μου έχετε αποκαλύψει ότι το καταλάβατε, τότε αμέσως θα παντρευτώ έναν από εσάς που θα το έχετε καταλάβει με κλήρωση.

Να αποδείξετε ότι, αν όλοι οι μνηστήρες ήταν αρκετά έξυπνοι και νηφάλιοι, τότε τη ν-οστή ώρα καθένας από τους ν μνηστήρες που φορούσαν άσπρο καπέλο θα εμφανιζόταν στη Βασίλισσα και θα της το αποκάλυπτε.

Πρόβλημα 5. *Να εξετάσετε είναι εφικτό να γραφεί κάθε αριθμός $n \geq 12$ ως άθροισμα πολλαπλασίων μόνο των αριθμών 4 και 5.*

Άσκηση 14. *Να αποδείξετε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, τότε:*

$$n^{n+1} > (n+1)^n, \forall n \geq 3$$

Πρόβλημα 6. *Να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε σκακιέρα διαστάσεων $2^n \times 2^n, n \geq 1$ μπορεί να καλυφθεί με τριόμινο σχήματος Λ, αφήνοντας ακάλυπτο ένα οποιοδήποτε τετράγωνό της, όπως πχ στην 4×4 σκακιέρα παρακάτω (σχήμα 1):*

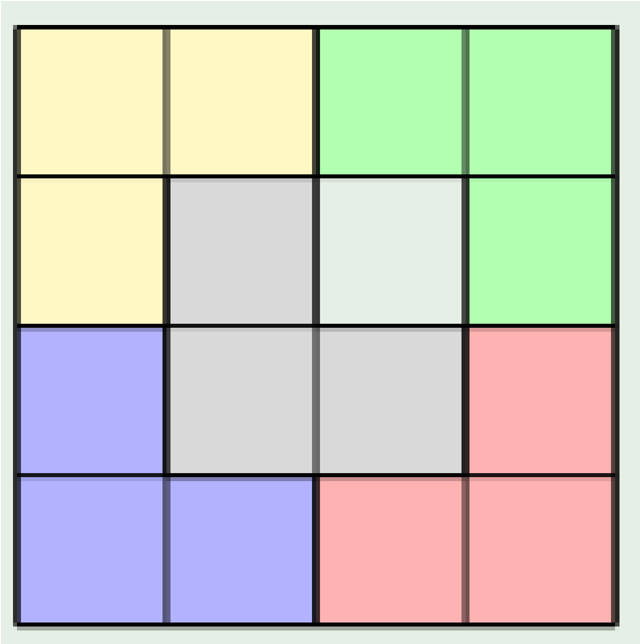
Πρόβλημα 7 (Οι πύργοι του Ανόι)**.** *Οι πύργοι του ΑΝΟΪ είναι ένα παιχνίδι στο οποίο υπάρχουν τρεις πάσσαλοι Α, Β, ͨ και μια σειρά από ν δίσκους οι διαφορετικής διαμέτρου. Οι δίσκοι είναι αρχικά τοποθετημένοι στον πάσσαλο Α, σε φθίνουσα σειρά διαμέτρου από κάτω προς τα πάνω, όπως στο παρακάτω σχήμα 2. Να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να μεταφερθούν οι n δίσκοι από τον A στον C σε $2^n - 1$ κινήσεις, με δεδομένο ότι σε κάθε βήμα μετακινείται ένας μόνο δίσκος από την κορυφή ενός σωρού στην κορυφή ενός άλλου, χωρίς να βρεθεί ποτέ μεγαλύτερος δίσκος πάνω από μικρότερο δίσκο.*

3 Θεωρήματα στα εγγράψιμα τετράπλευρα

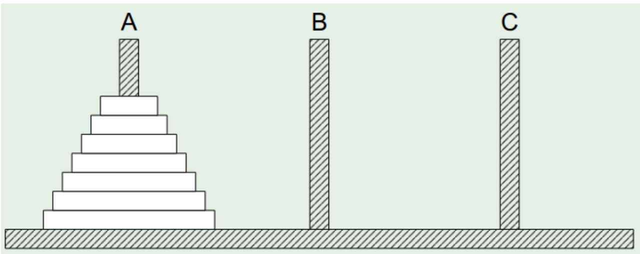
Θεώρημα 2 (Θεώρημα)**.**

Υπόδειξη εδώ **;;**.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Πτολεμαίου διαδραστικό σχήμα)**.** *Αν ένα κυρτό τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, τότε το γινόμενο των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του.*



Σχῆμα 1



Σχῆμα 2

Απόδειξη. Στο τετράπλευρο $ABCD$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο παρατηρούμε τις παρακάτω ίσες γωνίες (βλ. Σχήμα 4).

Θεωρούμε τη γωνία $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$, όπου Ε ανήκει στην BD.

Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο έχουμε ότι οι κορυφές B, C θα βλέπουν υπό ίδια γωνία την AD, οπότε ισχύει ότι $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$.

Οπότε τα τρίγωνα ABE, CAD είναι όμοια μεταξύ τους, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow BE = \frac{AB \cdot CD}{AC}$$

Ομοίως από την ισότητα των γωνιών $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}, \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, προκύπτει ότι τα τρίγωνα ABC, EAD είναι όμοια οπότε ισχύουν:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow ED = \frac{BC \cdot AD}{AC}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

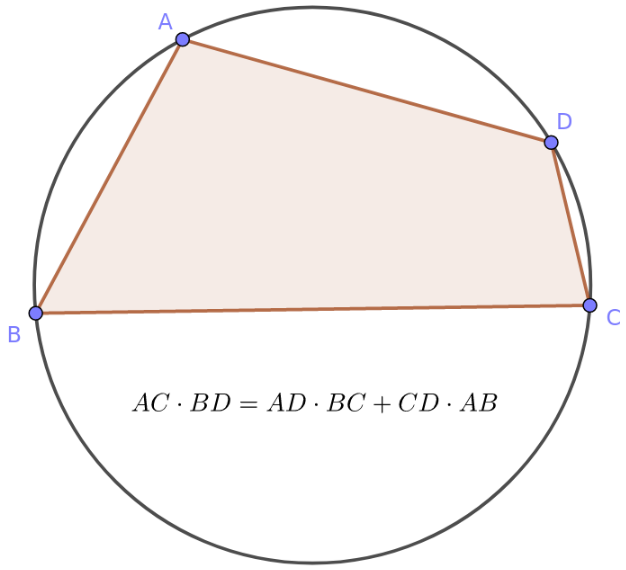
$$BE + ED = \frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{AC} \Leftrightarrow AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

που είναι το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1. *Ισχύει και το αντίστροφο! Διατυπώστε το.*

Θεμα Α′ (Ε20021Γ3). *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο με $AB = 2, AC = 2, BC = 3$ και σημείο D της πλευράς BC τέτοιο ώστε*



Σχῆμα 3: 1ο Θεώρημα Πτολεμαίου

$BD = 2CD$. Στο σημείο D φέρνουμε ευθεία κάθετη προς την AD, η οποία τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{ABC}$ στο σημείο M. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABMC$ συναρτήσει του $AM = k$.

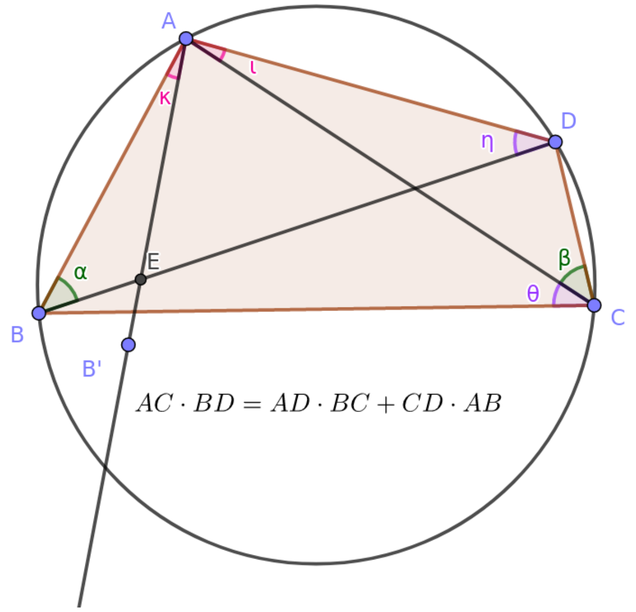
Υπόδειξη. Το ισοσκελές τρίγωνο ABC είναι προφανώς αμβλυγώνιο στη γωνία A.

Το τρίγωνο ABD είναι επίσης ισοσκελές $AB = BD = 2$, οπότε $\angle BDA < L$. Άρα το σημείο M είναι σημείο του τόξου $\overset{\frown}{BC}$.

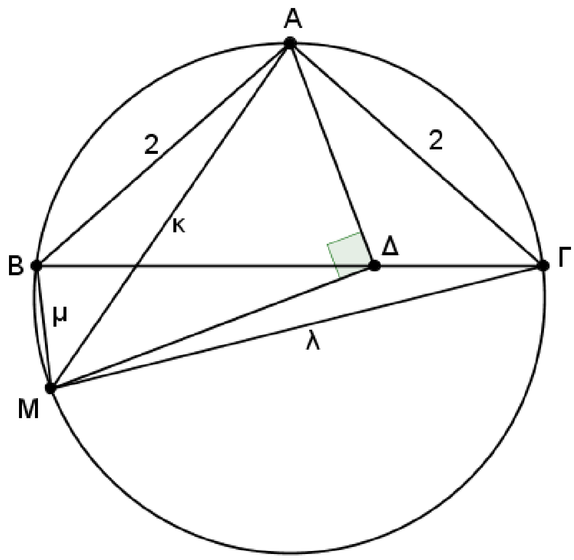
Αν $BM = x, MC = y$, τότε απο'θεώρημα Πτολεμαίου έχουμε:

$$AB \cdot CM + AC \cdot BM = AM \cdot BC \Rightarrow 2y + 2x = 3k \Leftrightarrow x + y = \frac{3k}{2}$$

□



Σχῆμα 4: Ἴσες γωνίες στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο



Σχῆμα 5

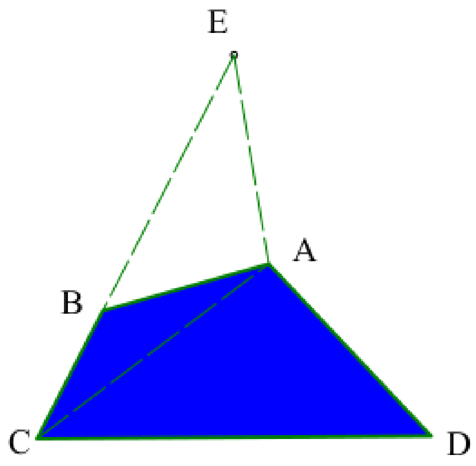
Άσκηση 15 (Μία εφαρμογή)**.** *Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Πτολεμαίου σε ένα ορθογώνιο* $ABCD$*. Τι παρατηρείτε;*

Θεώρημα 4 (Ανισότητα Πτολεμαίου)**.** *Σε ένα τετράπλευρο* $ABCD$ *έχουμε ότι*

$$AC \cdot DB \leq AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το $ABCD$ *είναι εγγράψιμο.*

Άσκηση 16 (Μία δεύτερη εφαρμογή)**.**



Απόδειξη. Στο τετράπλευρο $ABCD$ θεωρούμε σημείο E, τέτοιο ώστε τα τρίγωνα ACD και AEB να είναι όμοια δηλαδή $\angle ABE = \angle CDA$ και $\angle BAE = \angle CAD$.

Τότε
$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC}$$
οπότε
$$BE = \frac{AB \cdot DC}{AD}.$$
Ακόμη, αφού $\angle EAC = \angle BAD$, έχουμε
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$
άρα τα τρίγωνα EAC και BAD είναι όμοια. Έτσι:
$$EC = \frac{AC \cdot DB}{AD}.$$
Στην περίπτωση που το τετράπλευρο δεν είναι εγγράψιμο, τότε
$$\angle ABE + \angle CBA = \angle ADC + \angle CBA \neq 180.$$
Εφαρμόζοντας τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο EBC, έχουμε
$$EC < EB + BC.$$
Από νωρίτερα έχουμε ότι
$$\frac{AC \cdot DB}{AD} < \frac{AB \cdot DC}{AD} + BC$$
άρα
$$AC \cdot DB < AB \cdot DC + BC \cdot AD.$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε την ανισότητα του Πτολεμαίου
$$AC \cdot DB < AB \cdot DC + BC \cdot AD$$
με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το $ABCD$ είναι εγγράψιμο. □

Σχῆμα 6

4 Κλείνοντας...Ο «νόμος των μικρών αριθμών»

Οι εφαρμογές της Αρχής της Μαθηματικής - Τέλειας επαγωγής έγινε σαφές πιστεύω, μέσα από τα παραδείγματα που διερευνήθηκαν, ότι είναι ανεξάντλητο πεδίο. Θα εμφανιστεί η ανάγκη χρήση της πολλές φορές στα επόμενα.

Αν και η δημιουργία εικασιών είναι αναγκαία στις Επιστήμες και στα Μαθηματικά, πολλές φορές η επαλήθευση μερικώς των υποθέσεών μας (**ατελής επαγωγή**), είναι δυνατόν να οδηγήσει σε, τουλάχιστον, «περίεργα» αποτελέσματα. Όπως διατυπώθηκε και η παρακάτω εικασία-πρόταση:

Πρόταση 1 (Νόμος των μικρών αριθμών Richard Guy). *Δεν υπάρχουν αρκετοί «μικροί αριθμοί», οι οποίοι να ικανοποιούν όλες τις προϋποθέσεις που τους αποδίδονται. Δηλαδή, οι μικροί αριθμοί δεν αντιπροσωπεύουν την συμπεριφορά των μεγάλων αριθμών.*

Εξάλλου, ήδη εμφανίστηκε το παράδειγμα του **«τριωνύμου παραγωγής πρώτων αριθμών»** n^2+n+41.

Ας δούμε όμως μερικά ακόμα παραδείγματα, εντυπωσιακότερα, όπως εμφανίζονται εδώ και στις αναφορές του.

Παράδειγμα 2. *Βρείτε τα υπόλοιπα των πρώτων αριθμών όταν διαιρεθούν με το 4. Τι παρατηρείτε;*

Η παρατήρησή σας ισχύει για τους πρώτους περίπου 25.000 όρους της ακολουθίας!

Παράδειγμα 3 (Πρώτοι του Fermat). *Οι αριθμοί $F_n = 2^{2^n}+1$ είναι πρώτοι για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; Παρατηρήστε μερικούς από αυτούς...*

Δείτε περισσότερα παραδείγματα εδώ (Guy, Richard, The Strong Law of Small Numbers, The American Mathematical Monthly Vol. 95, No. 8 (Oct., 1988), pp. 697-712 (16 pages)).

5 Ο Συμβολισμός Σ

Έχουμε αποδείξει ήδη ότι:

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{ν - πλήθος άσσων}} = \text{ν}$$

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Συμβολίζουμε με

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Οπότε τα παραπάνω αθροίσματα μπορούμε να τα γράψουμε:

$$1+1+\cdots+1 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$1+2+\cdots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Οπότε και το ζητούμενο άθροισμα $1^2 + 3^2 + \cdots (2n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$.
Αν τώρα κάνουμε τις πράξεις μέσα στο άθροισμα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(4i^2-4i+1) &= \\
= \sum_{i=1}^{n}4i^2 - \sum_{i=1}^{n}4i + \sum_{i=1}^{n}1 &= \\
= 4\sum_{i=1}^{n}i^2 - 4\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}1 &= \\
= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n &= \\
\frac{1}{3}(4n^3-n) = \frac{1}{3}n(4n^2-1) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}&
\end{aligned}
$$

6 Υποδείξεις - Λύσεις

Γραμματόσημα ταχυδρομικής υπηρεσίας

Υπόδειξη. Η πρώτη αξία που μπορεί να δημιουργηθεί με τα δύο γραμματόσημα και το επιθυμούμε είναι αυτή των 8 λεπτών (στο εξής θα εννοούμε λεπτά του € και θα παραλείπεται.)

Αν μία αξία k λεπτών περιέχει ένα 5 (δηλαδή ένα γραμματόσημο των 5 λεπτών), τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε την επόμενη αξία, αντικαθιστώντας το 5 με δύο των 3.

Αν μία αξία k δεν περιέχει κανένα 5, τότε, εφόσον όλες οι αξίες που θέλουμε να δημιουργήσουμε είναι $k \geq 8$, θα περιέχει σίγουρα τουλάχιστον τρία των 3. Οπότε σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να δημιουργήσουμε την αξία $k+1$, αντικαθιστώντας τα τρία των 3 με δύο των 5.

Συνεπώς, αν έχει δημιουργηθεί η τυχαία ακέραια αξία $k \geq 8$ τότε μπορεί να δημιουργηθεί και η αξία $k+1$, οπότε από αρχή Μαθηματικής επαγωγής έχουμε το ζητούμενο. □

Διαγώνιοι κυρτού πολυγώνου

Υπόδειξη. Το πλήθος των διαγωνίων είναι $\frac{1}{2}n(n-3), n \geq 3$. □

Πολλαπλάσιο του 3 ;

Παράδειγμα 3.1. Για ποιες τιμές του n ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3;

Λύση. Ελέγχοντας μικρές τιμές του φυσικού αριθμού n διαπιστώνει κανείς ότι ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν το n ισούται με 1, 3, 5 και 7, ενώ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν το n ισούται με 2, 4, 6 ή 8. Φαίνεται λοιπόν εύλογο να μαντέψει κανείς ότι ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν ο n είναι περιττός. Αυτό αποδεικνύεται ορθό, και ο ακόλουθος επαγωγικός συλλογισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη) για να ολοκληρώσει το ζητούμενο: Γράφουμε $a_n = 2^n + 1$. Τότε $a_{n+2} = 2^{n+2} + 1 = 4(2^n + 1) - 3 = 4a_n - 3$, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν συμβαίνει το ίδιο και με το a_n. □

Διερεύνηση . Δείτε εδώ σελ.7 □

Εύρεση αθροίσματος από γνωστό άθροισμα Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα για τα τετράγωνα των n πρώτων φυσικών δίνεται από τον τύπο

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε καθένα από τους αριθμούς του αθροίσματος με 2, τότε προκύπτει ότι το άθροισμα 4- πλάσιο:

$$S_m = 4\frac{m(m+1)(m+1)}{6}$$

Επειδή θέλουμε το άθροισμα των άρτιων τετραγώνων έως τον $(n-1)^2$, άρα πρέπει $m = \frac{n-1}{2}$, οπότε το άθροισμα των αρτίων θα είναι:

$$S_a = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$