Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Α' Λυκείου

Πέμπτη, 18 Νοεμβρίου 2021.

Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

Μέρος I

0720α-18/11/2021

Η Μαθηματική Επαγωγή

1 Το παιχνίδι της ημέρας

Παίρνουμε ένα τριψήφιο αριθμό που δεν έχει όλα του τα ψηφία ίδια και σχηματίζουμε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο αριθμό χρησιμοποιώντας τα ψηφία του. Αφαιρούμε τους δύο αριθμούς και με τον αριθμό που θα βρούμε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

1. Τι παρατηρείτε;
2. Μπορείτε να δώσετε εξηγήσεις;

2 Εισαγωγικά

Στα Μαθηματικά ο πειραματισμός μπορεί να προσφέρει ενδείξεις αλλά όχι αποδείξεις. Με άλλα λόγια δε μπορούμε να συνάγουμε την αλήθεια μιας πρότασης δοκιμάζοντας μερικές ειδικές περιπτώσεις. Φυσικά αυτό ισχύει και για προτάσεις που αναφέρονται σε θετικούς ακεραίους.

Ένα ιστορικό παράδειγμα είναι το «τριώνυμο του Euler». Στην Ελληνική βιβλιογραφία των αρχών του 20ου αιώνα είχε διαδοθεί ότι ο Euler για λίγο νόμισε

Leonard Euler 1707-1783

ότι το τριώνυμο $\nu^2 + \nu + 41$ όταν το ν διατρέχει τους φυσικούς μας δίνει πρώτους αριθμούς. Δοκιμάστε τιμές! Θα διαπιστώσετε ότι ο πράγματι έως την τιμή $\nu = 39$ το τριώνυμο μας δίνει πρώτους αριθμούς. Αλλά για την τιμή $\nu = 41$ μας δίνει αριθμό σύνθετο. Στη σημερινή συνάντηση θα ασχοληθούμε με μία αποδεικτική μέθοδο που μας δίνει την δυνατότητα να αποδεικνύουμε προτάσεις που εξαρτώνται για από κάποιον θετικό ακέραιο χωρίς να καταφεύγουμε στην (ανασφαλή) μέθοδο των δοκιμών.

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$$

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \nu$$

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$1^2 + 3^2$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$$

Άσκηση 5. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2\nu - 1)^2$$

Είναι άραγε βέβαιο ότι η απάντηση που δώσατε στις ασκήσεις 3 και 5 είναι σωστή;

3 Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

3.1 Αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών κατά Peano

ΑΞΙΩΜΑ 1. *Ο 1 είναι φυσικός αριθμός, δηλ.* $1 \in \mathbb{N}$.

ΑΞΙΩΜΑ 2. *Για καθε φυσικό αριθμό* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει ένας ακριβώς φυσικός αριθμός* m *που είναι ο* ***επόμενός του****, δηλαδή* $m = n + 1$.

ΑΞΙΩΜΑ 3. *Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός με επόμενό του τον 1, δηλαδή ο* ***μηδέν*** *δεν είναι φυσικός αριθμός.*

ΑΞΙΩΜΑ 4. *Δύο φυσικοί αριθμοί, οι οποίοι έχουν τον ίδιο επόμενο, είναι ίσοι μεταξύ τους:*

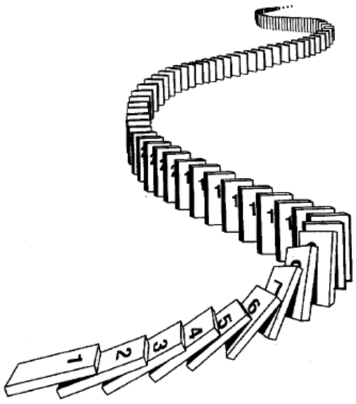
$$\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ με } n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$$

ΑΞΙΩΜΑ 5 (**Αρχή της τέλειας ή Μαθηματικής Επαγωγής**). *Κάθε σύνολο φυσικών αριθμών στο οποίο ανήκει ο 1 και μαζί με κάθε φυσικό αριθμό* n *που ανήκει σε αυτό, ανήκει και ο επόμενός του* $n + 1$, *ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών.*

Η κατασκευή των φυσικών αριθμών και η ύπαρξη του επομένου κάθε φυσικού αριθμού, είναι αυτή που επιτρέπει την ύπαρξη του αξιώματος 5 και τελικά της μαθηματικής επαγωγής.

Αν για παράδειγμα στήσουμε ένα ντόμινο με μεγαλύτερα κενά από όσο το μήκος των ντόμινο τότε η πτώση του ενός δε θα προκαλέσει με βεβαιότητα πτώση και των υπολοίπων.

3.2 Η μέθοδος ντόμινο και οι προϋποθέσεις εφαρμογής της



Θεώρημα 1 (Θεώρημα της Μαθηματικής Επαγωγής). *Αν μία πρόταση $A(n)$, εξαρτώμενη από το φυσικό αριθμό n, αληθεύει για $n = 1$ και δοθέντος ότι αληθεύει για $n = k \in \mathbb{N}$, αποδεικνύεται ότι αληθεύει και για $n = k+1$, (δηλαδή αν θεωρήσουμε γνωστό ότι ισχύει η $A(k)$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει και η $A(k+1)$), τότε η πρόταση αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό.*

Απόδειξη. Αποδεικνύεται με χρήση του 5ου αξιώματος, καθώς το σύνολο Α των φυσικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η $A(n)$ πληρεί τις προϋποθέσεις του 5ου αξιώματος. □

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από κάποιον θετικό ακέραιο ν. Μία μέθοδος απόδειξης είναι η ακόλουθη.

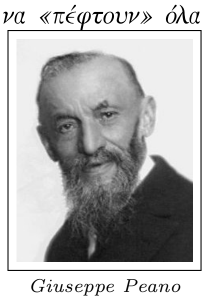
Βήμα 1 *Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$.*

Βήμα 2 *Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k$.*

Βήμα 3 *Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k + 1$.*

Τότε η πρόταση αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Δηλαδή, έχουμε θεμελιώσει αξιωματικά τους φυσικούς αριθμούς, ώστε να αποτελούν ένα σύστημα ντόμινο, κατάλληλα στημένων, τα οποία να «πέφτουν» όλα επιτυχημένα. Η ιδέα πίσω από την παραπάνω αρχή που οφείλεται στον Peano είναι η εξής: Στο Βήμα 3 ουσιαστικά έχουμε αποδείξει ότι αν η πρόταση ισχύει για ένα θετικό ακέραιο τότε ισχύει και για τον επόμενο του. Η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του 1 δηλαδή το 2. Ισχύει για τον 2. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 3. Ισχύει για τον 3. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 4. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 5. Γενικότερα θα ισχύει και για τον επόμενο του n τον $n+1$ κ.ο.κ.


Giuseppe Peano
1858-1932

4 Εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{\nu\left(\nu+1\right)}=1-\frac{1}{\nu+1}$$

Άσκηση 7. Να αποδείξετε ότι

$$1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu\left(\nu+1\right)\left(2\nu+1\right)}{6}$$

Άσκηση 8. Να αποδείξετε αν ν αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι όλοι μεγαλύτεροι του -1 τότε ισχύει:

$$\left(1+\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right)\ldots\left(1+\alpha_\nu\right)\geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$$

Άσκηση 9. Να αποδείξετε αν ν θετικοί αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ έχουν γινόμενο 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu\geq\nu$$

Άσκηση 10. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$