Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Όμιλος Μαθηματικών Α' Λυκείου

Πεμπτη, 25 Νοεμβριου 2021.

Καθηγητης: *Σ.Χασάπης*

Μέρος I

0820α-25/11/2021

Η Μαθηματική Επαγωγή

1 Το παιχνίδι της ημέρας

Παίρνουμε ένα τριψήφιο αριθμό, ώστε το μεγαλύτερο από το μικρότερο ψηφίο του να έχουν διαφορά τουλάχιστον 2. Με τα ψηφία αυτού, δημιουργούμε το μικρότερο και το μεγαλύτερο δυνατό τριψήφιο αριθμό, τους οποίους τους αφαιρούμε και λαμβάνουμε το θετικό αριθμό x. Αναααστρέψουμε τα ψηφία του x και τον αριθμό που προκύπτει τον προσθέτουμε στον x.

1. Τι παρατηρείτε;
2. Μπορείτε να δώσετε εξηγήσεις;

2 Εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής

Άσκηση 1. Να βρείτε έναν κλειστό τύπο για το άθροισμα:

$$1^2 + 3^2 + ... + (2\nu - 1)^2$$

Μπορείτε να τον αποδείξετε με τη χρήση της αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής;

Υπόθεση Μπούρα: Ισχύει ότι

$$1^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

ὑφὑφὑϖὑϖὑφὑἀ0821α25112021

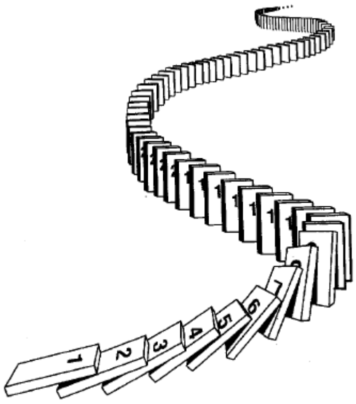
Πρόταση Χρήστου: Εφόσον γνωρίζουμε το άθροισμα όλων των τετραγώνων, να βρούμε το άθροισμα των τετραγώνων των ζυγών και να το αφαιρέσουμε από αυτό. Μία σκέψη για αυτό εδώ 10.

Πρόταση Γιάννη: Το άθροισμα είναι

$$(n^2+1)\frac{n+1}{4} - \left(\frac{n+1}{4} - 1\right)\frac{n+1}{8}16$$

Δείτε και μία άλλη προσέγγιση εδώ 8.

2.1 Υπενθύμιση - Παράδειγμα εφαρμογής



Θεώρημα 1 (Θεώρημα της Μαθηματικής Επαγωγής). *Αν μία πρόταση $A(n)$, εξαρτώμενη από το φυσικό αριθμό n, αληθεύει για $n = 1$ και δοθέντος ότι αληθεύει για $n = k \in \mathbb{N}$, αποδεικνύεται ότι αληθεύει και για $n = k+1$, (δηλαδή αν θεωρήσουμε γνωστό ότι ισχύει η $A(k)$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει και η $A(k+1)$), τότε η πρόταση αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό.*

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από κάποιον θετικό ακέραιο ν. Μία μέθοδος απόδειξης είναι η ακόλουθη.

Βήμα 1 Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$.

Βήμα 2 Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k$.

Βήμα 3 Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k + 1$.

Τότε η πρόταση αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Ας θυμηθούμε την εφαρμογή με χρήση ενός παραδείγματος:

Παράδειγμα 1. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

Βήμα 1 Για $\nu = 1$

Πράγματι, για $\nu = 1$ η προς επαλήθευση ισότητα γίνεται:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

η οποία ισχύει.

Βήμα 2 Έστω ότι ισχύει για $\nu = k$ **(Επαγωγική υπόθεση)**

Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu = k$, δηλαδή:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

Βήμα 3 ΘΔΟ ισχύει για $\nu = k+1$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = k+1$, δηλαδή:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}$$

Στο αριστερό μέλος της προς απόδειξη ισότητας, οι πρώτοι όροι από την Επαγωγική υπόθεση μπορούν να αντικατασταθούν με $1 - \frac{1}{k+1}$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} &= 1 - \frac{1}{k+2} \Leftrightarrow \\ -\frac{k+2}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} &= -\frac{1}{k+2} \Leftrightarrow \\ \frac{-k-2+1}{k+1} &= -1 \Leftrightarrow \\ \frac{-k-1}{k+1} &= -1 \end{aligned}$$

το οποίο πράγματι ισχύει.

Πρόβλημα 1 (Γραμματόσημα ταχυδρομικής υπηρεσίας)**.** *Ένα ταχυδρομείο διαθέτει γραμματόσημα των 3 και των 5 λεπτών του €. Να αποδείξετε ότι με χρήση γραμματοσήμων των αξιών αυτών μπορούν να παραχθούν όλα τα ακέραια ταχυδρομικά κόστη από 8 λεπτά του €και πάνω.*

Δείτε υπόδειξη εδώ 10

Τα πρώτα γραμματόσημα κυκλοφόρησαν από το Ηνωμένο Βασίλειο το 1840 μετά από πρόταση του Ρόουλαντ Χιλ. Το γραμματόσημο αυτό ονομάζεται «πένι μπλακ» (πεννψ βλαςκ), καθώς απεικόνιζε προφίλ προτομής της βασίλισσας Βικτωρίας σε μαύρο φόντο και είχε ονομαστική αξία μία πένας, το αντίτιμο για την αποστολή γράμματος σε όλη την επικράτεια. Τα πρώτα Ελληνικά γραμματόσημα κυκλοφόρησαν το 1861 από τα Ελληνικά Ταχυδρομεία και απεικονίζουν την κεφαλή του Ερμή, του Ταχυδρόμου των Θεών. Σχεδιάστηκαν από τον Άλμπερτ Μπαρ και εκτυπώθηκαν στη Γαλλία. πηγή εδώ.
Τα διάφορα γραμματόσημα, συνηθίζεται πολλές φορές να είναι αναμνηστικά προς κάποιο άτομο, ομάδα ή γεγονός που πρόκειται να ή έχει συμβεί ή ζήσει.

Η Κεφαλή του Ερμή, το πρώτο ελληνικό γραμματόσημο

.

Παρακάτω βλέπουμε ένα γραμματόσημο των 3 λεπτών του €, αναμνηστικό από την Ελληνική προεδρία της Ευρωπαϊκής ένωσης.

Σχῆμα 1

Πρόβλημα 2 (Διαγώνιοι κυρτού πολυγώνου)**.** *Να βρείτε κλειστό τύπο, ο οποίος να δίνει το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού n-γώνου.Να αποδείξετε την ισχύ του με Μαθηματική Επαγωγή.*

Υπόδειξη: 10

Πρόβλημα 3. *Να εξετάσετε για ποιους ακέραιους $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $k = 2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.*

Υπόδειξη: 10

Θεώρημα 2 (Αρχή ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής)**.** *Αν μία πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για $n = n_0$ και όταν η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n_0 \leq n \leq k$, αποδεικνύεται ότι είναι αληθής και για $k+1$, τότε θα είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$.*

Πρόβλημα 4. *Κάθε θετικός ακέραιος, μεγαλύτερος ή ίσος του 2, είτε είναι πρώτος, είτε είναι γινόμενο πρώτων.*

Απόδειξη. Για $n = 2$ έχουμε ότι ο 2 είναι πρώτος.

Έστω ότι ισχύει η πρόταση για $2 \geq n \geq k$ και θεωρούμε τον $k+1$.

Αν ο $k+1$ είναι πρώτος, τότε ΟΚ.Αν ο $k+1$ δεν είναι πρώτος, τότε μπορεί να γραφεί ως $k+1 = p \cdot q, p \le k, q \le k$. Από επαγωγική υπόθεση οι $p, q \le k$ είτε θα είναι πρώτοι, είτε θα είναι γινόμενο πρώτων καθένας τους. Συνεπώς, η πρόταση ισχύει και για τον $k+1$. □

2.2 Διαιρετότητα

Ορισμός 1. *Ένας ακέραιος αριθμός n θα λέμε ότι* ***διαιρείται*** *από τον d, αν ισχύει ότι $n = d \cdot q$. Δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσής τους είναι 0. Ο d λέγεται* ***διαιρέτης*** *του n.*

Θεώρημα 3 (Κριτήρια διαιρετότητας)**.** *Ένας ακέραιος αριθμός n, διαιρείται από τον k, αν σε καθεμία από τις περιπτώσεις ισχύει:*

- $k = 2$, *αν το τελευταίο του ψηφίο είναι* $0, 2, 4, 6, 8$.
- $k = 3$, *αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται από το* 3.
- $k = 4$, *αν ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο του τελευταία ψηφία διαιρείται από το* 4.
- $k = 5$, *αν το τελευταίο του ψηφίο είναι* $0, 5$.
- $k = 6$, *αν διαιρείται από 2 και 3 ταυτόχρονα.*
- $k = 7$, *αν διαγράψουμε το ψηφίο της μονάδας τελείως από τον αριθμό. Το πολλαπλασιάζουμε με το 2 και αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τον υπόλοιπο αριθμό. Παράδειγμα: Ας ελέγξουμε το 196. Παίρνουμε τη μονάδα (6), την πολλαπλασιάζουμε με το 2 (12) και το αφαιρούμε από τον υπόλοιπο αριθμό χωρίς τη μονάδα (19 − 2 = 7). Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα είναι το 7 ή πολλαπλάσιό του, οπότε το 196 διαιρείται με το 7 και ελέγχθηκε* [1]. *Δείτε και άλλα κριτήρια διαιρετότητας σε μία όμορφη συζήτηση εδώ.*
- $k = 8$, *αν ο αριθμός που σχηματίζουν τα τρία τελευταία ψηφία του δοσμένου διαιρείται με το 8.*
- $k = 9$, *αν το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού διαιρείται από το 9.*
- $k = 10$, *αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0.*
- $k = 11$, *αν το εναλλασσόμενου προσήμου άθροισμα των ψηφίων του από δεξιά προς τα αριστερά είναι 0. Εναλλακτικά, μπορούμε να διαγράψουμε το ψηφίο των μονάδων από τον αριθμό και να το αφαιρέσουμε από τον υπόλοιπο. Αν ο αριθμός που θα προκύψει διαιρείται από το 11, τότε και ο αρχικός διαιρείται. Για παράδειγμα, αν* $n = 14641$, *τότε έχουμε διαδοχικά:*

  $$14641 \to 1464 - 1 = 1463 \to 146 - 3 = 143 \to 14 - 3 = 11$$

- $k = 13$, *αν διαγράψουμε το τελευταίο ψηφίο των μονάδων από τον αριθμό και το προσθέσουμε τετραπλάσιο στον αριθμό που έμεινε και αυτός που προκύψει διαιρείται από 13. Για παράδειγμα έχουμε:*

  $$208 \to 20 + 4 \cdot 8 = 20 + 32 = 52 \to 5 + 4 \cdot 2 = 13$$

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε περιττό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $A = n^2 - 1$ διαιρείται από το* 8.

Άσκηση 3. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε περιττό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $A = n^4 - 1$ διαιρείται από το* 16.

Άσκηση 4. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $A = n^3 + 2n$ διαιρείται από το* 3.

[1] Το κριτήριο διαιρετότητας του 7 είναι γνωστό από την Παλαιά Διαθήκη, γιατί οι Εβραίοι της εποχής ήθελαν να γνωρίζουν τα Σαββατικά έτη (αυτά που διαιρούνται με το 7), διότι σύμφωνα με τη θρησκεία τους κατά τα έτη αυτά υπήρχαν σοβαρότατοι περιορισμοί στην εκτέλεση διάφορων εργασιών. Είναι προφανές ότι δεν είχαν εύκολους τους υπολογισμούς όπως σήμερα. Έτσι χρησιμοποιούσαν το συγκεκριμένο κριτήριο με την παρακάτω μορφή: Διπλασιάζουμε το πλήθος των εκατοντάδων του αριθμού. Στον αριθμό που προκύπτει προσθέτουμε το υπόλοιπο διψήφιο μέρος. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε διψήφιο αριθμό. Αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 7 , τότε θα διαιρείται και ο αρχικός αριθμός

3 Εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής

Άσκηση 5. Να αποδείξετε αν ν αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι όλοι μεγαλύτεροι του -1 τότε ισχύει:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_\nu) \geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu$$

Άσκηση 6. Να αποδείξετε αν ν θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ έχουν γινόμενο 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu \geq \nu$$

Άσκηση 7. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Άσκηση 8. *Να αποδείξετε ότι:*

$$1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(2n-1)\cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

Άσκηση 9. *Να αποδείξετε ότι:*

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Άσκηση 10. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}, \forall n \in \mathbb{N}, x \neq 1$$

Άσκηση 11. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1),\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Άσκηση 12 (Ανισότητα I)**.** *Να αποδείξετε ότι:*

$$n^2 > 2n+1, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$$

Άσκηση 13 (Ανισότητα II)**.** *Να αποδείξετε ότι:*

$$2^n > n^3, \forall n \geq 10,\ n \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 14 (Ανισότητα III)**.** *Να αποδείξετε ότι:*

$$3^n > n^2, \forall n \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}$$

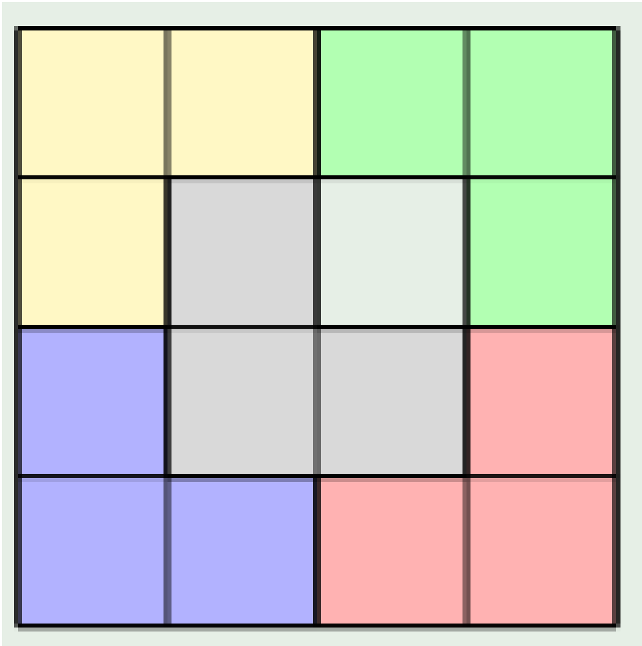
Πρόβλημα 5 (Η Βασίλισσα και οι μνηστήρες στο παλάτι - Μας το απέκρυψε ο Όμηρος;)**.** *Η Βασίλισσα Πηνελόπη, μετά το χάος της δοκιμασίας με το τόξο και τα τσεκούρια, έθεσε στους μνηστέρες το εξής πρόβλημα:*

-« Σε όλους σας θα φορέσω αύριο καπέλα. Κάποιοι από εσάς(τουλάχιστον ένας) θα έχετε λευκό καπέλο και οι υπόλοιποι μαύρο καπέλο.»

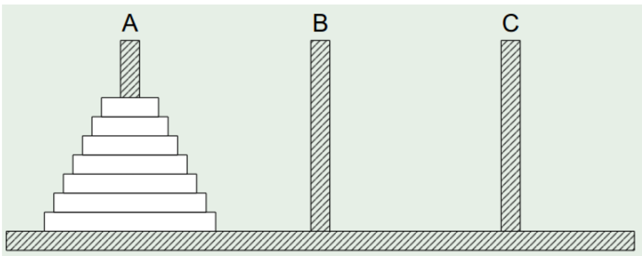
Μπορείτε να κοιτιέστε μεταξύ σας, αλλά όχι να μιλάτε ή να συνεννοείστε μεταξύ σας. Κάθε πρωί που θα έρχομαι από αύριο, θέλω αμέσως όσοι από εσάς έχετε καταλάβει ότι φοράτε άσπρο καπέλο να έρχεστε να μου το πείτε. Εφόσον, κάποια μέρα όλοι σας όσοι φοράτε άσπρο καπέλο και μόνον αυτοί μου έχετε αποκαλύψει ότι το καταλάβατε, τότε αμέσως θα παντρευτώ έναν από εσάς που θα το έχετε καταλάβει με κλήρωση.

Να αποδείξετε ότι, αν όλοι οι μνηστήρες ήταν αρκετά έξυπνοι και νηφάλιοι, τότε τη ν-οστή ώρα καθένας από τους ν μνηστήρες που φορούσαν άσπρο καπέλο θα εμφανιζόταν στη Βασίλισσα και θα της το αποκάλυπτε.

Πρόβλημα 6. *Να εξετάσετε είναι εφικτό να γραφεί κάθε αριθμός $n \geq 12$ ως άθροισμα πολλαπλασίων μόνο των αριθμών 4 και 5.*



Σχῆμα 2



Σχῆμα 3

Άσκηση 15. *Να αποδείξετε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, τότε:*

$$n^{n+1} > (n+1)^n, \forall n \geq 3$$

Πρόβλημα 7. *Να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε σκακιέρα διαστάσεων $2^n \times 2^n, n \geq 1$ μπορεί να καλυφθεί με τριόμινο σχήματος Λ, αφήνοντας ακάλυπτο ένα οποιοδήποτε τετράγωνό της, όπως πχ στην 4×4 σκακιέρα παρακάτω (σχήμα 2):*

Πρόβλημα 8 (Οι πύργοι του Ανόι)**.** *Οι πύργοι του Hανοι είναι ένα παιχνίδι στο οποίο υπάρχουν τρεις πάσσαλοι Α, Β, και μια σειρά από ν δίσκους οι διαφορετικής διαμέτρου. Οι δίσκοι είναι αρχικά τοποθετημένοι στον πάσσαλο Α, σε φθίνουσα σειρά διαμέτρου από κάτω προς τα πάνω, όπως στο παρακάτω σχήμα 3. Να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να μεταφερθούν οι n δίσκοι από τον A στον C σε $2^n - 1$ κινήσεις, με δεδομένο ότι σε κάθε βήμα μετακινείται ένας μόνο δίσκος από την κορυφή ενός σωρού στην κορυφή ενός άλλου, χωρίς να βρεθεί ποτέ μεγαλύτερος δίσκος πάνω από μικρότερο δίσκο.*

4 Κλείνοντας...Ο «νόμος των μικρών αριθμών»

Οι εφαρμογές της Αρχής της Μαθηματικής - Τέλειας επαγωγής έγινε σαφές πιστεύω, μέσα από τα παραδείγματα που διερευνήθηκαν, ότι είναι ανεξάντλητο πεδίο. Θα εμφανιστεί η ανάγκη χρήση της πολλές φορές στα επόμενα.

Αν και η δημιουργία εικασιών είναι αναγκαία στις Επιστήμες και στα Μαθηματικά, πολλές φορές η επαλήθευση μερικώς των υποθέσεών μας (**ατελής επαγωγή**), είναι δυνατόν να οδηγήσει σε, τουλάχιστον, «περίεργα» αποτελέσματα. Όπως διατυπώθηκε και η παρακάτω εικασία-πρόταση:

Πρόταση 1 (Νόμος των μικρών αριθμών Richard Guy). *Δεν υπάρχουν αρκετοί «μικροί αριθμοί», οι οποίοι να ικανοποιούν όλες τις προϋποθέσεις που τους αποδίδονται. Δηλαδή, οι μικροί αριθμοί δεν αντιπροσωπεύουν την συμπεριφορά των μεγάλων αριθμών.*

Εξάλλου, ήδη εμφανίστηκε το παράδειγμα του **«τριωνύμου παραγωγής πρώτων αριθμών»** $n^2 + n + 41$.

Ας δούμε όμως μερικά ακόμα παραδείγματα, εντυπωσιακότερα, όπως εμφανίζονται εδώ και στις αναφορές του.

Παράδειγμα 2. *Βρείτε τα υπόλοιπα των πρώτων αριθμών όταν διαιρεθούν με το 4. Τι παρατηρείτε;*

Η παρατήρησή σας ισχύει για τους πρώτους περίπου 25.000 όρους της ακολουθίας!

Παράδειγμα 3 (Πρώτοι του Fermat)**.** *Οι αριθμοί* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *είναι πρώτοι για κάθε* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*; Παρατηρήστε μερικούς από αυτούς...*

Δείτε περισσότερα παραδείγματα εδώ (Guy, Richard, The Strong Law of Small Numbers, The American Mathematical Monthly Vol. 95, No. 8 (Oct., 1988), pp. 697-712 (16 pages)).

5 Ο Συμβολισμός Σ

Έχουμε αποδείξει ήδη ότι:

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\nu\text{ - πλήθος άσσων}} = \nu$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Συμβολίζουμε με

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Οπότε τα παραπάνω αθροίσματα μπορούμε να τα γράψουμε:

$$1 + 1 + \cdots + 1 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Οπότε και το ζητούμενο άθροισμα $1^2 + 3^2 + \cdots (2n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$.
Αν τώρα κάνουμε τις πράξεις μέσα στο άθροισμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} (4i^2 - 4i + 1) = \\
= \sum_{i=1}^{n} 4i^2 - \sum_{i=1}^{n} 4i + \sum_{i=1}^{n} 1 = \\
= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = \\
= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = \\
\frac{1}{3}(4n^3 - n) = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}$$

6 Υποδείξεις - Λύσεις

Γραμματόσημα ταχυδρομικής υπηρεσίας

Υπόδειξη. Η πρώτη αξία που μπορεί να δημιουργηθεί με τα δύο γραμματόσημα και το επιθυμούμε είναι αυτή των 8 λεπτών (στο εξής θα εννοούμε λεπτά του € και θα παραλείπεται.)

Αν μία αξία k λεπτών περιέχει ένα 5 (δηλαδή ένα γραμματόσημο των 5 λεπτών), τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε την επόμενη αξία, αντικαθιστώντας το 5 με δύο των 3.

Αν μία αξία k δεν περιέχει κανένα 5, τότε, εφόσον όλες οι αξίες που θέλουμε να δημιουργήσουμε είναι $k \geq 8$, θα περιέχει σίγουρα τουλάχιστον τρία των 3. Οπότε σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να δημιουργήσουμε την αξία $k+1$, αντικαθιστώντας τα τρία των 3 με δύο των 5.

Συνεπώς, αν έχει δημιουργηθεί η τυχαία ακέραια αξία $k \geq 8$ τότε μπορεί να δημιουργηθεί και η αξία $k+1$, οπότε από αρχή Μαθηματικής επαγωγής έχουμε το ζητούμενο. □

Διαγώνιοι κυρτού πολυγώνου

Υπόδειξη. Το πλήθος των διαγωνίων είναι $\frac{1}{2}n(n-3), n \geq 3$. □

Πολλαπλάσιο του 3 ;

Παράδειγμα 3.1. Για ποιες τιμές του n ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3;

Λύση. Ελέγχοντας μικρές τιμές του φυσικού αριθμού n διαπιστώνει κανείς ότι ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν το n ισούται με 1, 3, 5 και 7, ενώ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν το n ισούται με 2, 4, 6 ή 8. Φαίνεται λοιπόν εύλογο να μαντέψει κανείς ότι ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν ο n είναι περιττός. Αυτό αποδεικνύεται ορθό, και ο ακόλουθος επαγωγικός συλλογισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη) για να ολοκληρώσει το ζητούμενο: Γράφουμε $a_n = 2^n + 1$. Τότε $a_{n+2} = 2^{n+2} + 1 = 4(2^n + 1) - 3 = 4a_n - 3$, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν συμβαίνει το ίδιο και με το a_n. □

Διερεύνηση . Δείτε εδώ σελ.7 □

Εύρεση αθροίσματος από γνωστό άθροισμα Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα για τα τετράγωνα των n πρώτων φυσικών δίνεται από τον τύπο

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε καθένα από τους αριθμούς του αθροίσματος με 2, τότε προκύπτει ότι το άθροισμα 4- πλάσιο:

$$S_m = 4\frac{m(m+1)(m+1)}{6}$$

Επειδή θέλουμε το άθροισμα των άρτιων τετραγώνων έως τον $(n-1)^2$, άρα πρέπει $m = \frac{n-1}{2}$, οπότε το άθροισμα των αρτίων θα είναι:

$$S_a = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$