



ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

'Ομιλος Μαθηματικών Α' Λυκείου

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 25 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2022.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Σ.Χασάπης

Μέρος Ι
Συναρτήσεις πολλών
μεταβλητών - Μερικές
παράγωγοι



Σχῆμα 1: *Friendship*, Pablo Picasso 1908

1 Το παιχνίδι της ημέρας

Δύο συμμαθητές συναντώνται στο δρόμο 20 ἔτη μετά την αποφοίτησή τους, χωρίς να ἔχουν ξαναεπικοινωνήσει μετά το σχολείο. Ακολουθεί ο εξής διάλογος:

-Α: Ξέρεις σήμερα είναι εξαιρετική ημέρα για μένα. Και οι τρεις μου γιοί ἔχουν γενέθλια! Μπορείς να βρεις την ηλικία τους;

-Β: Φυσικά! Αλλά πρέπει να ξέρω κάτι γι αυτούς!

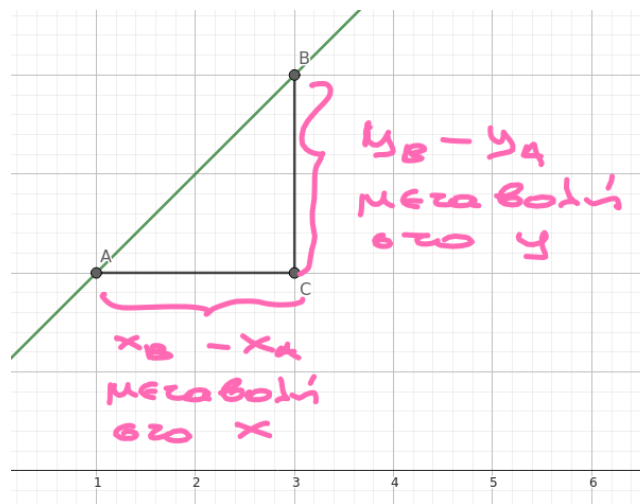
-Α: Το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 36.

- B: Χρειάζομαι κι άλλα στοιχεία...
- A: Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι το πλήθος των παραθύρων της αίθουσας εκδηλώσεων του σχολείου μας.
- B: Χμμμ...Χρειάζομαι κάτι ακόμα...
- A: Ο μεγαλύτερος από αυτούς έχει πράσινα μάτια!
- B: Εντάξει! Αυτά τα στοιχεία είναι αρκετά!
- Υπόδειξη: ;;

2 Μεταβολές συναρτήσεων - Εισαγωγή

2.1 Η ευθεία και οι μεταβολές της

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $y = ax + b$ παριστάνει μία ευθεία στο επίπεδο.



Σχήμα 2: Η μεταβολή των δύο μεγεθών x, y .

Στην ευθεία αυτήν η μεταβολή του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x είναι σταθερή και ίση με την κλίση της ευθείας και φαίνεται στο συντελεστή του x , τον a . Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η μέση μεταβολή σε ένα διάστημα είναι ίση με τη «στιγμιαία μεταβολή» σε ένα σημείο, καθώς η ευθεία έχει πάντα σταθερή κλίση.

2.2 Μεταβολές σε καμπύλες

Αν όμως αντί για ευθεία έχουμε μία καμπύλη, τότε η μεταβολή πώς μπορεί να μετρηθεί;

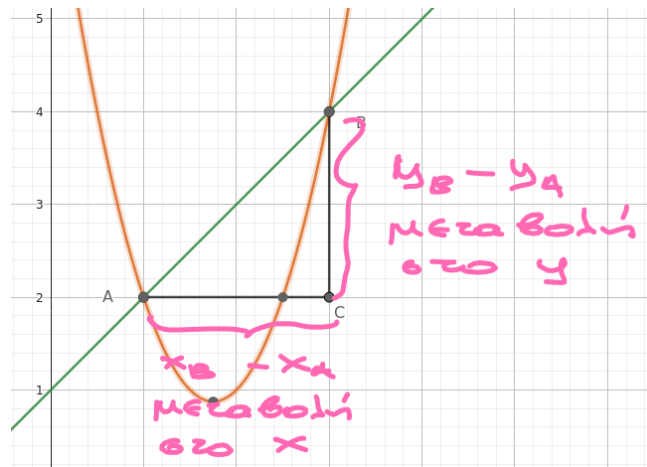
Όπως φαίνεται στο σχήμα 3 πάλι μπορούμε να θεωρήσουμε την ευθύγραμμη μεταβολή πάνω στην αντίστοιχη ευθεία των δύο σημείων A και B. Όμως αυτήν τη φορά αυτή η μεταβολή δεν είναι σταθερή, όπως στην ευθεία, αλλά μεταβάλλεται καθώς θα επιλέξουμε δύο διαφορετικά σημεία. Δηλαδή, ο λόγος

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

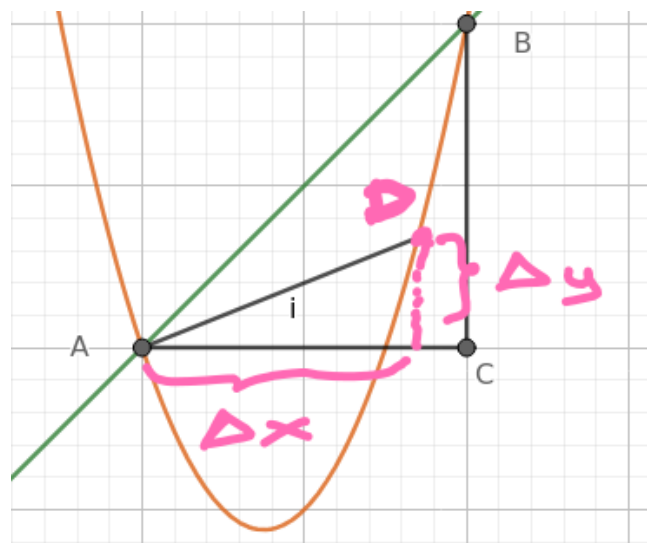
αυτήν τη φορά μας δίνει απλά μία «μέση μεταβολή» για το διάστημα A,B.

Έτσι, για παράδειγμα αν επιλέξουμε ένα άλλο σημείο D, όπως στο σχήμα 4, τότε η μεταβολή αλλάζει δραστηκά και γίνεται όση η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος AD.

Επιπλέον, αυτή η «μέση μεταβολή» για ένα διάστημα δεν απεικονίζει ολόκληρη την αλήθεια για το τι ακριβώς συμβαίνει ενδιάμεσα του διαστήματος.



Σχήμα 3: Η μεταβολή σε μία καμπύλη



Σχήμα 4: Δεύτερο διάστημα μεταβολής στην καμπύλη

Για αυτόν το λόγο χρειαζόμαστε ένα είδος **στιγμιαίας** μέτρησης της μεταβολής, η οποία μπορεί να επιτευχθεί, αν ο λόγος μεταβολής

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

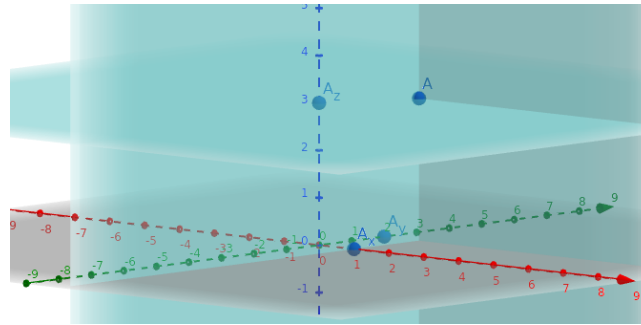
μετρηθεί για $x_B - x_A$ σχεδόν ίσο με το μηδέν.

Δηλαδή, αν θέλουμε να μετρήσουμε τη μεταβολή κοντά στο σημείο A, τότε πολύ απλά «στέλνουμε» το σημείο B πολύ κοντά στο A και παρατηρούμε ποια είναι η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος AB αυτήν την φορά, έχοντας έτσι με πολύ καλή ακρίβεια το λόγο μεταβολής της καμπύλης κοντά στο A. Δείτε το σχέδιο [εδώ](#).

Αυτήν την οριακή μεταβολή την ονομάζουμε **παράγωγο** της f , η οποία συνάρτηση αναπαριστά την πορτοκαλί καμπύλη στην συγκεκριμένη περίπτωση στο σημείο A και μας δείχνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η τεταγμένη y ενός σημείου της καμπύλης, ως προς την αντίστοιχη τεταγμένη του. Η αλλιώς πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μέγεθος y ως προς το μέγεθος x , όταν η γραφική παράσταση του ενός ως προς το άλλο δίνεται από την πορτοκαλί καμπύλη του σχήματος.

3 Μερικές παράγωγοι συναρτήσεων και εφαπτόμενο επίπεδο

Τι συμβαίνει όμως αν ένα μέγεθος εξαρτάται από περισσότερα άλλα μεγέθη; Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι το μέγεθος z εξαρτάται από δύο άλλα μεγέθη x, y , τότε για τη γραφική παράσταση της αντίστοιχης σχέσης εξάρτησης θα χρειαστούμε τρεις άξονες τιμών, αντί για δύο τους x, y, z . Έτσι δημιουργείται ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων, στο οποίο κάθε σημείο έχει τρεις συντεταγμένες $A(1, 2, 3)$, όπως στο σχήμα 5.



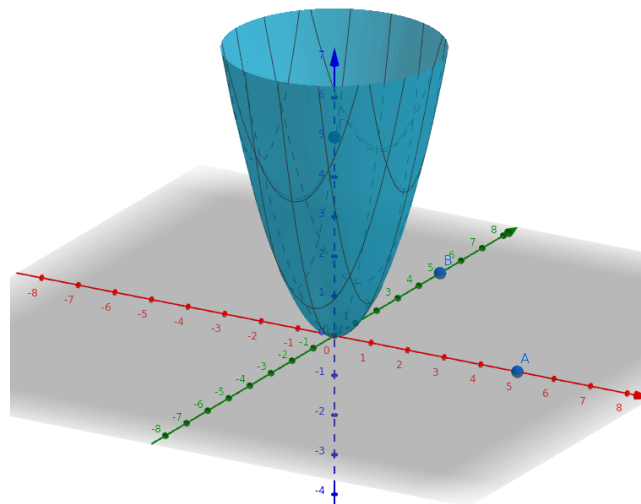
Σχήμα 5: Περιεργαστείτε το [εδώ](#).

3.1 Επιφάνειες στο χώρο

Γενικά τέτοιες εξισώσεις στις τρεις διαστάσεις παράγουν επιφάνειες και παρακάτω βλέπουμε μερικές από αυτές.

3.1.1 Παραβολοειδές εκ περιστροφής

Έχει εξίσωση της μορφής $f(x, y) = x^2 + y^2$ και έχει δημιουργηθεί περιστρέφοντας μία παραβολή $z = x^2$ γύρω από τον άξονα των z ¹.

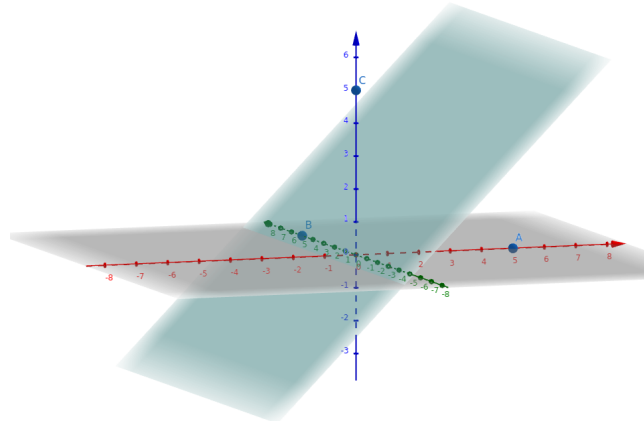


Σχήμα 6: Περιεργαστείτε το [εδώ](#).

3.1.2 Επίπεδο στο χώρο

Ένα επίπεδο στο χώρο (βλ. σχήμα 7) έχει εξίσωση της μορφής $z = ax + by + c$, όπου οι παράμετροι a, b καθορίζουν την κλίση του επιπέδου στην τομή του με τους αντίστοιχους άξονες. Η σταθερά c μετακινεί το επίπεδο πάνω - κάτω στον άξονα z .

¹Όλα τα σχήματα μπορείτε να τα περιεργαστείτε ανοίγοντας το σύνδεσμο και σέρνοντάς τα.

Σχήμα 7: Περιεργαστείτε το [εδώ](#).

3.1.3 Μία σφαίρα

Γνωρίζουμε ότι στο επίπεδο ένας κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου στα οποία έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν σταθερή απόσταση ρ (ακτίνα του κύκλου), από ένα σταθερό σημείο K (Κέντρο του κύκλου).

Η απόσταση δύο σημείων στο επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Οπότε προκύπτει ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r θα δίνεται από τη σχέση:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Ενώ για να παραστήσουμε ως συνάρτηση έναν κύκλο αυτό είναι εφικτό, χρησιμοποιώντας δύο συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα αυτές που αναπαριστούν καθένα από τα ημικύκλια κάτω και πάνω από τον άξονα x' και είναι:

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Γενικεύοντας την απόσταση αυτή (Ευκλείδεια απόσταση) στο χώρο, προκύπτει η σχέση:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

οπότε αντίστοιχα όλα τα σημεία του χώρου που έχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο K , θα δίνονται από μία εξίσωση της μορφής

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

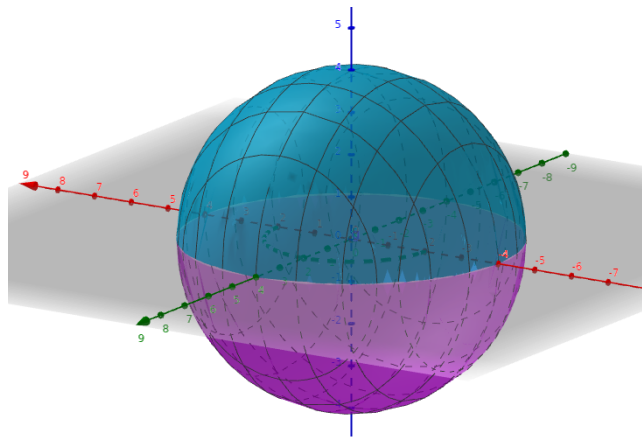
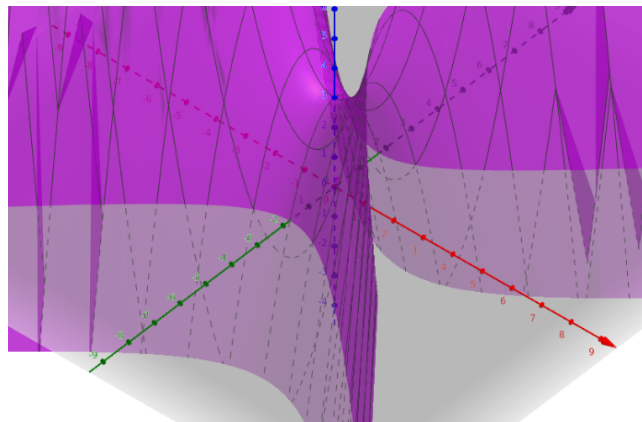
όπου (x_0, y_0, z_0) θα είναι το κέντρο της **σφαίρας** και r η ακτίνα της, όπως φαίνεται στο σχήμα 8 μία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4, η οποία έχει αναπαρασταθεί από δύο ημισφαίρια με εξισώσεις:

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \text{ και } g(x, y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

3.1.4 Υπερβολικό παραβολοειδές

Η επιφάνεια αυτή δημιουργείται από παραβολές που τέμνουν υπερβολές απόπου προέρχεται το όνομα. Μία τέτοια εξίσωση που δίνει αυτήν την επιφάνεια είναι η $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3$ που απεικονίζεται και στο σχήμα 9. Βλέπουμε ότι η επιφάνεια που δημιουργείται μοιάζει με σαμάρι (σάγμα = σαμάρι(ν)ˆ σαγμάριονˆ σάγμα εκ του σάττω που σημαίνει φορτώνω με όπλα, οπλίζω).

Παρατηρήστε ότι στη «ράχη» του σαμαριού υπάρχει ένα σημείο (στο σχήμα παρακάτω είναι το σημείο $(0, 0, 3)$), το οποίο αν και δημιουργεί την εντύπωση ότι είναι τοπικό ακρότατο, ελάχιστο αν το δεις στη διεύθυνση μπρος πίσω του γαϊδουριού ή μέγιστο αν το δεις στη διεύθυνση δεξιά-αριστερά του γαϊδουριού, παρόλα αυτά δεν είναι τίποτα από τα δύο (**σαγματικό σημείο**).

Σχήμα 8: Σφαίρα που μπορείτε να περιεργαστείτε [εδώ](#).Σχήμα 9: Υπερβολικό παραβολοειδές = Σαμάρι περιεργαστείτε [εδώ](#).

3.1.5 Δίχωνος κώνος

Κλείνοντας αυτήν τη σύντομη περιήγηση σε κάποιες επιφάνειες του χώρου που αναπαρίστανται με εξισώσεις υπενθυμίζουμε τον **δίχωνο κώνο** με τον οποίο συναντηθήκαμε στις **κωνικές τομές** (= κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή), ως τομές του κώνου με ένα κατάλληλα κατευθυνόμενο επίπεδο.

Ο κώνος που βλέπουμε στο σχήμα [10](#) έχει προέλθει από τη γραφική παράσταση της εξίσωσης $z^2 = x^2 + y^2$ και δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

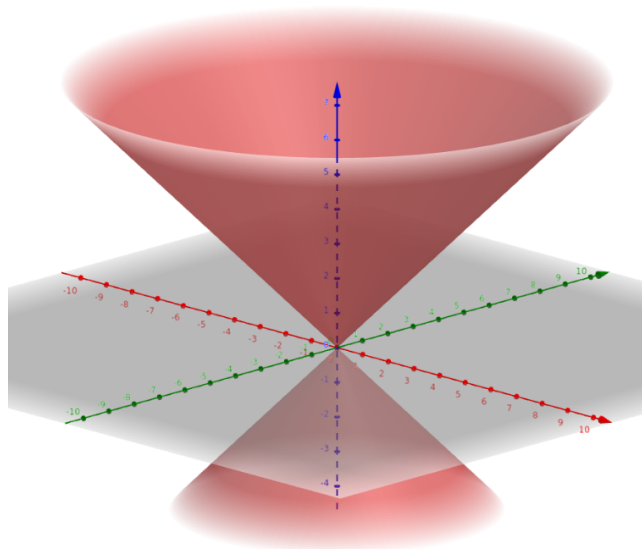
Στο περιβάλλον που οδηγεί ο σύνδεσμος, υπάρχουν διάφορα επίπεδα, τα οποία αν τα εμφανίσετε θα δείτε πώς δημιουργούνται οι επιφάνειες που ονομάζουμε κωνικές τομές.

Ο άξονας του κώνου αυτού είναι ο άξονας $z'z$ και κάθε επίπεδο κάθετο σε αυτόν, το οποίο δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων δημιουργεί μία τομή που είναι περιφέρεια κύκλου, όπως φαίνεται στο σχήμα [11](#) στην τομή του επιπέδου $z = 3$ με τον παραπάνω κώνο.

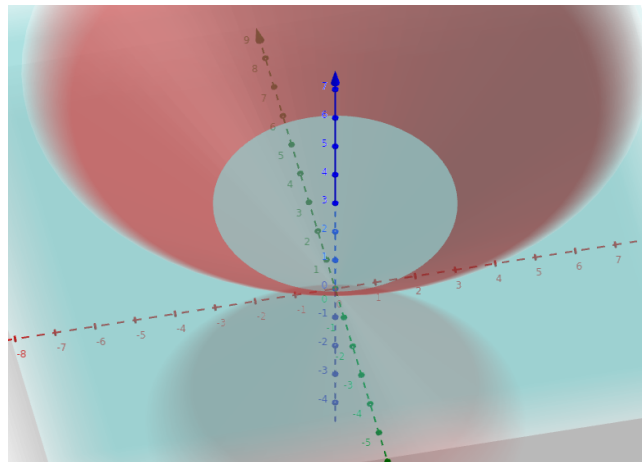
Αντίστοιχα, αν τμήσουμε τον κώνο με ένα επίπεδο με κλίση μεγαλύτερη απολύτως από τη **γενέτειρά**² του (ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και βρίσκεται όλη εντός του κώνου), όπως για παράδειγμα το επίπεδο $y = \frac{3}{2}z + 1$, τότε θα προκύψει μία **έλλειψη**.

Ένα επίπεδο όπως το $y = \frac{1}{2}z - 1$ με κλίση μεγαλύτερη απολύτως από αυτήν της γενέτειράς του θα παράξει μία **υπερβολή**, ενώ ένα επίπεδο όπως το $y = z - 3$ παράλληλο προς τη γενέτειρά του θα παράξει μία **παραβολή**.

²Τα βασικά στοιχεία του κώνου μπορείτε να τα θυμηθείτε ρίχνοντας μία ματιά [εδώ](#).



Σχήμα 10: Διερευνήστε τον κώνο και τις διάφορες τομές του χρησιμοποιώντας το περιβάλλον [εδώ](#).



Σχήμα 11

3.1.6 Μία δίκτορη επιφάνεια

Ολοκληρώνοντας αυτήν τη σύντομη περιήγηση σε κάποιες από τις επιφάνειες που μπορούμε να αναπαραστήσουμε στον τριδιάστατο χώρο βλέπουμε την επιφάνεια, η οποία παράγεται από την εξίσωση:

$$f(x, y) = (x^2 + 5y^2)e^{1-x^2-y^2} + 3$$

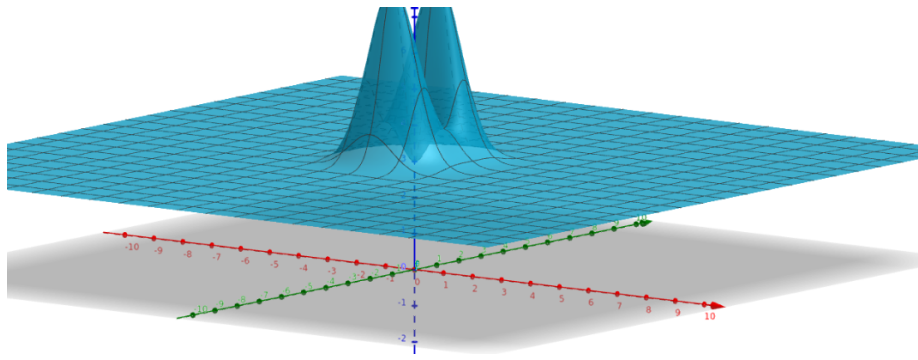
όπως φαίνεται στο σχήμα [12](#)

3.2 Ο Λόγος μεταβολής στις επιφάνειες

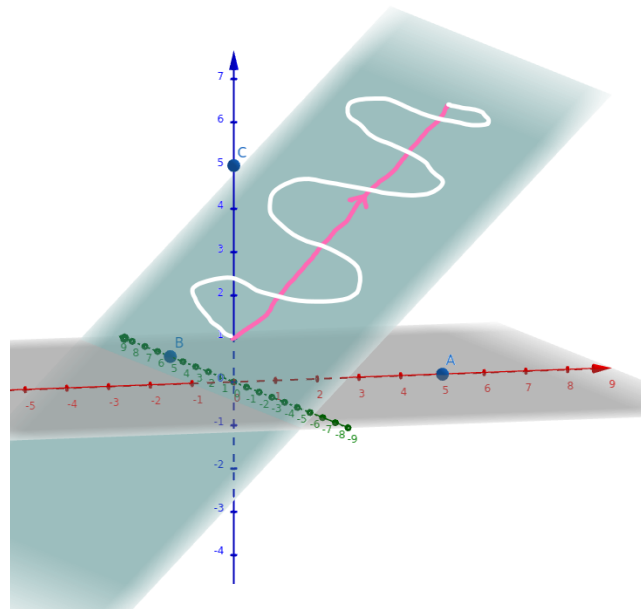
Καθώς περιεργαζόμαστε οποιαδήποτε από τις επιφάνειες που είδαμε στα προηγούμενα είναι λογικό να διερωτηθεί κάποιος πώς μεταβάλλονται οι τιμές των αντιστοίχων συναρτήσεων ή τέλος πάντων οι τιμές του ύψους z , ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y σε αυτές τις επιφάνειες.

Γνωρίζουμε από την εμπειρία μας για παράδειγμα ότι κινούμενοι σε έναν ανηφορικό δρόμο, όταν μετακινούμαστε παράλληλα προς τις άκρες του, δηλαδή παράλληλα προς το πεζοδρόμιο είναι «περισσότερο απότομος» απ' ό,τι αν μετακινηθούμε λοξά σε μορφή ζιγκ-ζαγκ για παράδειγμα, όπως παρατηρούμε και στο σχήμα [13](#).

Στο σχήμα [13](#) λοιπόν φαίνεται να έχει ιδιαίτερη σημασία η διεύθυνση κίνησης για να κατανοήσουμε πώς μεταβάλλεται το ύψος z σε σχέση με τα x, y . Στις καμπύλες



Σχήμα 12: Περιεργαστείτε την επιφάνεια [εδώ](#).



Σχήμα 13: Η κίνηση στη ροζ διαδρομή είναι περισσότερο απότομη εκείνης στη λευκή. Θυμηθείτε πώς ανεβαίνατε τις ανηφόρες με το ποδήλατό σας...

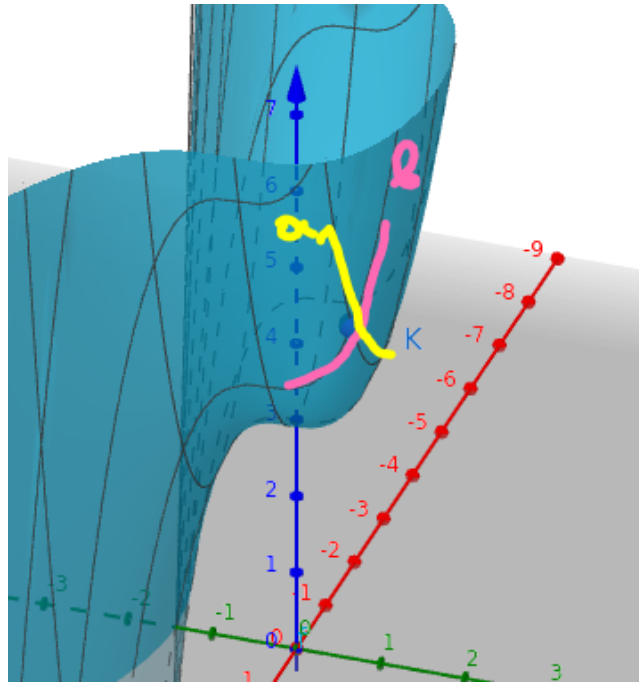
του επιπέδου δεν είχαμε παρόμοιους προβληματισμούς, καθώς η διεύθυνση κίνησης μπορούσε να γίνει μόνο σχετικά προς τον άξονα x' . Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του ύψους y της καμπύλης ως προς τη θέση x στο τυχαίο σημείο x_0 καθοριζόταν απλά από την παράγωγο $f'(x_0)$.

Έτσι, για παράδειγμα στην επιφάνεια $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3$ στο σημείο $K(1, 1, 5)$ η κίνηση σε διαφορετικές διευθύνσεις γίνεται με διαφορετική κλίση και αυτό γίνεται σαφές, αν παρατηρήσουμε τις δύο διευθύνσεις των γραμμών (α) και (β) στο σχήμα 14.

Οι κινήσεις αυτές από το σημείο K του σχήματος γίνονται σε τομές με επίπεδα παράλληλα στους άξονες x' και y' αντίστοιχα. Ουσιαστικά λοιπόν σε αυτές τις κινήσεις αυτό που θέλουμε να μετρήσουμε είναι η μεταβολή σε στη διεύθυνση αυτών των επιπέδων των παράλληλων στον άξονα x' και y' αντίστοιχα.

Η μέτρηση αυτή γίνεται χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης σε καθεμία από τις δύο αυτές διευθύνσεις. Καθεμία από αυτές τις παραγώγους την ονομάζουμε **μερική παράγωγο ως προς x ή y** αντίστοιχα και τη συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$$



Σχήμα 14

3.2.1 Υπολογισμός μερικών παραγώγων

Ο υπολογισμός της μερικής παραγώγου, δοθέντος ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, το οποίο ελέγχεται με παρόμοιες μεθόδους με εκείνες που γνωρίζουμε για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής γίνεται με χρήση των ίδιων κανόνων παραγωγίσιμης.

Λαμβάνουμε όμως υπόψη, όταν παραγωγίζουμε ως προς x για παράδειγμα, ότι όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές που εμφανίζονται θεωρούνται ως σταθερές και παραγωγίζονται ανάλογα.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3$ του παραδείγματος θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^3 + 3)}{\partial x} = 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + y^3 + 3)}{\partial y} = 0 + 3y^2 + 0 = 3y^2$$

Υπολογίζοντας τώρα καθεμία μερική παράγωγο στο σημείο $K(1, 1, 5)$ του σχήματος 14 έχουμε ότι:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 3 \text{ και } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2$$

το οποίο συμβαδίζει με την οπτική εικόνα που είχαμε ότι η διαδρομή β είναι πιο απότομη από τη διαδρομή α . Ας δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού μερικών παραγώγων ακόμα:

Παράδειγμα 1.

$$f(x, y) = e^{x^2 - xy}$$

$$d/dx(e^{x^2 - xy}) = e^{x(x-y)}(2x - y)$$

$$d/dy(e^{x^2 - xy}) = x(-e^{x(x-y)})$$

Παράδειγμα 2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4 Κλίση και Κατευθυνόμενη παράγωγος

Ορισμός 1 (Κλίση συνάρτησης f). Αν μία συνάρτηση $f(x, y, z)$ έχει μερικές παραγώγους στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$, τότε ονομάζεται **κλίση της f στο P** το διάνυσμα των μερικών παραγώγων:

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

που λαμβάνεται αν υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι στο P .

Η κλίση της f συμβολίζεται και με $\text{grad}f$.

Παράδειγμα 3. Να υπολογιστεί η κλίση της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ στο σημείο $P(1, 1, 1)$.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης και έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

και εφαρμόζοντας στο σημείο $P(1, 1, 1)$, έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = 3 \cdot 1^2 - 1^2 = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1,1)} = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(1,1,1)} = -1$$

Αντίστοιχοι υπολογισμοί γίνονται και για συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

Όπως είδαμε οι μερικές παράγωγοι υπολογίζουν το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης στη διεύθυνση των αξόνων x', y', z' ανάλογα.

Υπάρχει η δυνατότητα να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης και σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση είναι επιθυμητό.

Ορισμός 2 (Κατευθυνόμενη παράγωγος). Αν $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η **κατευθυνόμενη παράγωγος** στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ στη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης στο σημείο με το διάνυσμα:

$$\mathbf{D}f(P)\vec{u} = \text{grad}f(P) \cdot \vec{u} = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$$

Παράδειγμα 4. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ στο σημείο $P(1, 0, 0)$.

Έχουμε τους υπολογισμούς:

$$\nabla f = (2xe^{-yz}, -x^2ze^{-yz}, -x^2ye^{-yz})$$

και στο σημείο $P(1, 0, 0)$ έχουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο στο διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι:

$$(2 \cdot 1 \cdot e^0, -1 \cdot 0 \cdot e^0, -1 \cdot 0 \cdot e^0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Η μέγιστη μεταβολή της f

Ας υποθέσουμε ότι η κλίση της f είναι $\nabla f(P) \neq 0$ και $\vec{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ θα δίνεται από το μέγεθος

$$\nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \alpha = \|\nabla f\| \cdot \cos \alpha$$

Οπότε θα μεγιστοποιείται για $\alpha = 0$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\vec{u}, \nabla f$ γίνονται παράλληλα.

Συνεπώς, η κλίση της f δείχνει την κατεύθυνση εκείνη προς την οποία η f μεταβάλλεται γρηγορότερα.

Παράδειγμα 5. Να βρεθεί η κατεύθυνση προς την οποία αυξάνεται γρηγορότερα η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ και η κατεύθυνση προς την οποία ελαττώνεται γρηγορότερα, όταν κάποιος βρίσκεται στο σημείο $P(1, 1, 1)$.

Στο παράδειγμα 3 είδαμε ότι: $\nabla f = (3x^2 - y^2, -2xy, -1)$ και υπολογίζοντάς την στο σημείο $(1, 1, 1)$ έχουμε:

$$\nabla f|_{(1,1,1)} = (2, -2, -1)$$

Επιπλέον ελαττώνεται γρηγορότερα προς την κατεύθυνση

$$-\nabla f|_{(1,1,1)} = (-2, 2, 1)$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο

Αντίστοιχα προς την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης στο επίπεδο, η οποία οπτικοποιεί την κλίση της καμπύλης, για την κλίση μίας επιφάνειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί το **εφαπτόμενο επίπεδο**.

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια με εξίσωση $z = f(x, y)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\nabla f|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0) = z - f(x_0, y_0)$$

Παράδειγμα 6. Να υπολογιστεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο παραβολοειδές $f(x, y) = x^2 + y^2$ στο σημείο $K(1, 1, 2)$.

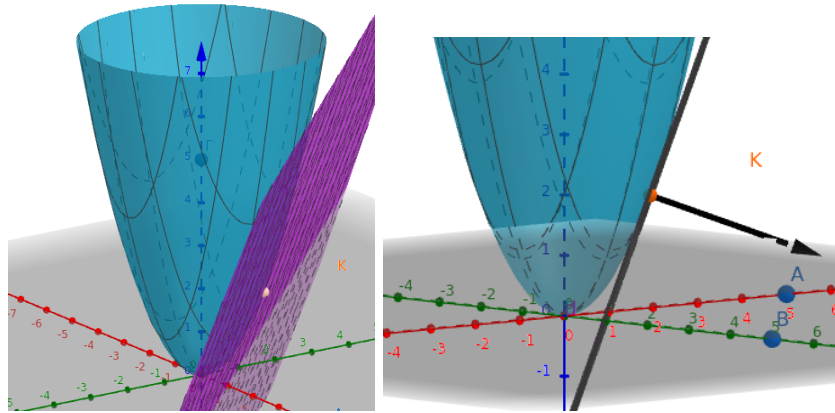
Υπολογίζουμε την κλίση του παραβολοειδούς:

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

η οποία στο σημείο K είναι $(2, 2)$. Το εφαπτόμενο επίπεδο θα έχει εξίσωση:

$$(2, 2) \cdot (x - 1, y - 1) = z - f(1, 1) = z - 2$$

$$2x - 2 + 2y - 2 = z - 2 \Leftrightarrow z = 2x + 2y - 2$$



Σχήμα 15: Το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο K στο παραβολοειδές μπορείτε να το περιεργαστείτε [εδώ](#).

Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f|_{(x_0, y_0)}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας κάθε παραγωγίσιμης καμπύλης που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) , οπότε οι ταχύτητες των καμπυλών αυτών στο συγκεκριμένο σημείο βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο το οποίο είναι ακριβώς το εφαπτόμενο επίπεδο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 15.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο για μία καμπύλη $y = f(x)$ σε ένα επίπεδο γίνεται αντίστοιχα:

$$\nabla f \cdot (x - x_0) = y - f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)(x - x_0) = y - f(x_0)$$

που είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό, αφού η μερική παράγωγος της f ως προς x ουσιαστικά είναι και η παράγωγος της f ως προς x .

Ακρότατα συνάρτησης .

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής στο επίπεδο, έχουμε κριτήρια για πιθανά σημεία ακροτάτων για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Πιθανά σημεία ακροτάτων:

1. Συνοριακές τιμές σε οριακά σημεία του πεδίου ορισμού της.
2. Εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, όπου είτε $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
3. Σημεία όπου κάποια μερική παράγωγος δεν υπάρχει.

Απλοποίηση συμβολισμού μερικής παραγώγου - παράγωγοι ανώτερης τάξης.
Μπορούμε να συμβολίσουμε την μερική παράγωγο της f ως προς x , ως εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Επιπλέον, όπως ορίζεται η δεύτερη παράγωγος ως παράγωγος της παραγώγου συνάρτησης παρόμοια μπορούμε να ορίσουμε δευτερές μερικές παραγώγους.

Για παράδειγμα:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ f_x(x, y) &= 2x & f_y(x, y) &= 2y \\ f_{xx} &= (2x)' = 2 & f_{xy} &= 0 & f_{xx} &= (2)' = 0 & f_{yx} &= (2y)' = 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα 1 (Κριτήριο δευτέρης παραγώγου). Αν σε ένα εσωτερικό σημείο ισχύει ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, τότε:

1. Η f έχει **τοπικό μέγιστον** στο (x_0, y_0) , αν $f_{xx} < 0$ και $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
2. Η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο (x_0, y_0) , αν $f_{xx} > 0$ και $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
3. Η f έχει **σαγματικό σημείο** στο (x_0, y_0) , αν

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

Παράδειγμα 7. Να βρεθούν τα ακρότατα του παραβολοειδούς $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Γνωρίζουμε ότι $f_x(x, y) = 2x, f_y(x, y) = 2y$ και ισχύει ότι

$$f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$$

Επιπλέον ισχύει ότι $f_{xx} = f_{yy} = 2, f_{xy} = 0$ οπότε έχουμε ότι:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$$

Άρα η f έχει ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 8. Θεωρούμε το υπερβολικό παραβολοειδές $f(x, y) = x^2 - y^2$. Να βρεθεί αν έχει ακρότατα.

Ισχύει ότι:

$$f_x = 2x, f_y = -2y, f_{xx} = 2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 0 = f_{yx}$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$D = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$$

Συνεπώς, το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο, όπως είχαμε δει στο σχήμα 9.

5 Το λογισμικό Surfer

6 Θέματα Διαγωνισμών