Η Μοντελοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών(ΠΣ) Μαθηματικών

Σωτήριος Δ. Χασάπης
Μαθηματικός, Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
shasapis@sch.gr

Περίληψη

Στα νέα Προγράμματα Σπουδών, τα οποία δημοσιεύτηκαν το 2021, τα Μαθηματικά, μεταξύ άλλων, θεωρούνται ως ένας ισχυρός τρόπος ερμηνείας του κόσμου. Ως συνέπεια αυτού στα νέα ΠΣ Μαθηματικών η προσέγγιση μέσω μοντελοποίησης προβλημάτων για την εισαγωγή των εννοιών αποτελεί ουσιαστικό μέρος της κατεύθυνσής τους και παράλληλα σημαντική καινοτομία, τουλάχιστον ως προς το εύρος εμφάνισης σε αυτά. Η ιδέα οι μαθητές να έρθουν στο επίκεντρο της διδασκαλίας και να προσπαθήσουν να κατανοήσουν την αναγκαιότητα νέων εννοιών μέσω προβλημάτων και επίλυσής τους μέσω συνεργασιών αποτελεί κύριο άξονα της φιλοσοφίας των νέων ΠΣ. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται – κατά την οπτική του συγγραφέα- κάποιες, σχετικές με τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω μοντελοποίησης, διδακτικές καινοτομίες, η προστιθέμενη αξία τους και μερικά παραδείγματα μετατροπής κοινών ασκήσεων σε δραστηριότητες μοντελοποίησης. Τέλος, προτείνονται κάποιες ιδέες για τη δημιουργία νέων έργων και αναζήτησης νέων δραστηριοτήτων, συνοψίζοντας τις αναφορές στη μοντελοποίηση στα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα των νέων ΠΣ.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικά, μοντελοποίηση, δραστηριότητες, συνεργατικότητα

Εισαγωγή

Η οπτική για τα νέα προγράμματα σπουδών (2021) είναι ότι τα Μαθηματικά αποτελούν έναν ισχυρό τρόπο ερμηνείας του κόσμου, οπότε συνεισφέρουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη τόσο της ατομικής, όσο και της συλλογικής σκέψης. Μέσα στους κύριους στόχους των νέων ΠΣ δε θα μπορούσε παρά να συμπεριλαμβάνονται βασικές πρακτικές όπως η μοντελοποίηση προβλημάτων μέσω των Μαθηματικών, σε ένα επικοινωνιακό περιβάλλον ανταλλαγής ιδεών και επιχειρημάτων, πλήρων συλλογισμών, οι οποίοι μπορούν να βελτιώνονται με την ένταξη διαδικασιών διερεύνησης και αναστοχασμού. Επιπλέον, η διαδικασία της μοντελοποίησης μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στην αναγνώριση συνδέσεων των Μαθηματικών με τις επιστήμες και τα υπόλοιπα πεδία της ανθρώπινης γνώσης, καθώς επίσης και στην κατανόηση του κόσμου σε ένα κριτικό πλαίσιο, το οποίο ενίοτε μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με τις συνθήκες.

Στα νέα προγράμματα σπουδών προτείνονται και αναμένεται από τους διδάσκοντες να δημιουργηθούν και νέα Μαθηματικά έργα. Ένα Μαθηματικό έργο είναι ένα πρόβλημα, άσκηση ή απλά ερώτηση, η οποία θα προκαλέσει τους μαθητές να εργαστούν πάνω σε αυτό, να δραστηριοποιηθούν, να αναπτύξουν μαθηματική δραστηριότητα. Έτσι, με ένα κατάλληλα επιλεγμένο – προσαρμοσμένο έργο, αναμένεται οι μαθητές να έχουν πλούσια μαθηματική δραστηριότητα, η οποία θα οδηγήσει στην απόδειξη, τη γενίκευση, την ισοδυναμία και τους μετασχηματισμούς, τις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών, όπως τιτλοφορούνται στο νέο ΠΣ.

Μαθηματική Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία ανάπτυξης ενός μαθηματικού μοντέλου, το οποίο στην πολύ γενική περιγραφή αφορά φαινόμενα, δραστηριότητες ή διαδικασίες που μπορούν να προέρχονται από τελείως διαφορετικά επιστημονικά πεδία, όπως από τις φυσικές επιστήμες, τις επιστήμες της μηχανικής, τα οικονομικά, τις κοινωνικές επιστήμες, αλλά και τις ανθρωπιστικές σπουδές (Κομηνέας & Χαρμανδάρης 2015). Γενικά, στόχοι της μοντελοποίησης είναι η μελέτη και κατανόηση πολύπλοκων συστημάτων, η χρήση και ανάπτυξη νέων μαθηματικών εργαλείων, η πρόβλεψη – προσομοίωση συμπεριφορών των συστημάτων αυτών, ο έλεγχος υποθέσεων του μοντέλου και η περαιτέρω βελτίωσή του, ώστε να παράγει αξιόπιστα αποτελέσματα. Ειδικότερα, για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μέσω της μοντελοποίησης αναμένεται να ενδυναμωθεί η μάθηση των Μαθηματικών και να αναπτυχθούν σημαντικές δεξιότητες και κριτική ικανότητα, δυνατότητα προσαρμογής σε διαφορετικό πλαίσιο κάθε φορά, που αποτελούν σημαντικά χαρακτηριστικά του πολίτη του 21ου αιώνα. Επιπλέον, μέσω της μοντελοποίησης προσφέρεται η δυνατότητα για ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις της καθημερινής ζωής από τους μαθητές. Η εκπαίδευση στη μετάφραση των προβλημάτων αυτών στη μαθηματική γλώσσα και η αναπαράστασή τους με συμβολική γλώσσα, η παραγωγή αποτελεσμάτων σε αυτήν, μέσω της εφαρμογής των μαθηματικών ιδιοτήτων και η επιστροφή αυτών των αποτελεσμάτων στην αρχική τους γλώσσα, αποτελούν επίσης σημαντικό μέρος των μαθηματικών πρακτικών, στις οποίες αναμένεται να εντρυφήσουν οι μαθητές στα νέα ΠΣ (ΙΕΠ, 2021). Έτσι ένα μαθηματικό έργο πρέπει να ωθεί στη μαθηματική δραστηριότητα και να συνδέεται άμεσα με συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ). Τα μαθησιακά αποτελέσματα ενός ΠΣ είναι οι γνώσεις, οι ικανότητες και οι δεξιότητες που πρέπει οι διδασκόμενοι να γνωρίζουν, να κατανοούν, να εφαρμόζουν, να αναλύουν και να προσαρμόζουν σε ένα νέο πλαίσιο, ενώ είναι, παράλληλα, ικανοί να τις αξιολογήσουν. Οι δεξιότητες αφορούν την εφαρμογή των γνώσεων, ενώ οι ικανότητες συνδέονται με την αποδεδειγμένη εφαρμογή των γνώσεων και των δεξιοτήτων. Κύρια χαρακτηριστικά των ΠΜΑ είναι να μπορούν να μετρηθούν, να έχουν ξεκάθαρη και σύντομη διατύπωση, να είναι κατανοητά και επαληθεύσιμα, να εντάσσονται σε ένα συγκεκριμένο χρονοδιάγραμμα, να μπορούν να αξιολογηθούν και βέβαια να έχουν δοκιμαστεί πριν την οριστικοποίησή τους.

Εξάλλου, στο απολυτήριο Γενικού Λυκείου, όπως αυτό σκιαγραφείται από τον ΕΟΠΠΕΠ, στο εθνικό πλαίσιο προσόντων επιπέδου 4, στα γενικά μαθησιακά αποτελέσματα, εντάσσονται, ως κύρια, η διεπιστημονικότητα, ώστε οι απόφοιτοι να συνδέουν βασικές γνώσεις των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων, η ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων θεωρητικών ή και της καθημερινής ζωής και η συνεργασία στο πλαίσιο μίας ομάδας. Βέβαια, αναντικατάστατο ρόλο στην παραπάνω διαδικασία εφαρμογής των νέων ΠΣ, θα έχει η συμβολή των διδασκόντων και η κατάλληλη προετοιμασία τους.

Από τις επίσημες έρευνες για την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά, η Ελλάδα συμμετέχει στη διεθνή έρευνα PISA (Programme for International Student Assesment) από το 2000. Μεταξύ άλλων, στόχος της έρευνας είναι η αποτίμηση του πόσο καλά είναι προετοιμασμένοι οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν ζητήματα της καθημερινής τους ζωής και να συμμετέχουν με πληρότητα και ισοτιμία στην πολιτική, πολιτιστική και κοινωνική ζωή του τόπου τους (ΙΕΠ, 2013). Ειδικότερα, ως προς την αποτίμηση του μαθηματικού εγγραμματισμού αξίζει να επισημανθούν τα εξής. Καταρχάς, σύμφωνα με το ΙΕΠ: «Ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά για την έρευνα PISA ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να κατανοεί και να εντάσσει την επιστήμη των Μαθηματικών στην καθημερινότητα, να αναπτύσσει τεκμηριωμένες κρίσεις πάνω σε προβλήματα που τίθενται εμπρός του και να χρησιμοποιεί τη μαθηματική γνώση και όσες δεξιότητες σχετίζονται με αυτή, ώστε να αντιμετωπίζει με επιτυχία τις ανάγκες της καθημερινής ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός και ενεργός πολίτης». Οπότε, οι μαθηματικές διαδικασίες στην σχολική τάξη δεν πρέπει να περιορίζονται στη γνώση μαθηματικών εννοιών ή διαδικασιών, αλλά κυρίως στη δημιουργική σύνθεση και εφαρμογή τους σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Δηλαδή, εφαρμογής σε προβλήματα, τα οποία βεβαίως θα συνδέονται με κατάλληλο μαθηματικό περιεχόμενο και έννοιες, αλλά θα μπορούν να αντιμετωπίζονται σε διαφορετικά πλαίσια, με κατάλληλη μετάφραση στην αντίστοιχη μαθηματική γλώσσα, επίλυση και αξιολόγηση της λύσης. Στην τελευταία έρευνα PISA – για την οποία έχουν ανακοινωθεί αποτελέσματα από το ΙΕΠ, η οποία εστίαζε στα Μαθηματικά το 2012 (η επόμενη που εστιάζει στα Μαθηματικά θα είναι η PISA 2021, η οποία διεξήχθει την άνοιξη του 2022), η Ελλάδα με μέση βαθμολογία 453 μονάδες βρίσκεται, με σημαντική στατιστικά διαφορά, κάτω από τη μέση επίδοση των χωρών του ΟΟΣΑ, σε παρόμοια θέση με τις Σερβία, Τουρκία και Ρουμανία. Παρότι βελτιώθηκε σημαντικά η εικόνα στα Μαθηματικά από την αντίστοιχη έρευνα του 2003, όταν η βαθμολογία ήταν 445 μονάδες, φαίνεται να εξακολουθούν να υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις μεταξύ ομάδων μαθητών (πχ αγόρια – κορίτσια, μαθητές με επιθυμία να λύσουν προβλήματα σε σχέση με εκείνους που δήλωσαν ότι έχουν άγχος για τη διαχείριση πολλών πληροφοριών στα Μαθηματικά, κ.ά.). Από τότε τα αποτελέσματα στις αντίστοιχες έρευνες των ετών 2015, 2018, οι οποίες8 δεν εστίαζαν στα Μαθηματικά, ήταν παρόμοια.

Συνεπώς, διαφαίνεται από τα παραπάνω ότι είναι καίριας σημασίας να πειστούν οι διδάσκοντες για την αναγκαιότητα εισαγωγής εφαρμογών των Μαθηματικών του σχολείου στην καθημερινότητα των μαθητών και φυσικά μέθοδοι με τις οποίες τις δημιουργούν και τις εντάσσουν στο πρόγραμμα διδασκαλίας τους. Για αυτό απαιτείται ενθάρρυνση και φυσικά επιμόρφωση.

Παραδείγματα έργων

Ένα σημαντικό ζήτημα με τα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και γενικότερα του σχολείου είναι ο διατιθέμενος χρόνος και το εύρος τους στο οποίο θα ενταχθούν στα προγράμματα σπουδών. Δυστυχώς, ο διατιθέμενος χρόνος διδασκαλίας για τα Μαθηματικά διαρκώς ελαττώνεται στο Ελληνικό σχολείο. Όσον αφορά το εύρος τους, φαίνεται μέσω της διαρκούς αποδόμησης των παλαιότερων ΠΣ, με αφαίρεση ύλης και κυρίως εφαρμογών, η κατεύθυνση διδασκαλίας προκύπτει να είναι αντίθετη της προσδοκώμενης, με βάση όσα αναφέρουν οι έρευνες. Όμως, για να μπορούν να ενταχθούν, όπως φαίνεται στο νέο ΠΣ, προβλήματα της καθημερινότητας των μαθητών, απαιτείται ικανό εύρος στην ύλη των Μαθηματικών, προσεκτικά επιλεγμένο και κυρίως διαφορετική προσέγγιση. Σε αυτήν την προσέγγιση βασικό στοιχείο αποτελεί η εισαγωγή των εννοιών, η οποία – ώστε να εξοικονομηθεί διδακτικός χρόνος - πρέπει να γίνεται με ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, το οποίο θα κινητοποιεί αφενός το μαθητή, αφετέρου θα αφήνει περιθώρια διαμόρφωσης και ένταξης στο διδάσκοντα, ανάλογα με την τάξη στην οποία θέλει να το εντάξει. Έτσι, η διαδικασία της μάθησης αναμένεται να είναι περισσότερο ενδιαφέρουσα, οι μαθητές να εμπλακούν περισσότερο και η συνολική, μακροπρόθεσμη, εικόνα τους για τα Μαθηματικά του σχολείου να βελτιωθεί.

Οι έρευνες έως τώρα

Η μεγάλη ερώτηση των μαθητών στις περισσότερες περιπτώσεις είναι: « Γιατί το κάνουμε αυτό τώρα ; Σε τι θα μας χρησιμεύσει; » Αν και οι απαντήσεις των διδασκόντων σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορούν να είναι ικανοποιητικές, ούτε στο μέλλον, αλλά και τώρα σχεδόν ποτέ με την, κατά πλειοψηφία, υπάρχουσα οργάνωση του ΠΣ και της διδασκαλίας στην τάξη. Θεωρείται δεδομένο ότι η αίσθηση που εγκαθιδρύεται στους μαθητές έχει ιδιαίτερο αντίκτυπο στην μακροπρόθεσμη εικόνα τους για τα Μαθηματικά του σχολείου. Σύμφωνα με διεθνείς εμπειρικές έρευνες σχετικά με το πώς βλέπουν οι ενήλικοι τα Μαθηματικά, τα αποτελέσματα, στην πλειοψηφία, είναι αρνητικά (Maas et al., 2018). Δηλαδή, παρότι οι περισσότεροι συνάδελφοι διδάσκοντες Μαθηματικοί καταβάλουν ιδιαίτερες προσπάθειες, τόσο για την προετοιμασία των μαθημάτων τους, όσο και για την άρτια επιστημονικής τους γνώση, φαίνεται οι προσπάθειές τους αυτές να μην έχουν τα αντίστοιχα σε ποιότητα αποτελέσματα. Είναι αναγκαίο λοιπόν να υπάρξουν αλλαγές στην τάξη των Μαθηματικών, μία από τις οποίες αφορά στην κινητοποίηση των μαθητών με κατάλληλα προβλήματα της καθημερινής πράξης και εμπλοκή των μαθητών με Μαθηματικές εφαρμογές σε όσο το δυνατόν περισσότερους επιστημονικούς κλάδους είναι αυτό εφικτό.

Η προστιθέμενη αξία

Η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, ακόμα και με την αποτελεσματικότερη συλλογή ασκήσεων, αποσκοπεί, σχεδόν πάντα, αποκλειστικά στην «κατανόηση με την εφαρμογή», αυτού που μόλις διδάχθηκαν οι μαθητές. Αναμένεται δηλαδή συχνά οι μαθητές, δια της μίμησης, να μπορούν να επαναλάβουν διαδικασίες, οι οποίες οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα, όταν τα δεδομένα τους δίνονται έτοιμα. Όπως αναφέρθηκε και προκύπτει από τα αποτελέσματα των διεθνών ερευνών, αυτή η γνώση, αφενός δεν ενσωματώνεται στους διδασκομένους, οπότε όταν μείνει ανενεργή ξεχνιέται, αφετέρου η μεθοδολογία που συχνά χρησιμοποιείται δεν δημιουργεί μία καλή εικόνα για τα Μαθηματικά, οπότε απουσιάζει και το κίνητρο για τον διδασκόμενο σε κάποιες περιπτώσεις.

Η χρήση προβλημάτων μοντελοποίησης στη διδασκαλία μπορεί επιπλέον, να προσθέσει: α) εισαγωγή στην έννοια με τρόπο που να έχει νόημα για τον μαθητή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μέσω της ανακάλυψης και διασύνδεσής της στο πλαίσιο του προβλήματος, β) επιπρόσθετη ευχαρίστηση σε διδάσκοντες και μαθητές, αφού αντιμετωπίζουν ένα πραγματικό πρόβλημα και επιτυγχάνουν να συνδέσουν τις γνώσεις τους με αυτό, γ) οι μαθητές μοντελοποιούν με δική τους προσπάθεια και χτίζουν τη γνώση, συνεργαζόμενοι με τους συμμαθητές τους, εφόσον εργαστούν σε ομάδες, δ) οπότε σε αυτήν την περίπτωση αναπτύσσουν και δεξιότητες συνεργασιών, ε) οι μαθητές εργάζονται σε πλαίσιο, στο οποίο καλούνται και μαθαίνουν να λαμβάνουν αιτιολογημένες – λογικές αποφάσεις, στ) οι μαθητές μαθαίνουν να διαβάζουν κείμενο και να εξάγουν πληροφορίες από αυτό (πρόκειται για μία διαδικασία, την οποία επιτυγχάνουν μόνο οι καλύτεροι των μαθητών στην έρευνα PISA), ζ) οι μαθητές εξασκούνται σε προβλήματα που μπορεί να είναι κοντά στην καθημερινότητά τους και θα τα συναντήσουν μελλοντικά, η) οι μαθητές μαθαίνουν να προσαρμόζουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικά πλαίσια, θ) επίσης μαθαίνουν να συζητούν διαφορετικές οπτικές αντιμετώπισης και επίλυσης ενός προβλήματος, άρα η λύση δεν είναι πάντα μοναδική και τέλος ι) μαθαίνουν να συγκρίνουν και να αποδέχονται τις καλύτερες λύσεις, εφόσον υπάρχουν και σε κάθε περίπτωση, να τις αξιολογούν. Είναι ενδιαφέρον ότι όλα τα παραπάνω στοιχεία δεν δρουν απλά αθροιστικά στη μάθηση, αλλά πολλαπλασιαστικά και με διαφορετικούς τρόπους και συνδυασμούς. Στη συνέχεια εξετάζονται κάποια έργα, τα οποία μπορούν να προκύψουν – προσαρμοστούν με διαφορετικές αφετηρίες.

Τριγωνομετρία Β΄ λυκείου

Μία λογική αφετηρία για τη δημιουργία ενός ενδιαφέροντος προβλήματος, με όποιους περιορισμούς μπορεί να έχει αυτό, είναι να χρησιμοποιηθούν έτοιμες ασκήσεις – προβλήματα του σχολικού βιβλίου ή οποιωνδήποτε διατιθέμενων σημειώσεων. Παρακάτω, βλέπουμε ένα πρόβλημα, το οποίο αφορά τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο μάθημα της Άλγεβρας στη δευτέρα λυκείου, όπως ακριβώς διατυπώνεται στο σχολικό βιβλίο (Ανδρεαδάκης κ.ά., 1991).

Η παλίρροια σε μία θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση

$$y=3\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 12$.

Αυτό το πρόβλημα συζητήθηκε στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών για την πιλοτική εφαρμογή των νέων ΠΣ στα Πρότυπα και στα Πειραματικά Σχολεία, τον Δεκέμβριο του 2021 στο τμήμα του Γ.Καραβασίλη. Πρόκειται για ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, του οποίου η διατύπωση στο σχολικό βιβλίο (1991), με δεδομένο τον τύπο της συνάρτησης απαιτεί μία ερμηνεία στο πρώτο ερώτημα για τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και μία εφαρμογή των γνώσεων για την κατασκευή της γραφικής παράστασης μίας τριγωνομετρικής συνάρτησης. Μία διαφορετική εκδοχή του προβλήματος συμπληρώνεται στην εφαρμογή του εμπλουτισμένου βιβλίου (2018) http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5165 στην οποία προηγείται μία προσομοίωση σε περιβάλλον geogebra από την οποία προκύπτει η γραφική παράσταση μίας τριγωνομετρικής συνάρτησης και στη συνέχεια ζητείται να προσαρμοστεί η γραφική παράσταση που δίνεται μίας συνάρτησης, σε αυτήν της προσομοίωσης.

Η παραπάνω δοσμένη συνάρτηση έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$ και αυτός είναι ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουν και οι μαθητές για να προσδιορίσουν την περίοδο της δοσμένης συνάρτησης στην αρχική άσκηση, άρα T = 12, ενώ η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή προκύπτουν από το κ=3 και είναι 3 και -3 αντίστοιχα. Ουσιαστικά, οι μαθητές μαθαίνουν να εφαρμόζουν τους τύπους, τους οποίους ήδη γνωρίζουν.

Το πρόβλημα αυτό της παλίρροιας μπορεί να γίνει ένα ενδιαφέρον μαθηματικό έργο, στο πλαίσιο των σκέψεων που αναπτύχθηκαν παραπάνω, αν διατυπωθεί κατάλληλα, χωρίς να δίνεται ο τύπος της συνάρτησης. Μία διατύπωση παρόμοια με την επόμενη, μάλλον θα ήταν κατάλληλη:

« Έχει παρατηρηθεί ότι η παλίρροια σε μία θαλάσσια περιοχή έχει μέγιστο ύψος στάθμης τα 3 μέτρα και ελάχιστο ύψος στάθμης τα -3 μέτρα, σε σχέση με το επίπεδο ενός σημείου μέτρησης και επαναλαμβάνεται κάθε 12 ώρες. Να προσδιορίσετε τον τύπο μίας από τις γνωστές σας συναρτήσεις, ο οποίος να περιγράφει το φαινόμενο ».

Καταρχάς, το πρόβλημα αποτελεί μία προσέγγιση γνωστής κατάστασης για τους μαθητές, αφού λογικά κάποιοι θα έχουν ακούσει για τον πορθμό του Ευρίπου στη Χαλκίδα ή αλλού. Σε κάθε περίπτωση μπορεί να γίνει αφορμή για συζήτηση μετά από μία εκδρομή στη Χαλκίδα ή μία σχετική ταινία που μπορεί να προβληθεί στην τάξη. Οι μαθητές μπορούν να χωριστούν σε μικρές ομάδες και να συζητήσουν καταρχάς το πρόβλημα. Κύριο στοιχείο που μπορεί να προκύψει σε αυτό είναι η περιοδικότητα και το ποιες συναρτήσεις γνωρίζουν που να έχουν την ιδιότητα να είναι περιοδικές. Επιπλέον, αναμένεται να συζητηθεί και να αναγνωριστεί ποιες θα είναι οι σχετιζόμενες μεταβλητές και συγκεκριμένα ποια η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή, προκειμένου να επιλεχθούν το ύψος της στάθμης του νερού σε μέτρα και ο χρόνος μάλλον σε ώρες. Σημαντικό και ιδιαιτέρως ενδιαφέρον συζήτησης μπορεί να είναι και το είδος της περιοδικής συνάρτησης, αφού προφανώς και ένα περιοδικό φαινόμενο δεν προσεγγίζεται απαραίτητα με μία τριγωνομετρική συνάρτηση. Οι μαθητές στη δευτέρα λυκείου δε γνωρίζουν για συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις, οπότε δεν είναι σε θέση να αποκλείσουν κάποιες συναρτήσεις ως ασυνεχείς ή μη παραγωγίσιμες, αλλά αυτό αναμένεται να γίνει είτε αν χρησιμοποιήσουν μετά την αρχική συζήτηση μία προσομοίωση του φαινομένου που θα τους δοθεί, όπως αυτή του εμπλουτισμένου βιβλίου, είτε δια του αποκλεισμού άλλων αιτιών και επιλογής της τριγωνομετρικής συνάρτησης ως αμεσότερα γνωστής σε αυτούς, με την έννοια ότι έχουν ήδη εργαστεί με αυτήν και νιώθουν οικεία με τις ιδιότητές της. Επιπλέον, ανάλογα με την επιλογή του έργου ως εισαγωγικού ή όχι για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι δυνατόν να δίνεται ολόκληρη η δραστηριότητα του εμπλουτισμένου βιβλίου που αναφέρθηκε και μέσω αυτής να τεκμαίρεται η αναγκαιότητα εισαγωγής της τριγωνομετρικής συνάρτησης του ημιτόνου και των ιδιοτήτων της. Μάλιστα το ρολόι που υπάρχει στη δραστηριότητα μπορεί να βοηθήσει στη μετάβαση από τον τριγωνομετρικό κύκλο στην αντίστοιχη συνάρτηση που παριστάνει το ύψος. Το μαθηματικό έργο μπορεί να προσαρμοστεί ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης, όπως κρίνει κάθε φορά ο διδάσκων. Επιπλέον, σε μία παραλλαγή του προβλήματος που θα προσάρμοζε καλύτερα τα νούμερα, αλλά θα το καθιστούσε δυσκολότερο, γιατί θα απαιτούσε και κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης θα ήταν η στάθμη του νερού να αποτελεί το βάθος της θάλασσας και να λαμβάνει τιμές από 1 έως 7 μέτρα για παράδειγμα.

Το επόμενο πρόβλημα αποτελεί ένα απλό παράδειγμα πράξεων στο Δημοτικό Σχολείο. Ας δούμε πώς μπορεί να εμπλουτιστεί, όχι απαραίτητα με περισσότερο μαθηματικό βάθος ή εύρος, αλλά με ευκαιρίες για κοινωνικές προσαρμογές, συζητήσεις και αποφάσεις.

Πράξεις στο Δημοτικό

Μία συνηθισμένη διατύπωση ενός προβλήματος στο δημοτικό, για εξάσκηση στην αφαίρεση δεκαδικών αριθμών, θα ήταν η παρακάτω:

« Ο Δημήτρης έλαβε από το νονό του για Χριστουγεννιάτικο δώρο 20€. Στο βιβλιοπωλείο είχε δει ότι το πιο επιθυμητό του βιβλίο κόστιζε 17,4€. Πόσα χρήματα θα του περισσέψουν, αν το αγοράσει;»

Σε αυτό το πρόβλημα οι μαθητές πρέπει απλά να επιλέξουν μία από τις πράξεις που γνωρίζουν να κάνουν, δηλαδή την αφαίρεση. Δοθέντος μάλιστα ότι το πρόβλημα αυτό είναι πιθανό να δοθεί, αμέσως μετά την εκμάθηση των αφαιρέσεων δεκαδικών αριθμών, δηλαδή μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, στο οποίο εργάζονται οι μαθητές τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο στο σχολείο, είναι πολύ πιθανό να επιλέξει να κάνει αφαίρεση, ακόμα κι αν δε γνωρίζει το λόγο. Επομένως, ουσιαστικά ο μαθητής απλά εξασκείται σε μία διαδικασία, όπως αν του δινόταν να γίνει η συγκεκριμένη αφαίρεση.

Το ίδιο πρόβλημα θα μπορούσε να γίνει λίγο περισσότερο ενδιαφέρον μαθησιακά, αν το κόστος του βιβλίου ήταν μεγαλύτερο από δώρο που έλαβε. Σε αυτήν την περίπτωση, αν για παράδειγμα το κόστος του βιβλίου στη διατύπωση του προβλήματος ήταν 22€ και η ερώτηση παρέμενε η ίδια, τότε, σχεδόν σίγουρα, πολλοί από τους μαθητές θα απαντούσαν ότι θα περίσσευαν 2€, όπου διαφαίνεται η ισχυρή θέση που έχει το πλαίσιο στο οποίο τίθεται το ερώτημα. Μάλλον, ελάχιστοι μαθητές θα απαντούσαν ότι δεν αρκούν τα χρήματα του δώρου για την αγορά και ακόμα λιγότεροι θα σκέφτονταν να προτείνουν να χρησιμοποιήσει κάποια ακόμα χρήματα από τις οικονομίες του για την αγορά του βιβλίου. Η διατύπωση της ερώτησης «εξαναγκάζει», κατά κάποιον τρόπο, το μαθητή να μη σκεφτεί!

Η προσαρμογή του ζητουμένου σε καταλληλότερη μορφή ή ακόμα και η μη ύπαρξή του μπορεί να ωθήσει ενδιαφέρουσες συζητήσεις στην τάξη, με πολύ περισσότερα οφέλη για όλους τους μαθητές. Για παράδειγμα, η διατύπωση θα μπορούσε να είναι:

« Ο Δημήτρης έλαβε από το νονό του για Χριστουγεννιάτικο δώρο 20€. Στο βιβλιοπωλείο είχε δει ότι το πιο επιθυμητό του βιβλίο κόστιζε 17,4€. Συζητήστε, τι θα μπορούσε να κάνει ο Δημήτρης για να διαβάσει το αγαπημένο του βιβλίο.»

Σε αυτήν την περίπτωση το πλαίσιο κατευθείαν γίνεται περισσότερο ανοικτό. Μέσα από την ομαδική συζήτηση με τους συμμαθητές του είναι πιθανό να προταθεί στις ιδέες να δανειστεί το βιβλίο από κάποια βιβλιοθήκη. Ο μαθητής δεν προτρέπεται να γίνει απλά καταναλωτής, αλλά να ανακαλύψει τις ανάγκες του που είναι να διαβάσει το συγκεκριμένο βιβλίο και να βρει ενδιαφέροντες τρόπους για να τις ικανοποιήσει, συνεισφέροντας ταυτόχρονα στην κοινωνία, μαθαίνοντας για υπάρχουσες δομές, τις οποίες εφόσον τις χρησιμοποιήσει θα μάθει και να τις σέβεται, θα τις συστήσει σε φίλους και γνωστούς, θα μάθει για περισσότερα επαγγέλματα, όπως του βιβλιοθηκάριου, ενδεχομένως θα συναναστραφεί και με άτομα έξω από το σχολείο του, αν η βιβλιοθήκη δεν ανήκει σε αυτό και στην περίπτωση του μαθητή δημοτικού, ίσως περάσει και λίγο χρόνο με κάποιον από τους γονείς του σε μία βιβλιοθήκη, όπου θα διερευνήσει και την ύπαρξη ακόμα περισσότερων βιβλίων και ενδιαφερόντων.

Σε επόμενη φάση, σε κάποια προβλήματα, όπως και το συγκεκριμένο, μπορεί να μην δίνεται ούτε αυτή η ερώτηση. Δηλαδή να δίνονται μόνο τα δεδομένα:

« Ο Δημήτρης έλαβε από το νονό του για Χριστουγεννιάτικο δώρο 20€. Στο βιβλιοπωλείο είχε δει ότι το πιο επιθυμητό του βιβλίο κόστιζε 17,4€.»

Στη συνέχεια ο διδάσκων να προτρέψει τους μαθητές να συζητήσουν για αυτές τις δύο προτάσεις. Σε αυτήν την περίπτωση αναμένεται οι μαθητές, μέσα από τη συζήτηση, να μάθουν να διερευνούν μόνοι τους τις ανάγκες τους και να πράξουν αναλόγως. Δηλαδή, κάποιοι να προτείνουν ότι πιθανώς να θέλει να διαβάσει το βιβλίο ο Δημήτρης και να ακολουθήσει η συζήτηση για το πώς μπορεί να το κάνει αυτό. Κάποιοι μπορεί επίσης να προτείνουν ότι μπορεί να το αναζητήσει ως μεταχειρισμένο βιβλίο ή να το αναζητήσει σε άλλο βιβλιοπωλείο με μικρότερη τιμή, αν δεν του αρκούν τα χρήματα σε σχέση με την αρχική τιμή αγοράς στο βιβλιοπωλείο που το είχε δει. Δηλαδή, οι μαθητές μαθαίνουν να γίνονται και ευσυνείδητοι καταναλωτές.

Επομένως, είναι πιθανό το ίδιο πρόβλημα με ελάχιστα διαφορετική διατύπωση και ανάλογα με το χειρισμό από το διδάσκοντα στην τάξη, να ωθήσει σε εντελώς διαφορετικά μονοπάτια. Ένα έργο πρέπει να έχει κάποια κύρια χαρακτηριστικά που θα οδηγήσουν στα ΠΜΑ, μέσα στους στόχους της ενότητας. Η διαχείρισή του και η προσαρμογή του στα χαρακτηριστικά του τμήματος, στο οποίο θα χρησιμοποιηθεί, μία συγκεκριμένη μαθησιακά στιγμή, θα γίνει σε κάθε περίπτωση από τον διδάσκοντα. Πάντως, μία γενική οπτική θα μπορούσε να καθορίζει ότι τα έργα μοντελοποίησης, είναι καλό να ξεκινούν όσο γίνεται πιο ανοικτά σε ερωτήματα, με τη λιγότερη δυνατή καθοδήγηση, η οποία μπορεί να αυξάνεται τμηματικά, ανάλογα με τις ανάγκες του τμήματος και τα ΠΜΑ.

Δημιουργώντας νέα έργα

Πηγή έμπνευσης για διάφορα έργα μπορούν να είναι καθημερινές δραστηριότητες και αντικείμενα, τα οποία χρησιμοποιούνται για διάφορες εργασίες. Σε κάθε περίπτωση μπορεί η προσοχή μας να επικεντρωθεί σε όποιο μέρος του αντικειμένου ή της χρήσης του μπορεί να μοντελοποιηθεί εύκολα και να ταιριάξει με τα ΠΜΑ του ΠΣ. Στο επόμενο παράδειγμα για κάθε μηχανή εσωτερικής καύσης μπορούμε να ασχοληθούμε με την κίνηση του εμβόλου μίας μηχανής στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Στην επόμενη εικόνα 1 (Autodoc Club, 2021) φαίνονται οι θέσεις ενός εμβόλου μηχανής εσωτερικής καύσης: α) εισαγωγή, κατά την οποία το καύσιμο μείγμα εισέρχεται στον κύλινδρο προς καύση, β) συμπίεση, κατά την οποία το έμβολο κινείται προς τα πάνω, ώστε να συμπιέσει το μείγμα προς καύση, φτάνοντας στο άνω νεκρό σημείο, όπου σταματά στιγμιαία, γ) ανάφλεξη, όπου το μείγμα καίγεται και πιέζει το έμβολο προς τα κάτω, παράγοντας έργο, μέχρι να φτάσει στο κάτω νεκρό σημείο και δ) εξαγωγή, όταν το έμβολο αρχίζει και κινείται προς τα πάνω για να ωθήσει τα καυσαέρια από την καύση εκτός του κυλίνδρου προς την εξάτμιση. Περισσότερα στοιχεία και ταινίες που εξηγούν τις λειτουργίες, μπορούν να βρεθούν στην (Ελληνική wikipedia, 2020) και για μία καλοφτιαγμένη ταινία μικρού μήκους, στην οποία εξηγείται η λειτουργία μίας μηχανής αυτοκινήτου με βήματα και εξαιρετικό τρόπο στο (Animagraffs, 2020).

Εικόνα 1: Οι θέσεις ενός εμβόλου μηχανής στον κύκλο ενός τετράχρονου κινητήρα

Σε τέτοιου είδους προβλήματα χρειάζεται να υπάρχει μία επαρκής γνώση του πλαισίου του προβλήματος, ώστε να μπορέσει ο διδάσκων να δημιουργήσει το κατάλληλο περιβάλλον. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία πιθανή εκδοχή του προβλήματος που θα χρησιμοποιηθεί.

Πρόβλημα

Σε μία μηχανή εσωτερικής καύσης ενός αυτοκινήτου το έμβολο κινείται μέσα στον κύλινδρο, δημιουργώντας τέσσερεις κύριες φάσεις: της εισαγωγής, κατά την οποία ανοίγει η βαλβίδα και εισέρχεται το μείγμα καυσίμου-αέρα προς καύση(1η αριστερά στην εικόνα 1), τη συμπίεση κατά την οποία το έμβολο κινείται προς τα πάνω και ανεβάζει την πίεση του μείγματος (2η αριστερά), την εκτόνωση κατά την οποία το μείγμα αναφλέγεται και το έμβολο φτάνει στο μέγιστο της διαδρομής του – άνω νεκρό σημείο – (3η από αριστερά) και την εξαγωγή (4η από αριστερά), κατά την οποία το έμβολο φτάνει στην ελάχιστη θέση της διαδρομής του (κάτω νεκρό σημείο) και ανοίγει η βαλβίδα εξαγωγής για να εξέλθουν τα καυσαέρια.

Μία πλήρης κίνηση του εμβόλου γίνεται σε περίπου 1/1000 του λεπτού και η πλήρης διαδρομή του εμβόλου είναι 10 εκατοστά.

α) Συζητήστε στην ομάδα σας ποια θεωρείτε ότι είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της κίνησης του εμβόλου.

β) Να επιλέξετε μία γνωστή συνάρτηση η οποία να μετρά την απομάκρυνση του εμβόλου από το κάτω νεκρό σημείο (σημείο εξαγωγής). Τι χαρακτηριστικά πρέπει να έχει;

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

δ) Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το έμβολο βρίσκεται: α) στη μέση της διαδρομής, β) στο άνω νεκρό σημείο (θέση συμπίεσης).

ε) Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το έμβολο βρίσκεται κάτω από τη μέση της διαδρομής.

στ) Αν ο οδηγός θελήσει να επιταχύνει και ανοίξει την τροφοδοσία του κινητήρα στις 2000 στροφές ανά λεπτό, να προσδιορίσετε τα χαρακτηριστικά της κίνησης του εμβόλου, συγκρίνοντας με την αρχική κατάσταση. Αλλάζει η συνάρτηση που επιλέξατε στο α) ερώτημα;

Οι μαθητές χωρίζονται σε μικρές ομάδες (3-4 ατόμων), τους δίνεται η αρχική εκφώνηση του προβλήματος και, πριν τα ερωτήματα, συζητούνται διάφορα τεχνικά χαρακτηριστικά ή δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα ακόμα και να δουν κάποια από τις προτεινόμενες ταινίες, ώστε να κατανοήσουν τα τεχνικά στοιχεία του προβλήματος. Στη συνέχεια δίνεται το ερώτημα α) και παρέχεται ικανός χρόνος στις ομάδες για να το συζητήσουν. Η απομάκρυνση του εμβόλου ως συνάρτηση του χρόνου, καθώς και η περιοδικότητα της κίνησης, είναι το ζητούμενο εδώ και οι μαθητές αναμένεται να καταλήξουν μετά και από τη συζήτηση στην ολομέλεια στο κύριο αυτό χαρακτηριστικό. Στα επόμενα ερωτήματα αναμένεται οι ομάδες να καταλήξουν σε κάποια συνάρτηση που να περιγράφει το περιοδικό αυτό φαινόμενο, όχι κατ' ανάγκη όλες στην ίδια, αφού μπορεί να θεωρήσουν διαφορετικά σημεία ως αρχή της κίνησης. Σε κάθε περίπτωση θα σχηματίσουν τη γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης που επέλεξαν για να περιγράψουν το φαινόμενο (ΠΜΑ Αλ.Σρ.11.4 και 11.5 στο νέο ΠΣ) στο ερώτημα γ) και μέσω αυτής θα οδηγηθούν σε μία πρώτη επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης (ερώτημα δ), μέσω της γραφικής παράστασης αρχικά και στη συνέχεια στη σύνδεση με τον τριγωνομετρικό κύκλο (ΠΜΑ Αλ.Σρ.11.6 στο νέο ΠΣ), ενώ στο ερώτημα ε) θα λύσουν μία τριγωνομετρική ανίσωση (ΠΜΑ Αλ.Σρ.11.7 στο νέο ΠΣ). Το τελευταίο ερώτημα στ) αλλάζει μία αρχική ιδιότητα της συνάρτησης και στην ουσία δημιουργεί ένα νέο πρόβλημα. Προφανώς, το παραπάνω έργο, που εμπλέκεται με περισσότερα του ενός ΠΜΑ και αναμένεται να προκαλέσει μαθηματική δραστηριότητα σχετιζόμενη στενά με καθένα από αυτά, αφορά περισσότερες από μίας διδακτικές ώρες. Η χρήση του στην τάξη μπορεί να γίνει είτε για εισαγωγή στις έννοιες και κατάκτηση των δεξιοτήτων που απαιτούνται, είτε και ως επαναληπτική δραστηριότητα στο τέλος. Η αξία του προβλήματος αυτού πάντως θεωρούμε ότι μπορεί να έχει σημαντική προστιθέμενη αξία, όπως περιγράφηκε παραπάνω, στην εισαγωγή των εννοιών και στα ΠΜΑ.

Η ΤΘΔΔ και τα νέα ΠΣ

Η δημιουργία θεμάτων, όπως το προηγούμενο μπορεί να απαιτεί αρκετό χρόνο και προετοιμασία για την κατάλληλη προσαρμογή και ένταξη στην τάξη, χωρίς να παραβλέπονται φυσικά τα πλεονεκτήματα που έχει. Μία άλλη σημαντική πηγή σχετικών με μοντελοποίηση θεμάτων αποτελεί η τράπεζα θεμάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας (ΤΘΔΔ) του ΙΕΠ, η οποία χρησιμοποιείται εκ νέου από το σχολικό έτος 2021-22 για τις προαγωγικές εξετάσεις του λυκείου. Υπάρχουν αρκετά θέματα, όπως φαίνεται καλά μελετημένα, τα οποία μπορούν να αποτελούν αφορμή για κατάλληλα καλά προσαρμοσμένα μαθηματικά έργα.

Για παράδειγμα στην ΤΘΔΔ για την άλγεβρα της β΄ λυκείου το θέμα με αριθμό 14238 είναι το εξής:

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή sec δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h(t)=8+6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right),\quad 0\leq t\leq 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.
β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;
δ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t).

t	*0*	*15*	*30*	*45*	*60*	*75*	*90*
h(t)							

ii. να σχεδιάσετε σε σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ *με* $0\leq t\leq 90$.

Το θέμα αυτό θα μπορούσε να μετατραπεί σε ένα ενδιαφέρον μαθηματικό έργο, αν δίνονταν τα χαρακτηριστικά της κίνησης, χωρίς την εξίσωση της συνάρτησης, όπως στο πρόβλημα με το έμβολο που περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω και ζητούνταν να προσδιοριστεί το είδος της κίνησης, δηλαδή περιοδικότητα στην κίνηση των καθισμάτων και το ύψος τους από το έδαφος. Μία πιθανή διατύπωση θα μπορούσε να είναι η εξής:

«Βρίσκεστε στη ρόδα ενός λούνα παρκ, στην οποία εισήλθατε από το κατώτατο σημείο της που βρίσκεται σε ύψος 2m από το έδαφος και η οποία στη συνέχεια κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα(σταθερό ρυθμό). Μετά από τρεις πλήρεις γύρους της ρόδας, οι οποίοι διήρκησαν 180sec, διαπιστώσατε ότι το gps στο κινητό σας κατέγραψε συνολική διανυθείσα απόσταση σε ύψος ίση με 72m.»

Παρόμοια θέματα μοντελοποίησης στην ΤΘΔΔ, από τα οποία μπορούμε να δημιουργήσουμε κατάλληλα μαθηματικά έργα προσαρμοσμένα στα ΠΜΑ του ΠΣ υπάρχουν πολλά. Ενδεικτικά, μερικά θέματα μοντελοποίησης από την άλγεβρα της β΄ λυκείου είναι: 21470, 18434, 18437, 20657, 21447, 21448, 21474, 21678, 21679 για εκθετική συνάρτηση, 14241, 20715 για πολυωνυμική, 14975, 20712, 20870 για τριγωνομετρική, 15694, 18429, 20847 για λογαριθμική. Αντίστοιχα, πολλά παρόμοια θέματα υπάρχουν σε όλα τα μαθήματα μαθηματικών στην ΤΘΔΔ.

Ενδεικτικές πηγές υλικού και συζητήσεων μοντελοποίησης

Υλικό, προς αφόρμηση για τη δημιουργία παρόμοιων μαθηματικών έργων μπορεί να αναζητηθεί σε πολλές πηγές, εκτός από βιβλία, στο διαδίκτυο, μερικές από τις οποίες αναφέρονται στη συνέχεια.

- Διεθνής κοινότητα μαθηματικής μοντελοποίησης και εφαρμογών. International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) στη σελίδα http://www.ictma.net/
- International Congress of Mathematical Education (ICME) στη σελίδα https://www.mathunion.org/icmi/icme/icme-international-congress-mathematical-education
- Γερμανόφωνο δίκτυο διδασκόντων Μαθηματικά με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας τους (MUED), στη σελίδα https://www.mued.de/
- Ιστόχωρος ειδικός για τη μαθηματική μοντελοποίηση, τη διδασκαλία της και τις εφαρμογές της στη διεύθυνση https://mathmodels.org/
- Ο Ιστόχωρος PLUS+ Modelling με πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές των Μαθηματικών που ξεκίνησε από συνεργασία σε σχετικό έργο των πανεπιστημίων του Cambridge και Keel στη διεύθυνση https://plus.maths.org/content/teacher-package-mathematical-modelling

  Φυσικά, υπάρχουν πολλοί ακόμα ιστόχωροι διαθέσιμοι για την εύρεση υλικού κατάλληλου προς διαμόρφωση για τις τάξεις μας, ανάλογα με τις ανάγκες, όπως για παράδειγμα ερευνητικοί χώροι των πανεπιστημίων, στα αντίστοιχα τμήματα.

Συμπεράσματα/Προτάσεις

Στα νέα προγράμματα σπουδών για τα Μαθηματικά στο λύκειο η μοντελοποίηση κατέχει ένα σημαντικό μέρος τους, τόσο μεθοδολογικά, όσο και με τα σχετιζόμενα ΠΜΑ. Στο παράρτημα Ι, καταγράφονται όλες οι σχετικές αναφορές σε ΠΜΑ, οι οποίες υπάρχουν στο νέο ΠΣ. Η ένταξη στη διδασκαλία μαθηματικών έργων με θέματα μοντελοποίησης φαίνεται να έχει σημαντική προστιθέμενη αξία, καθώς προσφέρει σημαντικές ευκαιρίες για χρήση πολλών διαφορετικών μεθόδων διδασκαλίας, συμβατών προς την ιδέα της ένταξης του μαθητή στο επίκεντρο. Επιπλέον, δημιουργούνται, ενδιαφέροντα προς τους μαθητές έργα, τα οποία αυξάνουν τα εσωτερικά κίνητρα για μάθηση. Οι μαθητές εμπλέκονται καλύτερα στη δόμηση της μάθησής τους, βλέπουν διαφορετικές οπτικές των Μαθηματικών, επεκτείνουν τον «Μαθηματικό ορίζοντά» τους και την κατανόηση αυτού που κάνουν (Maas et al., 2018). Αυτό επιτυγχάνεται διότι τέτοια προβλήματα γεννούν τη μαθηματική κατανόηση, ολοκληρώνουν τις γνώσεις των μαθητών και τους βοηθούν να αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων (Blum et al., 2007).

Από την οπτική του διδάσκοντα, προσφέρονται κίνητρα για την επαγγελματική του ανάπτυξη, με την προσθήκη επιμορφώσεων και τη δημιουργία κατάλληλων κοινοτήτων μάθησης και συνεργασίας, αποτελούμενων από ομάδες συνεργαζόμενων μαθηματικών, είτε μέσα στο ίδιο σχολείο, είτε σε ευρύτερα δίκτυα σχολείων. Επιπλέον, οι διδάσκοντες έχουν την ευκαιρία να δουν τη διδασκαλία τους να γίνεται αποτελεσματικότερη και κυρίως πιο ευχάριστη και για τους ίδιους, μαζί με τους μαθητές τους. Ο απαιτούμενος χρόνος διδασκαλίας και ο αντίστοιχος κόπος μπορεί να αυξηθούν, αλλά σε κάθε περίπτωση υπάρχει πάντα η δυνατότητα ένα – δύο έργα κάθε τετράμηνο να είναι σε αυτήν τη μορφή, δηλαδή βασισμένα σε πραγματικά προβλήματα. Φυσικά, για να επιτευχθούν τα παραπάνω αποτελεσματικότερα, απαιτείται κατάλληλη διευθέτηση του ωραρίου των διδασκόντων και μείωση της γραφειοκρατίας του σχολείου, ώστε να έχουν επαρκή χρόνο να ασχοληθούν με την προετοιμασία ποιοτικότερης διδασκαλίας, να συνεργαστούν σε δίκτυα εκπαιδευτικών, να πετύχουν διαρκή επαγγελματική ανάπτυξη.

Αναφορές

Animagraffs. (2020). *How a Car Engine Works*. Youtube. (Ανάκτηση από https://www.youtube.com/watch?v=ZQvfHyfgBtA στις 30/10/2022).

Autodoc Club. (2021). *Έμβολα κινητήρα: Πώς λειτουργούν*. (Ανάκτηση από https://club.autodoc.gr/magazin/embola-kinhthra-pws-leitoyrgoyn-poia-problhmata-yparxoyn στις 30/10/2022). Η εικόνα 1 ανακτήθηκε από αυτήν τη σελίδα, αν και βρίσκεται στο διαδίκτυο σε πολλές διαφορετικές ιστοθέσεις.

Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H-W., Niss, M. (eds). (2007). *Modelling and applications in mathematics education – The 14th ICMI study* . New York: Springer.

Blum, W. & Ferri, R.,B., (2009). Mathematical Modelling: Can it Be Taught and Learnt?,. *Journal of Mathematical Modelling and Application* , Vol.1, No. 1.

Maas, J., O'Meara, N., Johnson, P., O'Donoghue, J. (2018). *Mathematical Modelling for Teachers*. Switzerland: Springer Nature.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics. In , *Handbook of research on mathematics teaching and learning(pp 334 - 370)*. New York: McMillan.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2019). Άλγεβρα Β΄ γενικού λυκείου. ΙΤΥΕ Διόφαντος. Επανέκδοση από την Α΄έκδοση 1991. (Ανακτήθηκε στις 30/10/2022 από http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2658/Algebra_B-Lykeiou_html-empl/).

Εθνικός Οργανισμός Πιστοποίησης Προσόντων και Επαγγελματικού Προσανατολισμού (2015). *Οδηγός σχεδιασμού και ανάπτυξης Μαθησιακών Αποτελεσμάτων, Εθνικό πλαίσιο προσόντων*. Αθήνα: ΕΟΠΠΕΠ.

Ελληνική wikipedia (2022). *Μηχανές εσωτερικής καύσης*. (Ανάκτηση από https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CE%B7%CF%87%CE%B1%CE%BD%CE%AE_%CE%B5%CF%83%CF%89%CF%84%CE%B5%CF%81%CE%B9%CE%BA%CE%AE%CF%82_%CE%BA%CE%B1%CF%8D%CF%83%CE%B7%CF%82 στις 30/10/2022).

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2013). *Αποτελέσματα έρευνα PISA 2012*. (Ανάκτηση από http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/pisa-main/pisa/pisa-2012 στις 30/10/2022). Αθήνα: ΙΕΠ.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2021). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ*. Πράξη: Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και δημιουργία εκπαιδευτικού υλικού πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης – MIS: 5035542, Αθήνα: ΙΕΠ.

Κομηνέας, Σ., Χαρμανδάρης, Ε. (2015). *Μαθηματική Μοντελοποίηση*. Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις (Ανακτήθηκε στις 30/10/2022 από https://repository.kallipos.gr/handle/11419/6325).

Παράρτημα Ι

Σε αυτό το παράρτημα καταγράφονται όλες οι αναφορές των νέων ΠΣ στη χρήση της μοντελοποίησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο λύκειο.

- Αλ.Σχ.10.6. Χρησιμοποιούν εξισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Αλ.Σχ.10.8. Αξιοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Στην Α΄λυκείου προτείνονται \textcolor{blue}{ ανοικτά } προβλήματα που μοντελοποιούνται με δευτεροβάθμια συνάρτηση και περιλαμβάνουν ερωτήματα που εστιάζουν στο μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης.
- Αλ.Σρ.10.7. Χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Μοντελοποίηση Πειραμάτων τύχης.
- Γ.Ε.10.24. Μοντελοποιούν και επιλύουν πραγματικά προβλήματα αξιοποιώντας τα κέντρα του τριγώνου.
- Αλ.Κ.11.6. Αλ.Κ.11.9. Προβλήματα που μοντελοποιούνται από αριθμητικές ή γεωμετρικές προόδους και εξαγωγή των τύπων για το ν-οστό όρο και τα αθροίσματα των ν πρώτων όρων.
- Αλ.Σρ.11.5. Μοντελοποιούν περιοδικά φαινόμενα με χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Αλ.Σρ.11.9. Επιλύουν προβλήματα, μοντελοποίησης, χρησιμοποιώντας πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις.
- Αλ.Σχ.11.3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια των πολυωνυμικών εξισώσεων.
- Αλ.Σχ.11.4. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια πολυωνυμικών ανισώσεων.
- Αλ.Σχ.11.8. Χρησιμοποιούν συστήματα για τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων. Ερμηνεύουν τις λύσεις τους στο πλαίσιο του προβλήματος και αιτιολογούν την άποψή τους.
- Αλ.Σρ.11.Ρ.8. Ορίζουν την Εκθετική Συνάρτηση μέσω μοντελοποίησης.
- Αλ.Σρ.11.Ρ.12. Αξιοποιούν την εκθετική συνάρτηση στην επίλυση προβλημάτων και στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων.
- Αλ.Σρ.11.Ρ.16. Αξιοποιούν την λογαριθμική συνάρτηση στην επίλυση προβλημάτων και στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων.
- Αλ.Σχ.11.Ρ.1. Έργα μέσα από τα οποία γίνεται μοντελοποίηση φαινομένων ή προβλημάτων μέσω γραμμικών συστημάτων και επίλυσή τους. μέσω πινάκων.
- Αν.Σ.11.Ρ.1. Διερευνούν μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης την αναγκαιότητα εισαγωγής των άπειρων διαδικασιών και της σύγκλισης ακολουθίας.
- Αρ.Ρ.12.2. Μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης ορίζουν τον αριθμό e.
- Αν.Σ.12.Ρ.1. Μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης αναπτύσσουν μία διαισθητική αντίληψη της έννοιας του πεπερασμένου και μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης.
- Αν.Δ.12.Ρ.1. Μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης θα διαμορφώσουν την έννοια της παραγώγου σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

- Αν.Δ.12.Ρ.9. Μέσω μοντελοπο/ιησης φαινομένων και πραγματικών ακταστάσεων αναγνωρίζουν την έννοια της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής.
- Αν.Δ.12.Ρ.10. Επιλύουν προβλήματα μοντελοποίησης με χρήση του ρυθμού μεταβολής.
- Αν.Ο.12.Ρ.6. Χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να λύνουν προβλήματα που προκύπτουν από μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων.