

# Επίσκεψη στη Βιβλιοθήκη της ΣΘΕ του ΕΚΠΑ

## Δραστηριότητες στην έκθεση στερεών

Σωτήρης Δ. Χασάπης

Πρότυπο Γενικό Λύκειο  
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών



15 Φεβρουαρίου 2023

# Περιεχόμενα I

## 1 Εισαγωγή

- Βασικές πληροφορίες
- Δραστηριότητα 1η

## 2 Τα Πλατωνικά Στερεά

- Παρατηρώντας τα Πλατωνικά στερεά
- 2η Δραστηριότητα
- Απεικονίσεις στο επίπεδο
- Αναπτύγματα-Δίκτυα στερεών
- 3η Δραστηριότητα
- 4η Δραστηριότητα
- Δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά

## 3 Το Τετράεδρο

- 5η Δραστηριότητα

## Περιεχόμενα II

4 Στοιβάζοντας στερεά...

5 Συμμετρίες και Ομάδες

6 Ευχαριστίες

# Ορισμοί

## Κανονικά Πολύεδρα

Ένα πολύεδρο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι έδρες του είναι ισοδύναμα κανονικά πολύγωνα και κάθε δύο κορυφές του είναι ταυτόσημες, δηλαδή υπάρχει περιστροφή του πολυέδρου, η οποία μεταφέρει μία κορυφή και όλες τις γειτονικές της έδρες στην άλλη κορυφή και τις αντίστοιχες έδρες.

## Πλατωνικά και Αρχιμήδεια Στερεά

**Πλατωνικά στερεά** λέγονται εκείνα που έχουν ως έδρες κανονικά πολύγωνα ίδιου τύπου.

**Αρχιμήδεια στερεά** λέγονται εκείνα που έχουν ως έδρες κανονικά πολύγωνα περισσοτέρων του ενός τύπων.

# 1η Δραστηριότητα

## Μορφή εδρών πλατωνικού πολυέδρου

Πόσες έδρες το πολύ πιστεύετε ότι μπορεί να έχει ένα κανονικό πεντάγωνο, ώστε να αποτελεί έδρα ενός πλατωνικού πολυέδρου;

## Κατασκευή πολυέδρων

Αφού χωριστείτε σε ομάδες, με τα δοθέντα κανονικά πολύγωνα κατασκευάστε το μεγαλύτερο σε πλήθος εδρών πλατωνικό πολυέδρο που μπορείτε.

Εισαγωγή  
Τα Πλατωνικά Στερεά  
Το Τετράεδρο  
Στοιβάζοντας στερεά...  
Συμμετρίες και Ομάδες  
Ευχαριστίες

Παρατηρώντας τα Πλατωνικά στερεά  
2η Δραστηριότητα  
Απεικονίσεις στο επίπεδο  
Αναπύγματα-Δίκτυα στερεών  
3η Δραστηριότητα  
4η Δραστηριότητα  
Δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά

# Τα πέντε Πλατωνικά Στερεά



## 2η Δραστηριότητα

Μετρώντας Έδρες, Ακμές και Κορυφές

Σε ομάδες συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

| Πολύεδρο | Κορυφές | Έδρες | Ακμές |  |
|----------|---------|-------|-------|--|
|          |         |       |       |  |
|          |         |       |       |  |
|          |         |       |       |  |
|          |         |       |       |  |

Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα;

## 2η Δραστηριότητα Σκέψεις I

### 1η παρατήρηση

Το πλήθος των κορυφών εναλλάσσεται με το πλήθος των εδρών σε δύο ζεύγη τετραέδρων!

| Πολύεδρο   | Κορυφές | Έδρες | Ακμές | Πολύγωνα  |
|------------|---------|-------|-------|-----------|
| Τετράεδρο  | 4       | 4     | 6     | Τρίγωνα   |
| Κύβος      | 8       | 6     | 12    | Τετράγωνα |
| Οκτάεδρο   | 6       | 8     | 12    | Τρίγωνα   |
| Δωδεκάεδρο | 20      | 12    | 30    | Πεντάγωνα |
| Εικοσάεδρο | 12      | 20    | 30    | Τρίγωνα   |

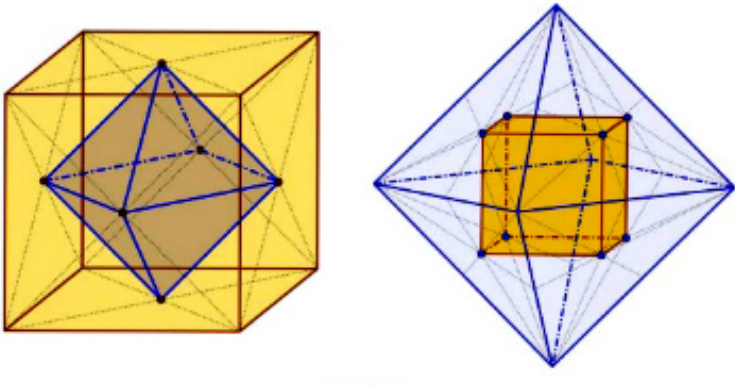


## 2η Δραστηριότητα Σκέψεις II

### Δυσκότητα

Τα ζεύγη κύβος-οκτάεδρο και δωδεκάεδρο-εικοσάεδρο καλούνται **δυσικά στερεά**. Τι συμβαίνει με το τετράεδρο;

## 2η Δραστηριότητα Σκέψεις III



Σχήμα: Δυϊκή αποτύπωση κύβου-οκταέδρου



## 2η Δραστηριότητα Χαρακτηριστική Euler

### 2η παρατήρηση

Παρατηρήσατε κάποια σχέση μεταξύ του πλήθους  $K, E, A$  των στερεών;

| Πολύεδρο   | Κορυφές | Έδρες | Ακμές |                  |
|------------|---------|-------|-------|------------------|
| Τετράεδρο  | 4       | 4     | 6     | $4+4 = 6 + 2$    |
| Κύβος      | 8       | 6     | 12    | $8+6 = 12 + 2$   |
| Οκτάεδρο   | 6       | 8     | 12    | $6+8 = 12 + 2$   |
| Δωδεκάεδρο | 20      | 12    | 30    | $20+12 = 30 + 2$ |
| Εικοσάεδρο | 12      | 20    | 30    | $12+20 = 30 + 2$ |

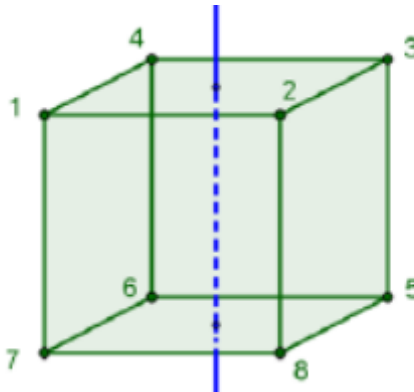
### Χαρακτηριστική Euler

Σε κάθε κυρτό πολύεδρο το πλήθος των Κορυφών μαζί με το πλήθος των Εδρών είναι ίσο με το πλήθος των Ακμών συν δύο. Δηλαδή ισχύει

$$E+K-A = 2$$

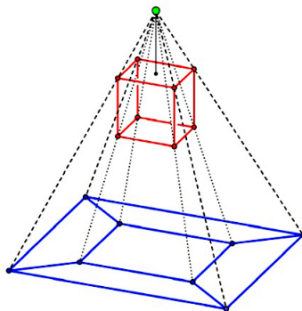
# Απεικονίσεις στο επίπεδο

Ο...γνωστός κύβος



## Απεικονίσεις στο επίπεδο

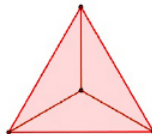
Κύβος στερεογραφικά...



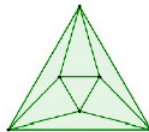
Σχήμα: Απεικόνιση κύβου με στερεογραφική προβολή

# Απεικονίσεις στο επίπεδο

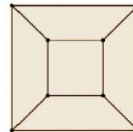
Όλα τα πλατωνικά



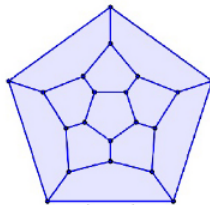
Τετράεδρο



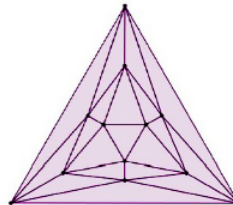
Οκτάεδρο



Κύβος



Δωδεκάεδρο



Εικοσάεδρο

# Αναπύγματα του Κύβου I

Ξεδιπλώσατε...

## Αναπύγματα

Ένα **Ανάπτυγμα** ή **Δίκτυο** ενός στερεού είναι η απεικόνισή του στο επίπεδο που προκύπτει όταν το «ξεδιπλώσουμε» κόβοντας στα σύνορα των εδρών.





## Αναπτύγματα του Κύβου

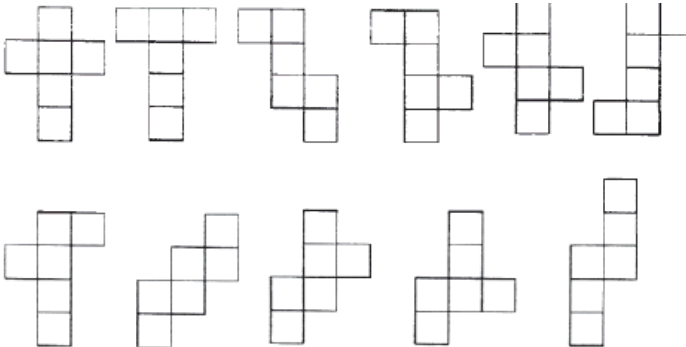
### 3η Δραστηριότητα



Σχήμα: Ποια αποτελούν αναπτύγματα κύβου; Πηγή

# Αναπτύγματα του Κύβου

Τα 11 Αναπτύγματα του κύβου



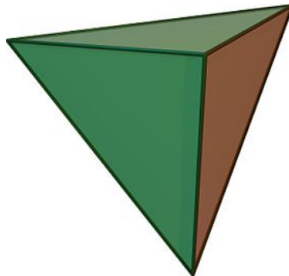
**Σχήμα:** Τα 11 Αναπτύγματα του κύβου

# Αναπύγματα του Τετραέδρου

## 4η Δραστηριότητα

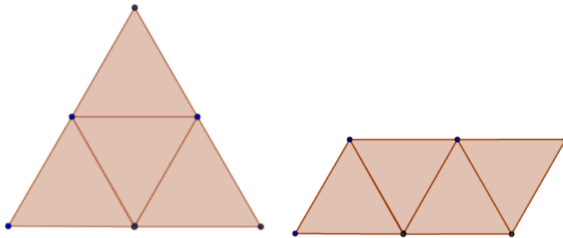
### Αναπύγματα του τετραέδρου

Πόσα αναπύγματα του τετραέδρου μπορείτε να σχεδιάσετε στο επίπεδο;

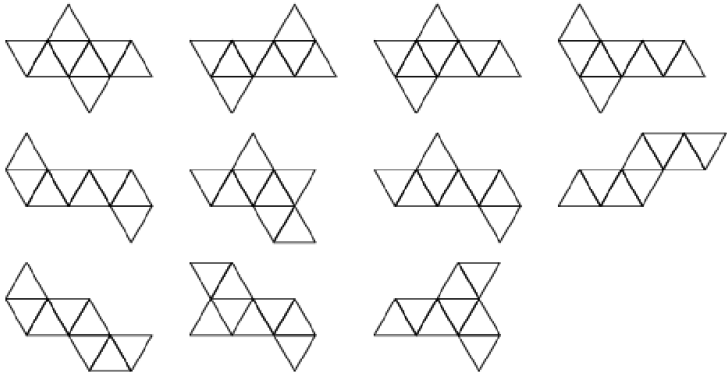


## 4η Δραστηριότητα

Πόσα αναπτύγματα του τετραέδρου μπορείτε να σχεδιάσετε στο επίπεδο;



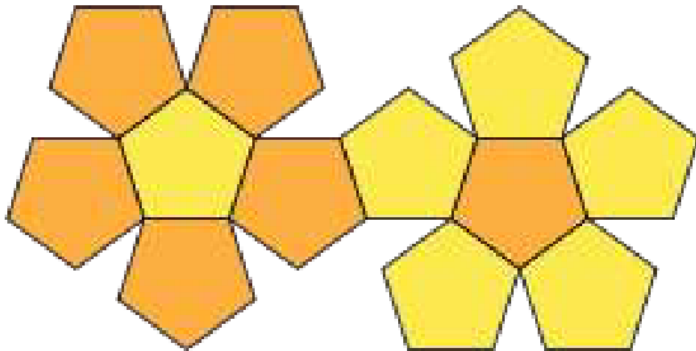
**Σχήμα:** Τα δύο αναπτύγματα του τετραέδρου



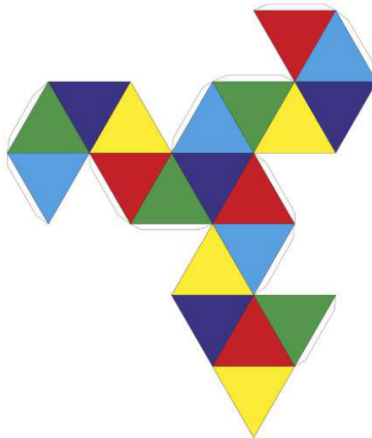
Εισαγωγή  
Τα Πλατωνικά Στερεά  
Το Τετράεδρο  
Στοιβάζοντας στερεά...  
Συμμετρίες και Ομάδες  
Ευχαριστίες

Παρατηρώντας τα Πλατωνικά στερεά  
2η Δραστηριότητα  
Απεικονίσεις στο επίπεδο  
Αναπύγματα-Δίκτυα στερεών  
3η Δραστηριότητα  
**4η Δραστηριότητα**  
Δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά

## Αναπύγματα Δωδεκάεδρου και Εικοσάεδρου I



## Αναπύγματα Δωδεκάεδρου και Εικοσάεδρου II





## Αναπύγματα Δωδεκάεδρου και Εικοσάεδρου I

Λίγο δύσκολο...

Καθένα έχει

**43380**

διαφορετικά αναπύγματα!

# Απόδειξη I

## παρατήρηση

Η απόδειξη αυτή βρίσκεται στο βιβλίο *XIII* των **Στοιχείων** του **Ευκλείδη** και είναι η τελευταία. Κατά τον Πρόκλο ο Ευκλείδης συνέγραψε τα Στοιχεία για να αποδείξει τις ιδιότητες των στερεών.

Έστω  $\Pi$  ένα κανονικό πολύεδρο.

Αν με  $v, e, f$  συμβολίσουμε το πλήθος των κορυφών, ακμών και εδρών του αντίστοιχα, τότε από το θεώρημα του Euler ισχύει ότι:

$$v + f = e + 2$$

## Απόδειξη II

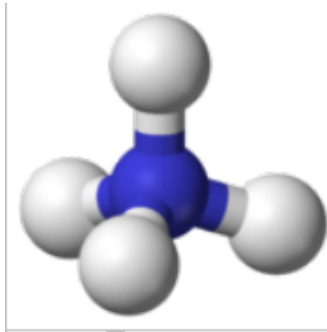
Εφόσον, πρόκειται για κανονικό στερεό έχει κατασκευαστεί από  $f$  το πλήθος κανονικά πολύγωνα, το καθένα με  $n$  κορυφές και  $n$  ακμές, πριν ενωθούν για να δημιουργηθεί το Π.

Αν  $V, E, F$  το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών στην αρχική συλλογή των πολυγώνων, πριν συναρμολογηθούν για να φτιάξουν το Π.

Τότε προφανώς ισχύει ότι:

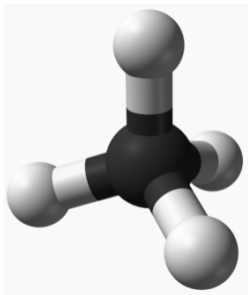
$$F, f, E = V = nf$$

## Τετράεδρο...συναντήσεις I



Σχήμα: Ιόν Αμμωνίου

## Τετράεδρο...συναντήσεις II



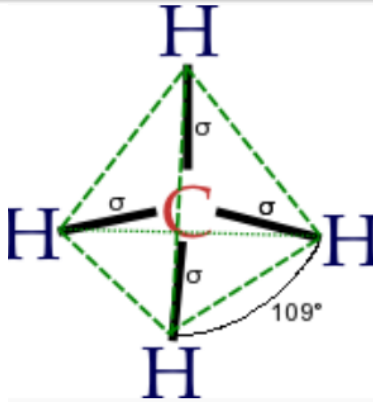
**Σχήμα:** Το μόριο του μεθανίου αποτελείται από έναν άνθρακα και 4 υδρογόνα τοποθετημένα στις κορυφές κανονικού τετραέδρου. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η μέγιστη απόσταση των H μεταξύ τους και το μεθάνιο βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση.

## 5η Δραστηριότητα I

Σε ομάδες

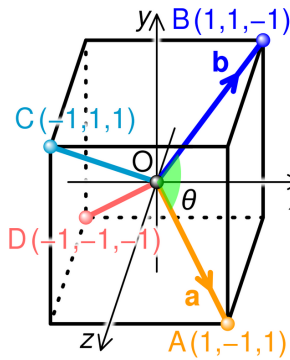
Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζουν H-C-H

## 5η Δραστηριότητα II



Σχήμα: Μόριο Μεθανίου

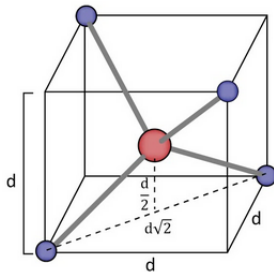
## 5η Δραστηριότητα I



Σχήμα: Τετράεδρο σε κύβο

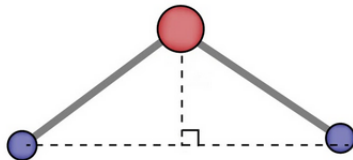


## 5η Δραστηριότητα II



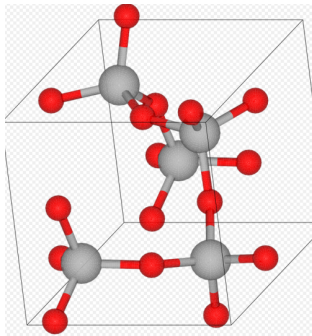
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{d^2 + d^2} = \sqrt{2d^2} = d\sqrt{2}$$



Σχήμα: Μία ακόμα απόδειξη

## Διοξείδιο του Πυριτίου I



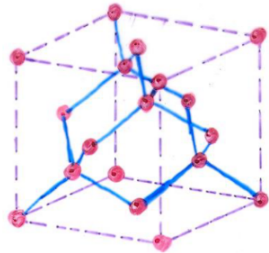
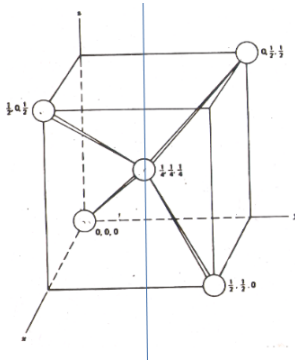
Σχήμα: Διοξείδιο του πυριτίου σε δομή τετραέδρου.

## Διοξειδίο του Πυριτίου II

### Κρύσταλλοι Quartz

Σε χρονόμετρα ακριβείας χρησιμοποιείται ένας κρύσταλλος quartz, μίας μορφής του διοξειδίου του πυριτίου, ο οποίος έχει την ιδιότητα να παράγει ένα σήμα σταθερής συχνότητας, μέσω του οποίου ρυθμίζεται ένας ηλεκτρονικός ταλαντωτής που καταγράφει το χρόνο.

## Διοξειδίο του Πυριτίου III



Σχήμα: Η κρυσταλλική δομή του Πυριτίου

## Διοξείδιο του Πυριτίου IV



Σχήμα: Μη επεξεργασμένος κρύσταλλος πυριτίου Πηγή ▶ ◀ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

## Διοξείδιο του Πυριτίου Ι



**Σχήμα:** Δέσμη οπτικών ινών αποτελούμενη από υψηλής καθαρότητας διοξείδιο του πυριτίου

## Διοξείδιο του Πυριτίου Ι



Σχήμα: Φυσική μορφή Αμέθυστου Πηγή

## Διοξείδιο του Πυριτίου II



Σχήμα: Αμέθυστος κομμένος ως σμαράγδι

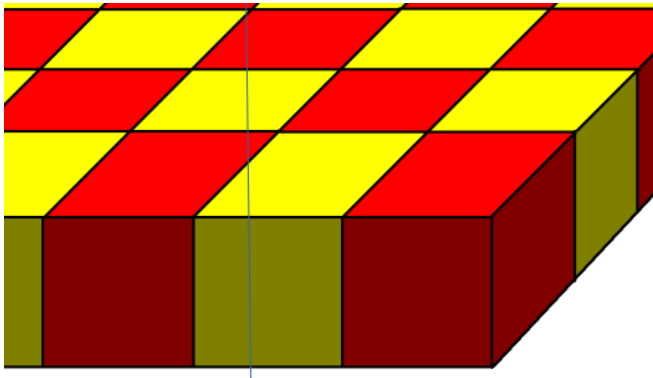


## Διοξείδιο του Πυριτίου III

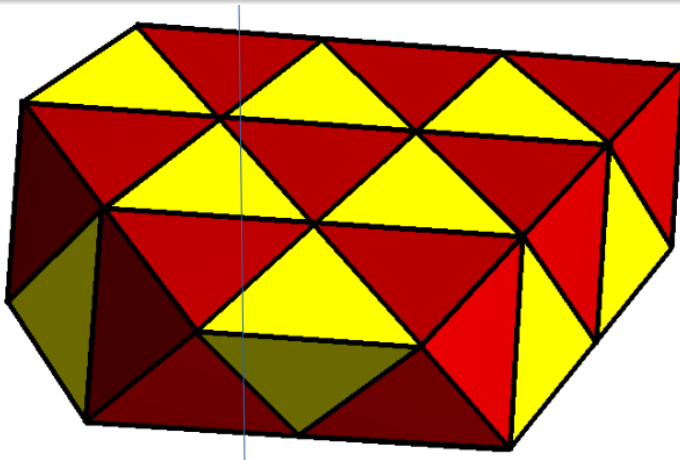
### Επεξεργασία Πολύτιμων λιθων

Η κοπή των διαμαντιών και άλλων πολύτιμων λίθων ακολουθεί συγκεκριμένες πρακτικές, που σχετίζονται με τις ιδιότητες τόσο του υλικού, όσο και των κατάλληλων συμμετριών που θα το καταστήσουν οπτικά καλύτερο, πιο λαμπερό και διαυγές, εκμεταλλευόμενοι το μεγαλύτερο μέρος του λίθου. Λανθασμένη κοπή του λίθου μπορεί να τον καταστήσει μικρότερης αξίας. (A History Of Diamond Cutting )

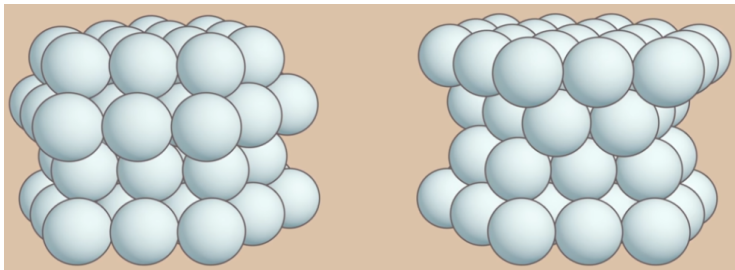
## Στοιβάξεις στο χώρο I



## Στοιβάξεις στο χώρο II



## Στοιβάξεις στο χώρο I



Σχήμα: Kepler 1611 για μπάλες κανονικών Πηγή

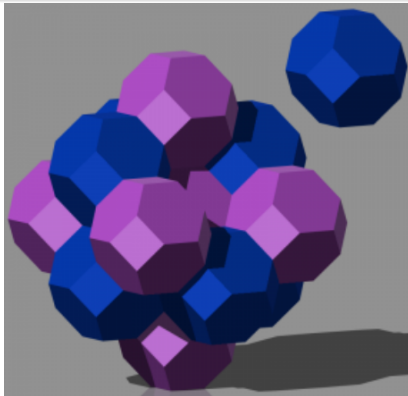
## Στοιβάξεις στο χώρο II

### Εικασία του Kepler

Ο ίδιος ο Κέπλερ πειραματίστηκε με πορτοκάλια και παρατήρησε ότι όταν τα στοίβαζε σε κύβο, με το ένα στρώμα πορτοκαλιών ακριβώς πάνω στο άλλο, του έμενε κενό το  $48/100$  του συνολικού όγκου. Αν τα έριχνε τυχαία, έμενε κενό περίπου το  $35/100$  του χώρου. Αν όμως έστρωνε πρώτα το κάτω στρώμα σε εξαγωνική διάταξη και πάνω του στοίβαζε το επόμενο έτσι ώστε τα πορτοκάλια του να μπαίνουν στα διάκενα του από κάτω στρώματος - σχηματίζοντας μια πυραμίδα -, τότε έμενε ανεκμετάλλευτο μόνο το  $26/100$  του συνολικού όγκου.

Μία απόδειξη της εικασίας του Kepler παρουσιάστηκε το 2017 στο Forum of Mathematics, Pi, Vol.5 από ομάδα Μαθηματικών με επικεφαλής τον Thomas Hales.

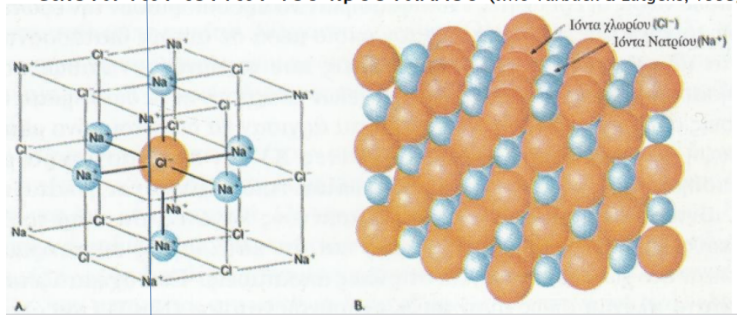
## Στοιβάξεις στο χώρο III



Σχήμα: Κόλουρο Οκτάεδρο

## Στοιβάξεις στο χώρο I

A: Διάταξη των ιόντων στο πλέγμα, B: πραγματική  
εικόνα των ιόντων του κρυστάλλου (από Tarbuck & Lutgens, 1993)



Σχήμα: Χλωριούχο Νάτριο

# Συμμετρίες των Πολύεδρων I

...Να κάνουμε και κάτι στον όμιλο...



## Ευχαριστούμε για τη φιλοξενία!

Σωτήρης Δ. Χασάπης

Όμιλος Προτύπου ΓΕ.Λ. Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης  
<http://omilosmath.blogspot.com/>

Εισαγωγή  
Τα Πλατωνικά Στερεά  
Το Τετράεδρο  
Στοιβάζοντας στερεά...  
Συμμετρίες και Ομάδες  
Ευχαριστίες