ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια

2ο Διήμερο Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
15 & 16 Μαρτίου 2003

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Διδασκαλείο Δημοτικής Εκπαίδευσης 'Δημήτρης Γληνός'

ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2003 1η ΕΚΔΟΣΗ ΕΝΤΥΠΗ

ΑΘΗΝΑ 2020 2η ΕΚΔΟΣΗ CD

ISBN 960-312-115-0

Εξώφυλλο-Σελιδοποίηση-Μοντάζ-Εκτύπωση

ART of TEXT

Κ.Ν. Επισκόπου 4 54635 Θεσσαλονίκη

Τηλ.-Fax: 2310 218546 218569

Περιεχόμενα

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Το επιχείρημα και η απόδειξη στα μαθηματικά

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ
Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά: Ερευνητικές διαπιστώσεις & διδακτικές προτάσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ III
Υλικό αναφοράς

Εισαγωγικό Σημείωμα

Η ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων και η σύνθεση αποδείξεων αποτελεί συστατικό στοιχείο της επιστημονικής πρακτικής των μαθηματικών, αλλά και έναν από τους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η απόδειξη και τα λογικά επιχειρήματα που τη συγκροτούν επιτελεί στο πλαίσιο της μαθηματικής πρακτικής πολλαπλές λειτουργίες. Επικυρώνει και δικαιολογεί την ορθότητα και την εγκυρότητα των μαθηματικών προτάσεων, εξηγεί και διευκρινίζει τους λόγους για τους οποίους μια μαθηματική πρόταση μπορεί να θεωρείται ως αληθής, συστηματοποιεί διαπιστώσεις οι οποίες προκύπτουν ως λογικές αναγκαιότητες στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας και δημιουργεί τους όρους διατύπωσης νέων μαθηματικών προτάσεων, κοινοποιεί και μεταδίδει τη μαθηματική γνώση.

Στα προγράμματα σπουδών των σχολείων της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όλων των χωρών του κόσμου, όπως και στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα, διακηρύσσεται με ταυτόσημες ή παρόμοιες εκφράσεις ως βασική επιδίωξη της διδασκαλίας των μαθηματικών «η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία».

Αναγκαία προϋπόθεση για την επίτευξη των στόχων αυτών από τη διδασκαλία των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί η κατανόηση των ιστορικών και επιστημολογικών όρων και παράλληλα των διδακτικών προβλημάτων της μαθηματικής απόδειξης. Στους δύο αυτούς άξονες αναπτύχθηκε η θεματολογία του 2ο Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα “Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά ”, που οργανώθηκε στις 15 και 16 Μαρτίου 2003 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Με βασική επιδίωξη την ανάπτυξη ενός διαλόγου για τα ζητήματα αυτά μεταξύ των εκπαιδευτικών και των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης προσανατολισμένου στις ανάγκες της εκπαιδευτικής πραγματικότητας.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων που παρουσιάστηκαν στο διήμερο αυτό, όπως επίσης και μια βιβλιογραφία για το επιχείρημα και την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά.

Για την Οργανωτική Επιτροπή

Δημήτρης Χασάπης,

Επικ. Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Α.Π.Θ.

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά: Το θέμα και το πλαίσιο μιας συζήτησης

Δημήτρης Χασάπης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Η γενέθλια πράξη των μαθηματικών, ως παραγωγικής επιστήμης, τοποθετείται από τους ιστορικούς στην εμφάνιση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, περίπου το 300 π.Χ. Από τότε μέχρι τις μέρες μας, η απόδειξη ως μέθοδος παραγωγής και εξακρίβωσης συμπερασματικών προτάσεων (θεωρημάτων και πορισμάτων) περιλαμβάνονταν, κατά κοινή παραδοχή, στα συστατικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Για πολλούς μάλιστα η απόδειξη αποτελούσε την ουσία των μαθηματικών, αφού η άποψη που διακήρυξε ο C.S. Peirce στα μέσα του 19ου αιώνα, ότι «τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της δημιουργίας αναγκαίων συμπερασμάτων» ήταν ιδιαίτερα διαδομένη.

Η απόδειξη κατά συνέπεια, ως η χαρακτηριστική μέθοδος παραγωγής και εξακρίβωσης μαθηματικών προτάσεων και άρα ως πρότυπο ανάπτυξης και διατύπωσης λογικών συλλογισμών, αποτέλεσε στοιχείο του περιεχομένου της μαθηματικής εκπαίδευσης με προνομιακό πεδίο εφαρμογής της τη στοιχειώδη γεωμετρία.

Όμως, εδώ και μια ή δυο δεκαετίες ο ρόλος της απόδειξης στα μαθηματικά και συνακόλουθα στη μαθηματική εκπαίδευση έχει τεθεί υπό συζήτηση, η οποία μάλιστα προξενεί το ολοένα και μεγαλύτερο ενδιαφέρον της μαθηματικής εκπαιδευτικής κοινότητας. Η Gila Hanna (2000) υπολογίζει ότι στη δεκαετία 1990 – 1999 πάνω από εκατό ερευνητικά άρθρα για τη μάθηση και τη διδασκαλία της απόδειξης έχουν δημοσιευθεί στα σημαντικότερα διεθνή περιοδικά της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Φαίνεται ότι μερικές σημαντικές εξελίξεις στην πρακτική των μαθηματικών, αλλά και στη φιλοσοφία και την κοινωνιολογία των μαθηματικών, έχουν θέσει σε αμφισβήτηση, όχι μόνο το ρόλο, αλλά και το καθεστώς της μαθηματικής απόδειξης. Οι εξελίξεις αυτές σε συνδυασμό με ανάλογες εξελίξεις στις κυρίαρχες θεωρήσεις της συγκρότησης και ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά έχουν προκαλέσει ανάλογους προβληματισμούς για το ρόλο και τη θέση της απόδειξης, αλλά και γενικότερα της επιχειρηματολογίας, στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Μια συνοπτική έκθεση των κύριων στοιχείων των εξελίξεων αυτών είναι αναγκαία για τη σχετική συζήτηση και ακολουθεί.

Εξελίξεις στην επιστημονική πρακτική των μαθηματικών

Οι κύριες εξελίξεις στην πρακτική δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης προέρχονται από την εισαγωγή και την διαρκώς διευρυνόμενη χρήση των υπολογιστών στη μαθηματική έρευνα. Στις άμεσες και διαπιστωμένες συνέπειες του γεγονότος αυτού περιλαμβάνονται:

- η χρήση υπολογιστών για τον έλεγχο και την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων,
- η ανάπτυξη νέων μορφών απόδειξης, ριζικά διαφορετικών και ως προς το περιεχόμενο και ως προς την μορφή από την κλασσική παραγωγική απόδειξη και
- η αποδοχή του πειραματισμού ως αποδεκτής μαθηματικής πρακτικής.

Η χρήση των υπολογιστών για τον έλεγχο και την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων, που απαιτούν ιδιαίτερα εκτεταμένους και πολύπλοκους υπολογισμούς, ουσιαστικά πέρα από τις ανθρώπινες δυνατότητες της ατομική ύπαρξης, νομιμοποιήθηκε στη μαθηματική πρακτική μετά από την απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων, μέρος της οποίας εκτελέστηκε από υπολογιστή (Appel και Haken, 1989).

Η αλήθεια όμως των αποδειγμένων με τη χρήση των υπολογιστών μαθηματικών προτάσεων είναι ουσιαστικά υπό αίρεση, αφού δεν μπορεί ποτέ να διασφαλιστεί ότι οι υπολογιστές και τα συναφή, αλγοριθμικού χαρακτήρα, προγράμματα τους δεν υπόκεινται σε σφάλματα. Κατά συνέπεια, οι προτάσεις αυτές εντασσόμενες στη μαθηματική γνώση, όπως συμβαίνει, τροποποιούν τα χαρακτηριστικά της, διαφοροποιώντας τα κριτήρια εγκυρότητας της μαθηματικής απόδειξης.

Η ανάπτυξη νέων μορφών απόδειξης, ριζικά διαφορετικών και ως προς το περιεχόμενο και ως προς την μορφή από την κλασσική παραγωγική απόδειξη αποτελεί τη δεύτερη συνέπεια της χρήσης των υπολογιστών στη μαθηματική έρευνα.

Μια τέτοια μορφή απόδειξης αποτελεί, για παράδειγμα, η ολογραφική απόδειξη (Babai, 1994). Η ολογραφική απόδειξη απαιτεί την καταγραφή μιας μαθηματικής απόδειξης στη λογική ενός προγράμματος υπολογιστών, με έναν ιδιαίτερα λεπτομερειακό τρόπο και με τη χρήση μιας τυπικής γλώσσας. Εξαιτίας του τρόπου της καταγραφής αυτής, εάν υπάρχει ένα σφάλμα σε οποιοδήποτε γραμμή της απόδειξης τότε το σφάλμα αυτό αναπαράγεται και διαδίδεται ομοιόμορφα σε κάθε γραμμή της. Με τον έλεγχο, επομένως, τυχαία επιλεγμένων γραμμών και όχι του συνόλου των γραμμών που καταγράφουν την απόδειξη είναι δυνατός ο έλεγχος της ορθότητας μιας απόδειξης. Ελέγχοντας όμως τυχαία επιλεγμένα σημεία και όχι το σύνολο μιας απόδειξης, όσο και αν ο αριθμός των σημείων αυτών μπορεί να διευρυνθεί με τη βοήθεια των υπολογιστών, η επικύρωση της αντίστοιχης μαθηματικής πρότασης υπόκειται σε μια πιθανότητα σφάλματος, η οποία μπορεί μεν να ελαχιστοποιηθεί αλλά όχι και να μηδενιστεί. Ό ενδεχομενικός χαρακτήρας των αποδείξεων αυτών βρίσκεται σε απόλυτη αντίθεση με την απαίτηση της βεβαιότητας, που εμπεριέχεται στην κλασσική έννοια της μαθηματικής απόδειξης.

Παρά τον καινοτομικό χαρακτήρα τους όμως στον πυρήνα των προαναφερθέντων διαδικασιών και μορφών μαθηματικής απόδειξης παραμένει η λογική της αναλυτικής απόδειξης, όπου ένα μαθηματικό συμπέρασμα προκύπτει ως αληθές από δεδομένες παραδοχές ή αλήθειες με τη χρήση παραγωγικών συλλογισμών.

Υπό την επίδραση όμως της χρήσης των υπολογιστών διευρύνεται συνεχώς η αποδοχή του πειραματισμού ως αποδεκτής πρακτικής στη μαθηματική έρευνα, ιδιαίτερα για την εύρεση, τη διερεύνηση ή την επιβεβαίωση ιδιοτήτων μαθηματικών αντικειμένων, όπως είναι τα διαφόρων διαστάσεων μαθηματικά σχήματα και μορφές, αλλά και για την δημιουργία, τη διατύπωση ή και τον έλεγχο μαθηματικών εικασιών. Η κυκλοφορία του περιοδικού *Πειραματικά Μαθηματικά* (*Experimental Mathematics*) το 1992, αφιερωμένου στις «πειραματικές όψεις της μαθηματικής πρακτικής», στα περιεχόμενα του οποίου περιλαμβάνονται σχεδόν αποκλειστικά διερευνήσεις μαθηματικών προτάσεων με τη χρήση υπολογιστών, σηματοδοτεί χαρακτηριστικά αυτή την εξέλιξη. Στο επίπεδο της πρακτικής, τα τελευταία χρόνια πολλαπλασιάζονται συνεχώς τα ερευνητικά κέντρα πανεπιστημίων και ιδρυμάτων με αποκλειστική δραστηριότητα τους τα πειραματικά μαθηματικά και κύριο χρηματοδότη τους εταιρείες υλικού και λογισμικού υπολογιστών.

Πρέπει βέβαια να σημειωθεί, ότι οι συζητήσεις για τα ζητήματα των νέων μορφών δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης που έχουν προκαλέσει οι προαναφερθείσες εξελίξεις, όπως συνάγεται από δημοσιεύσεις σε συναφή περιοδικά, οδηγούν σε αντιθετικές διαπιστώσεις και αναδεικνύουν μια διχογνωμία ιδιαίτερα για το καθεστώς της μαθηματικής απόδειξης (ενδεικτικά, Horgan, 1993, Jaffe & Quinn1993, Thurston, 1994 και Van Bendegem στον παρόντα τόμο).

Εξελίξεις στη φιλοσοφία και την κοινωνιολογία των μαθηματικών

Σημαντικότερες ίσως από τις προηγούμενες, τουλάχιστον ως προς τις άμεσες επιδράσεις τους στους προβληματισμούς για το ρόλο και τη σημασία της μαθηματικής απόδειξης, φαίνεται να είναι οι εξελίξεις στη φιλοσοφική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, όπως και στην κοινωνιολογία της μαθηματικής πρακτικής. Οι εξελίξεις αυτές χαρακτηρίζονται από την ευρεία αποδοχή απόψεων, οι οποίες διατυπώνουν μια συνολική αμφισβήτηση του κυρίαρχου για αιώνες προτύπου της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής, πυρήνα του οποίου αποτέλεσε η μαθηματική απόδειξη, ως προϊόν και διαδικασία.

Ένα φάσμα απόψεων στη φιλοσοφία των μαθηματικών, οι οποίες έχουν αποκληθεί “απολυτοκρατικές” (Ernst 1991), διαμορφώθηκαν ιστορικά και κυριάρχησαν στις μαθηματικές κοινότητες υπό την επίδραση ποικίλων φιλοσοφικών, πολιτιστικών και κοινωνικών παραγόντων. Οι απόψεις αυτές θεωρούν τα μαθηματικά, ως ένα αντικειμενικό, απόλυτο, αναμφισβήτητο και μη επιδεχόμενο διορθώσεις σώμα γνώσεων, το οποίο θεμελιώνεται στην ακλόνητη βάση της παραγωγικής λογικής. Αυτό το σώμα των μαθηματικών γνώσεων συγκροτείται με πυρήνα ένα σύνολο προτάσεων (θεωρημάτων) και των αποδείξεων της αλήθειας τους. Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών θεωρημάτων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο προκαθορισμένων παραδοχών (αξιωμάτων και ορισμών) και σε μια σειρά κανόνων λογικής συνεπαγωγής, οι οποίοι διασφαλίζουν τη μεταβίβαση της αλήθειας από τις προκαθορισμένες παραδοχές στις παράγωγες συμπερασματικές προτάσεις. Κατά συνέπεια, αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις μαθηματικές παραδοχές της και τους παραδεκτούς κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής.

Ουσιαστικά, οι απολυτοκρατικές απόψεις δεν περιγράφουν τη μαθηματική γνώση, ούτε τις διαδικασίες δημιουργίας και ανάπτυξης της, αλλά επικεντρώνονται στην τεκμηρίωση της αλήθειας της μαθηματικής γνώσης. Δηλαδή στη “θεμελίωση” της μαθηματικής γνώσης, στη βάση μιας λογικής-παραγωγικής δομής, με συστατικά στοιχεία της τα αξιώματα, τους ορισμούς και τους παραδεκτούς κανόνες της λογικής συνεπαγωγής. Είναι προφανές, ότι στο πλαίσιο αυτό η απόδειξη, ως προϊόν και διαδικασία, αποτελεί το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής.

Επομένως, για τις απολυτοκρατικές απόψεις, η μαθηματική γνώση είναι α-χρονική, παρόλο που μπορεί να ανακαλύπτονται και να προστίθενται νέες γνώσεις, είναι υπερ-ανθρώπινη και α-ιστορική, αφού οι δραστηριότητες των ερευνητών-μαθηματικών και η ιστορία των μαθηματικών δεν συναρτάται με τη φύση και την αιτιολόγηση της μαθηματικής γνώσης, είναι μια «καθαρή», άκρως ορθολογική γνώση, η οποία συμβαίνει να είναι χρήσιμη εξαιτίας της καθολικής εγκυρότητας της. Για τους λόγους αυτούς είναι απαλλαγμένη ηθικών και πολιτισμικών αξιών (Ernest, 1998).

Το βιβλίο του Lakatos (1976) «*Αποδείξεις και ανασκευές*» πυροδότησε τα τελευταία χρόνια μια αμφισβήτηση πολλών παραδοχών του κυρίαρχου αυτού προτύπου της μαθηματικής γνώσης, αναδεικνύοντας την ανθρώπινη όψη στην πρακτική της μαθηματικής δραστηριότητας και υπογραμμίζοντας τον κοινωνικό και ιστορικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Ο Lakatos υποστήριξε ότι το πρόβλημα της διασφάλισης της αλήθειας της μαθηματικής γνώσης οδηγεί σε ένα φαύλο κύκλο. Κάθε μαθηματική θεωρία εξαρτάται από ένα σύνολο παραδοχών, οι οποίες αφού είναι υποθέσεις δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν βέβαιη και ασφαλή γνώση. Κάθε προσπάθεια να διασφαλιστεί η βεβαιότητα τους οδηγεί σε μια επ' άπειρον παλινδρόμηση και επαναγωγή: η απόδειξη τους προϋποθέτει ή ένα νέο σύνολο παραδοχών ή ένα σύνολο ήδη αποδειγμένα αληθών προτάσεων, η απόδειξη των οποίων όμως βασίζεται επίσης σε ένα σύνολο υποθέσεων. Τελικά, η μαθηματική αλήθεια, εξαρτάται από ένα σύνολο υποθέσεων, οι οποίες υιοθετούνται χωρίς απόδειξη και επομένως είναι αδύνατον να διασφαλιστεί η απόλυτη αλήθεια της μαθηματικής γνώσης. Η θέση αυτή αποτελεί το βασικό επιχείρημα εναντίον της δυνατότητας για απόλυτη, και αδιάψευστη μαθηματική γνώση και έρχεται σε άμεση αντίθεση με τη λογική των απολυτοκρατικών απόψεων.

Στη βάση της αντίθεσης αυτής διατυπώθηκαν μια σειρά νέων φιλοσοφικών απόψεων για τη μαθηματική γνώση και πρακτική. Οι απόψεις αυτές έχουν ως αφετηρία τους την παραδοχή, ότι η μαθηματική γνώση είναι προϊόν κοινωνικών διαδικασιών και ως τέτοιο δεν αποτελεί μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας (Kitcher 1984, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956). Αντίθετα, όπως και κάθε επιστημονική γνώση, υπόκειται σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις (Lakatos 1976). Η θέση αυτή σηματοδοτεί τις απόψεις αυτές, οι οποίες στη διεθνή βιβλιογραφία αποκαλούνται πλέον «διαψευσιοκρατικές».

Δύο στοιχεία των απόψεων αυτών, που ενδιαφέρουν εδώ, πρέπει να υπογραμμιστούν. Πρώτο, οι απόψεις αυτές εισάγουν μια εννοιολογική αναθεώρηση της φύσης των μαθηματικών. Τα μαθηματικά δεν θεωρούνται ως ένα σώμα καθαρής και αφηρημένης γνώσης, που υπάρχει σε μια υπερ-ανθρώπινη, αντικειμενική σφαίρα ιδεών και εκφράζεται τελεσίδικα από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων και από μια σειρά διαδικασιών τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών. Αντίθετα, τα μαθηματικά, ως γνώση, σχετίζονται με σύνολα κοινωνικών πρακτικών, που το καθένα έχει την ιστορία του, τα πρόσωπα, τους θεσμούς και τις κοινωνικές του οριοθετήσεις, τις συμβολικές του μορφές, τις επιδιώξεις και τις σχέσεις εξουσίας (Tymoczko 1986).

Στο πλαίσιο αυτό, η μαθηματική απόδειξη ως διαδικασία επικύρωσης των μαθηματικών αληθειών παύει να αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής γνώσης και αποκτά έναν εντελώς διαφορετικό ρόλο. Όπως έχει αναλυθεί από τον Lakatos (1976), η μαθηματική γνώση οργανώνεται ως ένα υποθετικό-παραγωγικό σύστημα, του οποίου όμως κυρίαρχο στοιχείο δεν αποτελεί η μαθηματική απόδειξη, ως διαδικασία με την οποία μεταβιβάζεται η αλήθεια από μια σειρά παραδοχών που έχουν υποτεθεί αληθείς σε ένα συμπέρασμα, όπως δέχονται οι απολυτοκρατικές απόψεις για τα μαθηματικά. Αντίθετα, κυρίαρχο στοιχείο της μαθηματικής γνώσης αποτελούν οι διαδικασίες με τις οποίες και μέσα από τις οποίες δημιουργείται και συγκροτείται η γνώση αυτή. Οι διαδικασίες αυτές, αρθρώνονται με επίκεντρο τη διατύπωση υποθέσεων και εικασιών για την επίλυση προβλημάτων, την επιβεβαίωση ή τη διάψευση και αναδιατύπωση των αρχικών υποθέσεων και εικασιών, τη διατύπωση νέων υποθέσεων, εικασιών και προβλημάτων που προκύπτουν στα πλαίσια των δραστηριοτήτων αυτών κ.ο.κ. Στις διαδικασίες αυτές, η απόδειξη αποτελεί «... ένα νοητικό πείραμα – ή σχεδόν πείραμα – το οποίο αναλύει την αρχική εικασία σε υποεικασίες ή λήμματα, ενθέτοντας έτσι αυτή την εικασία σε ένα εντελώς διαφορετικό σώμα γνώσεων» (Lakatos, 1976, σ. 29 ελληνικής έκδοσης). Κύριος ρόλος της απόδειξης, λοιπόν, δεν είναι η τεκμηρίωση της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων, αλλά η ανάλυση, η διευκρίνηση και η δικαιολόγηση της υπό διερεύνηση εικασίας, ώστε να καταστεί δυνατή η αποδοχή ή η απόρριψή της.

Δεύτερο, οι απόψεις της διαψευσιμότητας της μαθηματικής γνώσης αποδέχονται και υπερασπίζουν ως θεμιτά φιλοσοφικά αντικείμενα, τις πρακτικές των ανθρώπων που ασκούν μαθηματικές δραστηριότητες, την ιστορία και τις εφαρμογές των μαθηματικών, τη θέση των μαθηματικών στον ανθρώπινο πολιτισμό και άλλα συναφή. Αποδέχονται, δηλαδή, πλήρως το ανθρώπινο πρόσωπο και το ανθρώπινο συστατικό των μαθηματικών (Davis and Hersh 1980). Άρα, η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να θεωρείται ως απόλυτα αντικειμενική, ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες, υποκείμενη αποκλειστικά σε μια δικιά της αυτόνομη εσωτερική λογική. Αντίθετα, μέσα από την κοινωνική της προέλευση και την ιστορική της εξέλιξη η μαθηματική γνώση διαπλέκεται με το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης και σφραγίζεται από τις κυρίαρχες ιδεολογίες, που οριοθετούν τα πλαίσια ανάπτυξης της (Wilder 1981).

Στενά συνυφασμένη με τις θεωρήσεις της διαψευσιμότητας της μαθηματική γνώσης και άμεση συνέπεια τους είναι μία επίσης νέα προσέγγιση στην κοινωνιολογία της μαθηματικής πρακτικής. Για την προσέγγιση αυτή, το κοινωνικό πλαίσιο και οι επαγγελματικές κοινότητες των ερευνητών μαθηματικών διαδραματίζουν ένα κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και επικύρωση της μαθηματικής γνώσης (Davis and Hersh, 1980; Kitcher, 1984; Latour, 1987). Η κοινωνική οργάνωση και δομή των κοινοτήτων αυτών, η οποία δεν έχει καθόλου ευκαιριακό και τυχαίο χαρακτήρα, διαμορφώνει τους μηχανισμούς δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, αποτελώντας ταυτόχρονα το πλαίσιο διαφύλαξης και το πεδίο εφαρμογής και μετάδοσης της άρρητης και άτυπης μαθηματικής γνώσης.

Από την οπτική αυτή και σε συνδυασμό με τα προαναφερθέντα, η αποδοχή ή όχι μιας μαθηματικής απόδειξης, άρα και της μαθηματικής αλήθειας που η απόδειξη αυτή τεκμηριώνει, είναι ουσιαστικά μια κοινωνική πράξη, η οποία δευτερευόντως συναρτάται με την αυστηρή τήρηση των κανόνων της παραγωγικής λογικής (Kitcher 1984, Lakatos, 1976, Tymoczo 1986, Wilder 1981). «Μια απόδειξη γίνεται απόδειξη μετά την κοινωνική πράξη της 'αποδοχής της ως απόδειξης'» (Manin, 1977, σ. 48).

Η δομή επομένως και το περιεχόμενο μιας μαθηματικής απόδειξης, ως τεκμηρίου του αποτελέσματος μιας διαδικασίας, στοχεύει στην παροχή πειστικών επιχειρημάτων και εγγυήσεων στη μαθηματική κοινότητα για την αποδοχή της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης. Κατά συνέπεια, για την επιτυχία του στόχου αυτού μια μαθηματική απόδειξη ανταποκρίνεται πρώτιστα στα κριτήρια επάρκειας της μαθηματικής απόδειξης, τα οποία ασπάζεται η κυρίαρχη μαθηματική κοινότητα μιας ορισμένης εποχής. Τα κριτήρια αυτά όμως, όπως έχει ιστορικά διαπιστωθεί, είναι κυρίως άτυπα και άρρητα, καθιερωμένα μέσα από την επικρατούσα μαθηματική πρακτική. Επομένως, στη δημιουργία και επικύρωση της μαθηματικής γνώσης οι αποδεκτές πρακτικές απόδειξης και τα πρότυπα γραπτής έκφρασης της είναι καθοριστικά (Davis and Hersh 1980, Ernest 1991, 1997, Lakatos, 1976, Restivo, 1992, Tymoczo 1986).

Εξελίξεις στα σχολικά μαθηματικά

Ποιες είναι οι επιπτώσεις στα σχολικά μαθηματικά των εξελίξεων που σκιαγραφήθηκαν προηγούμενα;

Στην παρούσα ανάλυση θεωρείται δεδομένο, ότι το περιεχόμενο και οι πρακτικές των σχολικών μαθηματικών δεν καθορίζονται μονοδιάστατα από τις κυρίαρχες απόψεις για τη μαθηματική γνώση και το χαρακτήρα της, αλλά από έναν ιδιότυπο συνδυασμό των απόψεων αυτών με τις επικρατούσες θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία της μαθηματικής γνώσης. Η σχέση μάλιστα της επίδρασης των δυο αυτών παραγόντων στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών φαίνεται να μεταβάλλεται κατά εκπαιδευτική βαθμίδα, σε συνάρτηση με το ρόλο που οι κυρίαρχες κοινωνικές δυνάμεις αποδίδουν στο σχολείο ή στα σχολεία κάθε βαθμίδας. Έτσι στο Δημοτικό σχολείο είναι οι κυρίαρχες θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία της μαθηματικής γνώσης, ενώ στο Λύκειο οι κυρίαρχες απόψεις για τη μαθηματική γνώση και το χαρακτήρα της ο πρωταρχικός παράγοντας, που επιβάλλει το πλαίσιο διαμόρφωσης του περιεχομένου και των πρακτικών της διδασκαλίας των μαθηματικών. Στο Γυμνάσιο εντοπίζεται μια ισόρροπη, σε γενικές γραμμές, επίδραση, η οποία σε συνδυασμό με το ρόλο που κατά εποχή του αποδίδεται αποκλίνει υπέρ του ενός ή του άλλου παράγοντα.

Σε συνάρτηση με το συνδυασμό των κυρίαρχων απόψεων για τη μαθηματική γνώση με τις επικρατούσες θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, ένας τρίτος, εξίσου καθοριστικός, παράγοντας παρεμβαίνει στη διαμόρφωση του περιεχομένου και των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών.

Όπως έχει αλλού αναλυθεί (Χασάπης, 1996), τα σχολικά μαθηματικά εκτός από φορέας στοιχείων της μαθηματικής γνώσης είναι και φορέας μιας κοινωνικής ιδεολογίας για τη μαθηματική γνώση. Διδάσκουν δηλαδή παράλληλα, κανόνες και πρακτικές κατάλληλης χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης και των αντικειμένων της, που στοχεύουν στη συγκρότηση μιας ειδικής σχέσης των παιδιών με το αντικείμενο των μαθηματικών. Με άλλα λόγια, διδάσκουν κανόνες συμπεριφοράς απέναντι στη θεωρητική και κοινωνική λειτουργία της μαθηματικής γνώσης. Τα στοιχεία που διαμορφώνουν το πλαίσιο της ιδεολογικής αυτής λειτουργίας των σχολικών μαθηματικών αξιοποιούν οπτικές των κυρίαρχων απόψεων για το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης, απορρέουν όμως πρωταρχικά από δομικά στοιχεία της κυρίαρχης ιδεολογίας.

Πρέπει βέβαια να σημειωθεί, ότι οι επιδράσεις του πλέγματος των παραγόντων που προαναφέρθηκαν στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών δεν έχει σε καμία περίπτωση τη μορφή μιας άμεσης λογικής συνεπαγωγής. Ένα πλήθος κοινωνικών, πολιτιστικών και πολιτικών παραγόντων παρεμβαίνουν σε διάφορα επίπεδα και βαθμούς διαθλώντας, πολλές φορές καθοριστικά, την επίδραση των στοιχείων που προαναφέρθηκαν στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών. Η ανάλυση του Ernest (1991) για τις ιδεολογίες των αναλυτικών προγραμμάτων των σχολικών μαθηματικών είναι από την οπτική αυτή ιδιαίτερα χρήσιμη και διαφωτιστική.

Κατά τη δεκαετία του 1960 συντελέστηκαν οι μεγαλύτερες σε έκταση και βάθος μεταρρυθμίσεις των σχολικών μαθηματικών σε όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου. Για τα χαρακτηριστικά, τους στόχους, τους φορείς και τις ευρύτερες επιπτώσεις των μεταρρυθμίσεων αυτών έχουν γραφεί πολλά (ενδεικτικά, Θωμαΐδης, 1991, Τουμάσης, 1987). Στη Ελλάδα οι μεταρρυθμίσεις αυτές ξεκίνησαν το 1961 και μέσα από ποικίλες παλινδρομήσεις ολοκληρώθηκαν μετά από μια εικοσαετία. Μέσα από τις μεταρρυθμίσεις αυτές αποτυπώθηκαν στα σχολικά μαθηματικά, που τότε αποκλήθηκαν «νέα» ή «μοντέρνα» μαθηματικά, ουσιώδη στοιχεία μιας από τις κυρίαρχες απολυτοκρατικές απόψεις για τη μαθηματική γνώση, υπό τους όρους των Πιαζετιανών θεωρήσεων για τη νοητική ανάπτυξη του ατόμου και τη μάθηση των μαθηματικών.

Σε πολύ γενικές γραμμές, η άποψη για τη μαθηματική γνώση (προϊόν επεξεργασιών μιας ομάδας Γάλλων μαθηματικών που έμεινε γνωστή ως ομάδα Bourbaki) πρόβαλλε την επαναδιατύπωση των μαθηματικών με τη γλώσσα της θεωρίας των συνόλων, την αυστηρά λογική θεμελίωση τους και την απόλυτα αξιωματική-παραγωγική οργάνωση τους με βάση μια σειρά θεμελιωδών μαθηματικών δομών (διατακτικές, αλγεβρικές και τοπολογικές δομές). Σε μια τέτοια οπτική, η «μύηση» και η «εξοικείωση» με τη «διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης» αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο του περιεχομένου και των πρακτικών της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Βασική θέση, όμως, των θεωρήσεων του Πιαζέ και των συνεργατών του αποτελεί η διάκριση της νοητικής συγκρότησης και ανάπτυξης του ατόμου σε στάδια και περιόδους, απόλυτα συναρτημένα με τη βιολογική του εξέλιξη και την προοδευτική κοινωνικοποίηση της σκέψης του. Σε κάθε στάδιο και περίοδο ανάπτυξης, η νοητική συγκρότηση του ατόμου χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες του προσδίδουν και αντίστοιχες δυνατότητες μάθησης και λογικών λειτουργιών (δες ενδεικτικά, Piaget, 1967).

Η ευχέρεια διατύπωσης κρίσεων με τη μορφή λογικών προτάσεων, που η αλήθεια τους ελέγχεται με βάση όχι το εμπειρικό τους περιεχόμενο αλλά τη λογική τους δομή και η σύνθεση συλλογισμών, η δυνατότητα επομένως ανάπτυξης υποθετικο-παραγωγικής λογικής σκέψης, καθίσταται εφικτή από την ηλικία των 12 ετών περίπου και μετέπειτα, κατά την περίοδο δηλαδή των τυπικών λογικών πράξεων όπως ορίζεται στις θεωρήσεις του Πιαζέ, η οποία συμπίπτει με τη σχολική περίοδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αντίθετα, κατά την προηγούμενη περίοδο της νοητικής ανάπτυξης του ατόμου, που διαρκεί από την ηλικία των 7 μέχρι την ηλικία των 11 ετών περίπου, την περίοδο των συγκεκριμένων λογικών πράξεων, η οποία συμπίπτει με τη σχολική περίοδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η νοητική ευχέρεια περιορίζεται σε λογικές πράξεις, οι οποίες περιλαμβάνουν ομαδοποιήσεις και διακρίσεις τάξεων, συνθέσεις και αντιστοιχίσεις τάξεων καθώς και ταξινομήσεις και διατάξεις τάξεων με βάση τις διαφορές τους, σε άμεση όμως αντιστοιχία με φυσικές πράξεις και χειρισμούς. Η σκέψη του ατόμου κατά την περίοδο αυτή χαρακτηρίζεται επομένως από τη δυνατότητα διατύπωσης λογικών συνδυασμών, αλλά την αδυναμία διατύπωσης λογικών προτάσεων και τον έλεγχο υποθέσεων

Στη βάση αυτή, η μαθηματική απόδειξη περιορίζεται αποκλειστικά στα αναλυτικά προγράμματα, στα σχολικά βιβλία και στη διδασκαλία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τα οποία κατά περιόδους αποκτούν ιδιαίτερα φορμαλιστικό περιεχόμενο, ενώ τα μαθηματικά του Δημοτικού σχολείου διατυπώνονται απλώς στη γλώσσα των συνόλων, χωρίς να περιλαμβάνουν καμία μορφή επιχειρηματολογίας για τη δικαιολόγηση συμπερασμάτων, αφού οριοθετούνται από «τις δυνατότητες της διανοητικής αναπτύξεως» του παιδιού σύμφωνα με το αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα (Π.Δ. 1034/1977).

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, κάτω από το βάρος της διαπιστωμένης αποτυχίας των μεταρρυθμίσεων αυτών και υπό την επίδραση των προαναφερθέντων εξελίξεων στην πρακτική και στη φιλοσοφία των μαθηματικών άρχισε να προβάλλεται, αρχικά από μεμονωμένους ερευνητές και στη συνέχεια από συλλογικούς φορείς και οργανισμούς, η ανάγκη ριζικής τροποποίησης του περιεχομένου και των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών.

Έκτοτε, προβάλλονται, αναπτύσσονται και κατά περίπτωση υλοποιούνται δύο εντελώς διαφορετικές εκδοχές σχολικών μαθηματικών. Κοινό στοιχείο των εκδοχών αυτών αποτελεί η αντίθεση τους σε κάθε απολυτοκρατική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, αλλά και η μονομερής ανάγνωση, ερμηνεία και προβολή στο επίπεδο των σχολικών μαθηματικών, ουσιωδών χαρακτηριστικών της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι για παράδειγμα η επίλυση προβλημάτων, τα οποία αναδείχτηκαν από τις νέες φιλοσοφικές απόψεις για το χαρακτήρα και το περιεχόμενο της μαθηματικής πρακτικής. Στοιχείο που διαφοροποιεί τις δύο εκδοχές των σχολικών μαθηματικών αποτελεί η υιοθέτηση δύο ουσιαστικά αντιθετικών θεωρήσεων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Κύρια στοιχεία των δύο αυτών θεωρήσεων σκιαγραφούνται στη συνέχεια, χωρίς διεκδίκηση πληρότητας.

Η μια εκδοχή υιοθετεί και επαναφέρει στο προσκήνιο θεωρήσεις που αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως μια διεργασία ερεθισμάτων και αποκρίσεων, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα μια μόνιμη τροποποίηση της συμπεριφοράς του ανθρώπου. Σε αντιστοιχία με τα προτάγματα των θεωρήσεων αυτών, η εκδοχή αυτή προβάλλει την επιλογή και τη δόμηση του περιεχομένου και των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών γύρω από καθορισμένους στόχους, οι οποίοι διατυπώνονται με παρατηρήσιμους όρους αναμενόμενης συμπεριφοράς και αφορούν γνώσεις, δεξιότητες και στάσεις που συναρτώνται πρώτιστα με το χειρισμό και τη χρήση της μαθηματικής γνώσης (δες ενδεικτικά, Κολέζα, Μακρής & Σούρλας, 1993).

Ως αποτέλεσμα, η εκδοχή αυτή διαφοροποιεί πλήρως τα σχολικά μαθηματικά από τα μαθηματικά ως επιστημονική πρακτική, οπότε και παραβλέπει κάθε στοιχείο δημιουργίας, επικύρωσης και οργάνωσης της μαθηματικής γνώσης. Ανάγει, κατά συνέπεια, τα σχολικά μαθηματικά σε ένα μόνο επίπεδο εργαλειακής μορφής και τα τυποποιεί σ' ένα σύνολο εννοιών και τεχνικών επίλυσης προβλημάτων «της καθημερινής ζωής». Στην οπτική αυτή η μαθηματική απόδειξη αντιμετωπίζεται ως μια από τις στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Η εκδοχή αυτή, επικαλείται ως πρωταρχική την κοινωνική χρησιμότητα της μαθηματικής γνώσης και σήμερα προβάλλεται συστηματικά κυρίως από επιχειρηματικούς φορείς και οικονομικούς οργανισμούς. Το πρόγραμμα PISA – Διεθνούς αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών σε διάφορες χώρες του ΟΟΣΑ (2000) υποβάλλει έμμεσα αυτή την εκδοχή ως αναγκαία για τα σχολικά μαθηματικά.

Η δεύτερη εκδοχή για τα σχολικά μαθηματικά υιοθετεί σύγχρονες μετεξελίξεις των Πιαζετιανών θεωρήσεων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες στη σύγχρονη διεθνή βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί με επιμέρους προσδιορισμούς ως κονστρουκτιβιστικές ή κατασκευασιοκρατικές και στην ελληνική ως εποικοδομιστικές.

Η έκθεση των βασικών θέσεων των θεωρήσεων αυτών είναι αδύνατη στα πλαίσια του παρόντος κειμένου, εξαιτίας της ποικιλίας και των ιδιαίτερα λεπτών σε πολλές περιπτώσεις διαφορών τους, οι οποίες προέρχονται από διαφορετικές και ενίοτε αντιθετικές φιλοσοφικές ή επιστημολογικές παραδοχές. Σε γενικές όμως γραμμές, οι θεωρήσεις αυτές, με παραλλαγές ως προς τον ατομικό ή κοινωνικό χαρακτήρα της μάθησης και το ρόλο αντίστοιχα συναφών παραγόντων (δες ενδεικτικά, Rogoff, 1990, Steffe & Cobb1988, von Glasersfeld, 1995), αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως μια ενεργητική διαδικασία κατασκευής εννοιών και απόδοσης νοημάτων, η οποία χαρακτηρίζεται από την προσαρμογή του ατόμου στον κόσμο των εμπειριών του, η ερμηνεία των οποίων αποτελεί και τη μοναδική υπάρχουσα πραγματικότητα. Η γνώση είναι επομένως μια ατομική και ταυτόχρονα κοινωνική κατασκευή, διαψεύσιμη και σε καμία περίπτωση απόλυτη. Το περιεχόμενο και οι πρακτικές των σχολικών μαθηματικών επιλέγονται και δομούνται για τις θεωρήσεις αυτές γύρω από κατάλληλες δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, μέσα από τις οποίες παρέχονται ευκαιρίες κατασκευής μαθηματικών εννοιών και απόδοσης μαθηματικών νοημάτων στις αντίστοιχες εμπειρίες. Στα πλαίσια των δραστηριοτήτων αυτών, η διατύπωση και διερεύνηση υποθέσεων, η ανάπτυξη συλλογισμών, η επιχειρηματολογία και ο διάλογος αποτελούν πρωταρχικές μορφές διαπραγμάτευσης και απόδοσης νοημάτων στις ατομικές εμπειρίες, άρα θεμελιώδεις μηχανισμοί κατασκευής της μαθηματικής γνώσης.

Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Μαθηματικών (2001) αποτυπώνει χαρακτηριστικά τις δύο εκδοχές, που σκιαγραφήθηκαν προηγούμενα και απεικονίζει την αντιφατικότητα του μεταβατικού παρόντος για τα σχολικά μαθηματικά. Με αναφορά στο ίδιο περιεχόμενο, εκθέτει ως «μεθοδολογικές προσεγγίσεις κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών» τις δύο εκδοχές προτείνοντας τελικά στους εκπαιδευτικούς τη σύνθεση τους με το σκεπτικό ότι «τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη προσέγγιση είναι από μόνες τους ατελείς. Η πρώτη είναι αρκετά περιοριστική στη διατύπωση των στόχων ενώ στη δεύτερη, η δραστηριότητα από μόνη της δεν αντανακλά τον πλούτο της μαθησιακής εμπειρίας» (σ. 247).

Τέλος ...

Η θέση και ο ρόλος της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά αποτελούν σήμερα αντικείμενο μιας συζήτησης σε εξέλιξη, στοιχεία της οποίας αξιοποιούνται, άμεσα ή έμμεσα, για την υποστήριξη επιλογών, οι οποίες διαμορφώνουν καθοριστικά το περιεχόμενο και τις πρακτικές της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, σε πολλές χώρες του κόσμου και σε κάποιο βαθμό στην Ελλάδα.

Συμπερασματικά των όσων εκτέθηκαν προηγούμενα, τα ακόλουθα τρία ζητήματα, ενδεχομένως μεταξύ άλλων, θα πρέπει, κατά τη γνώμη μου, να περιλαμβάνονται στις ορίζουσες του πλαισίου αυτής της συζήτησης:

1. Η υπεράσπιση του επιστημονικού χαρακτήρα της μαθηματικής πρακτικής, συστατικό στοιχείο της οποίας αποτελεί η απόδειξη, ως μέσο παραγωγής και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, από την οπτική και με τους όρους της ανάλυσης που εκθέτει ο Α. Μπαλτάς στον παρόντα τόμο.
2. Η ανάδειξη των πολλαπλών ρόλων της απόδειξης στην πρακτική της δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης. Κατά συνέπεια η ανάδειξη της αναγκαιότητας συμπερίληψης όλων των όψεων της αποδεικτικής διαδικασίας στο περιεχόμενο και στις πρακτικές των σχολικών μαθηματικών.

   Υπερβαίνοντας τον περιοριστικό ρόλο του αποκλειστικού μέσου επικύρωσης της μαθηματικής αλήθειας, που απέδωσαν στην απόδειξη οι απολυτοκρατικές θεωρήσεις της μαθηματικής γνώσης, θα πρέπει να αναδειχθούν στα σχολικά μαθηματικά και οι ακόλουθες όψεις της μαθηματικής απόδειξης, οι οποίες επίσης αποτελούν ουσιαστικά στοιχεία της επιστημονικής πρακτικής των μαθηματικών (de Villiers 1990):

   - Η απόδειξη ως μέσο εξήγησης των λόγων για τους οποίους αποδεχόμαστε την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο.
   - Η απόδειξη ως μέσο συστηματοποίησης μιας σειράς μαθηματικών δεδομένων με την οργάνωση τους σε ένα ενιαίο σύστημα αλληλένδετων παραδοχών, ορισμών και συμπερασμάτων.
   - Η απόδειξη ως μέσο επινόησης ή δημιουργίας νέων μαθηματικών δεδομένων, τα οποία προκύπτουν ως λογική αναγκαιότητα από την ανάλυση και τη διερεύνηση ήδη γνωστών μαθηματικών προτάσεων.
   - Η απόδειξη ως μέσο συνοπτικής και συνεκτικής παρουσίασης και δημοσιοποίησης της μαθηματικής γνώσης.
   - Η απόδειξη ως μέσο συγκρότησης μιας εμπειρικής θεωρίας μέσα από τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών.
   - Η απόδειξη ως μέσο διερεύνησης του νοήματος ενός ορισμού ή των λογικών συνεπειών μιας παραδοχής.

- Η απόδειξη ως μέσο μιας νέας ερμηνείας ενός ήδη γνωστού μαθηματικού συμπεράσματος ενταγμένου σε ένα νέο διαφορετικό πλαίσιο.

3. Η ανάδειξη του σημαντικού ρόλου του επιχειρήματος στην πρακτική της δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, με τους όρους βέβαια που συμπεριλαμβάνονται στη ανάλυση του Γ. Φουρτούνη στον παρόντα τόμο. Κατά συνέπεια η αποδοχή της αναγκαιότητας εισαγωγής του επιχειρήματος, τόσο με την παραγωγική όσο και με την ρητορική του έννοια, στις πρακτικές των σχολικών μαθηματικών. Η απόδειξη, στην οπτική αυτή, αντιμετωπίζεται ως μια κατηγορία επιχειρήματος, ως μια δηλαδή λογικά συνεκτική αλληλουχία δηλώσεων, με προκείμενες τις παραδοχές ενός συγκεκριμένου μαθηματικού συστήματος, η οποία στο πλαίσιο του συστήματος αυτού επιτελεί έναν ή περισσότερους από τους ρόλους που προαναφέρθηκαν.

Τέλος, οποιαδήποτε συζήτηση για τη θέση και το ρόλο του επιχειρήματος και της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά, δεν μπορεί να παραβλέπει το γεγονός ότι τα σχολικά μαθηματικά, όπως έχει υπογραμμιστεί, εκτός από φορέας στοιχείων της μαθηματικής γνώσης είναι και φορέας κανόνων και πρακτικών κατάλληλης χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης και των αντικειμένων της, που στοχεύουν στη συγκρότηση μιας ειδικής σχέσης των παιδιών με τα μαθηματικά.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Appel, K. & Haken W (1989). Every Planar Map is Four Colorable, *Contemporary Mathematics*, vol. 98, AMS, Providence.

Babai, L. (1994). Probably True Theorems, Cry Wolf? *Notices of the American Mathematical Society*, 41(5), 453-454.

Davis, P. J. and Hersh, R.: 1980, *The Mathematical Experience*, Birkhauser, Boston, Ελληνική έκδοση: *Η μαθηματική Εμπειρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

de Villiers, M.: 1990, 'The role and function of proof in mathematics', *Pythagoras* 24, 17–24.

Ernst, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education*, Falmer Pess, London.

Ernest, P. (1998), *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematic*s, SUNY Press, Albany, New York.

Hanna, G. (2000), Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5-23.

Horgan, J. (1993). The Death of Proof., *Scientific American*, 269(4), 93-103

Jaffe, A. & Quinn, F. (1993). Theoretical Mathematics : Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29(1), 1-13.

Kitcher, P. (1984), *The Nature of Mathematicsl Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.

Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge Univerity Press, Cambridge.
Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), *Αποδείξεις και Ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.

Latour, B.: 1987, *Science in Actio*n, Harvard University Press, Cambridge, MA.

OECD (2000) *Measuring Student Knowledge and Skills: The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*, OECD, Paris.

Piaget, J.(1967), *The Psychology of Intelligence*, Routledge and Kegan Paul, London (ελληνική έκδοση: *Η Ψυχολογία της Νοημοσύνης*, Καστανιώτης, Αθήνα , 1986)

Restivo, S.: 1992, *Mathematics in Society and Histor*y, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

Rogoff, B. (1990) *Apprenticeship in Thinking: cognitive development in a social context*, Oxford University Press, New York.

Roulet, G. (1992), The Philosophy of Mathematics Education: “What does this mean for the children in the classromm?”, *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, no. 6, 8-9.

Steffe, L. & Cobb, P. (1988), *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies,* Springer-Verlag, New York.

Thurston, W. P. (1994). On Proof and Progress in Mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Tymoczo, T. (ed.), (1986), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.

van Bendegem J. P. (2003), Η δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών, *στον παρόντα τόμο.*

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* The Falmer Press, Washington, D. C.

Wilder, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon, Oxford.

Wittgenstein, L. (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.

Θωμαΐδης, Γ. (1991), Οι συντεταγμένες της σχολικής γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990), *Σύγχρονη Εκπαίδευση,* 61, 27-38.

Κολέζα, Ε. Γ., Μακρής, Κ. Ν. & Σούρλας, Κ.Β. (1993), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών,* Gutenberg, Αθήνα.

Μπαλτάς Α. (2003), Το επιστημονικό καθεστώς των μαθηματικών ή συνιστούν τα μαθηματικά «επιστημονική ήπειρο»; *στον παρόντα τόμο.*

Τουμάσης, Χ. (1987), Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης τα τελευταία 200 χρόνια, *Ευκλείδης Γ'*, ΕΜΕ, 17-60.

ΥΠΕΠΘ, *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Μαθηματικών*, ΦΕΚ 1366/Β/18-10- 2001.

Φουρτούνης Γ. (2003), Για τη διπλή σημασία της *παραγωγής*: η αποδεικτική επιστήμη ως κοινωνική πρακτική, *στον παρόντα τόμο.*

Χασάπης Δ. (1996), Τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι ιδεολογικοί τους προσανατολισμοί, *Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία, Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Αθήνα, σελ. 113 - 123

Η δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών

Jean Paul Van Bendegem

Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών

Χωρίς καμία υπερβολή, υπάρχει ένας ολόκληρος κόσμος διαφορών ανάμεσα στην ανακάλυψη, όπως νοείται στις (φυσικές) επιστήμες και στην ανακάλυψη, όπως νοείται στα μαθηματικά. Η πρόταση αυτή προϋποθέτει μια πραγματοκρατική θεώρηση, έστω εν μέρει. Ακόμη και ο πιο μετριοπαθής πραγματοκρατιστής είναι πρόθυμος να μιλήσει για κάποια έννοια ανακάλυψης. Στα μαθηματικά όμως τα πράγματα είναι εντελώς διαφορετικά. Αν κάποιος τολμήσει να χρησιμοποιήσει τον όρο «ανακάλυψη», τότε αναγκαστικά υιοθετεί, κατά κάποιο τρόπο, μια πραγματοκρατική θεώρηση των μαθηματικών. Αυτή όμως η πραγματοκρατική θεώρηση έχει κάποιες ιδιομορφίες, αφού ο κόσμος των μαθηματικών μέσα στον οποίο ανακαλύπτονται τα μαθηματικά αντικείμενα και οι μαθηματικές οντότητες συμβαίνει να μην είναι ο υπαρκτός κόσμος. Επομένως, υπάρχει μία ισχυρή οντολογική παραδοχή ενδογενώς συνυφασμένη με τον όρο «ανακάλυψη». Δυστυχώς, αντικαθιστώντας τον όρο «ανακάλυψη» με μια ποιο ουδέτερη έκφραση, όπως είναι η έκφραση «δημιουργική ανάπτυξη» (και όχι με τον όρο «κατασκευή», για προφανείς λόγους) δεν επιλύεται πραγματικά (ή δεν παρακάμπτεται) το ουσιαστικό πρόβλημα, το οποίο είναι το ακόλουθο. Θα ήταν ευχάριστο εάν μπορούσε να υποστηριχτεί, άλλά δεν μπορεί, ότι μια συγκεκριμένη φιλοσοφική θέση για τα θεμέλια των μαθηματικών δεν επηρεάζει την περιγραφή της μαθηματικής δραστηριότητας, το τι και το γιατί της μαθηματικής δραστηριότητας.

Παρόλα αυτά πιστεύω ότι είναι δυνατόν να υιοθετήσουμε ως αφετηρία μια ελάχιστη παραδοχή.

Θα θεωρήσω λοιπόν δεδομένη στο παρόν κείμενο, ως φιλοσοφικό πλαίσιο, μια μορφή «ήπιας» κατασκευασιοκρατίας, δηλαδή τη θέση ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και οι μαθηματικές οντότητες, συμπεριλαμβανομένων των αποδείξεων, είναι ανθρώπινα προϊόντα και θα πρέπει, κατ' αρχήν, να αναλύονται ως τέτοια. Θεωρώ αυτή τη θέση ως ελάχιστη παραδοχή, γιατί δεν αποκλείει μορφές πλατωνισμού ή άλλες ισχυρές οντολογικές παραδοχές για τα μαθηματικά αντικείμενα.

Η δομή αυτής της εισήγησης είναι πολύ απλή. Αρχίζει από το ποιο γενικό επίπεδο – τη μαθηματική κοινότητα ως σύνολο – και προχωράει στο επίπεδο του εργαζόμενου μαθηματικού, ο οποίος (μεταξύ άλλων) επιχειρεί να βρει μια συγκεκριμένη απόδειξη για ένα συγκεκριμένο θεώρημα. Στον επίλογο θίγονται με συντομία φιλοσοφικά ζητήματα που τέθηκαν αρχικά.

Έχουμε επαναστάσεις στα μαθηματικά;

Υπάρχει ένα εγγενές πρόβλημα στις προσπάθειες να περιγραφεί η ανάπτυξη των μαθηματικών στο μακρο-επίπεδο. Σε πλήρη αντίθεση με αυτό που συμβαίνει στη φιλοσοφία της επιστήμης, κάποιος δεν μπορεί παρά να παρατηρήσει ότι στη φιλοσοφία των μαθηματικών δεν υπάρχει σχεδόν καμία συμφωνία απόψεων. Συχνά το βιβλίο του Michael Crowe «Δέκα νόμοι που διέπουν τους τύπους των αλλαγών στην ιστορία των μαθηματικών» θεωρείται αφετηρία συζήτησης για τις επαναστάσεις στα μαθηματικά.

Ως έκπληξη ο 10ος και τελευταίος «νόμος» αναφέρει: «Επαναστάσεις ποτέ δεν εκδηλώνονται στα μαθηματικά». Το βασικό του επιχείρημα είναι ότι «ένα αναγκαίο χαρακτηριστικό μιας επανάστασης είναι ότι κάποια προϋπάρχουσα οντότητα πρέπει να ανατραπεί και να απορριφθεί αμετάκλητα» (Crowe, 1992: 19).

Την ίδια στιγμή, όμως, ο Joseph Dauben είναι ένας σταθερός υπερασπιστής της ύπαρξης επαναστάσεων στα μαθηματικά (βλ, e.g., Dauben, 1992: κεφ. 4 και 5): «Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και της τελικής δημιουργίας των άρρητων αριθμών, οι φανταστικοί αριθμοί, ο διαφορικός λογισμός, η μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί, τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων, ακόμα και το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel, είναι όλα επαναστατικά – όλα αυτά άλλαξαν το περιεχόμενο των μαθηματικών και τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται τα μαθηματικά. Καθένα από αυτά δεν έχει απλά προσθέσει στα μαθηματικά- έχει μετασχηματίσει τα μαθηματικά. Σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις τα παλιά μαθηματικά δεν είναι πια αυτό που φαίνονταν να είναι στο παρελθόν και ίσως να μην παρουσιάζουν και πολύ ενδιαφέρον πια, συγκρινόμενα με τις νέες και επαναστατικές ιδέες που τα υποσκέλισαν (Dauben, 1992: 64).

Οι ίδιοι οι φιλόσοφοι της επιστήμης – όπως ο Thomas Kuhn, για να αναφέρουμε τον πιο γνωστό - όταν μιλούν για τα μαθηματικά, κύριο στόχο έχουν να ξεκαθαρίσουν ότι οι φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά δεν πρέπει να συγχέονται (βλ, e.g., Kuhn, 1977). Έτσι πολύ συχνά καταλήγουν στην υπεράσπιση του μη-επαναστατικού χαρακτήρα των μαθηματικών.

Για να κάνω τα πράγματα ακόμη πιο σύνθετα, όπως είπα στην αρχή, τα οντολογικά προβλήματα είναι αναπόφευκτα. Να δώσω μόνο ένα παράδειγμα: για τον Crowe, ένα είδος «επανάστασης» παραμένει δυνατή, συγκεκριμένα «επαναστάσεις μπορούν να εμφανιστούν στην μαθηματική ονοματολογία, στο συμβολισμό, στα μεταμαθηματικά (δηλαδή στη μεταφυσική των μαθηματικών), στην μεθοδολογία (δηλαδή στα πρότυπα αυστηρότητας) και ίσως ακόμη στην ιστοριογραφία των μαθηματικών» (Crowe, 1992:19). Με άλλα λόγια, σε ότι αφορά το περιεχόμενο των μαθηματικών δεν υπάρχουν επαναστάσεις, αλλά σε οτιδήποτε άλλο εκτός του περιεχομένου, μπορούμε να έχουμε όσες επαναστάσεις θέλουμε. Δεν θα διερευνήσω αυτό το ενδιαφέρον θέμα σ΄ αυτή την εισήγηση, αλλά θα εστιάσω στα κοινά στοιχεία τα οποία όλοι αυτοί οι συγγραφείς φαίνεται να υιοθετούν, συγκεκριμένα στο γεγονός ότι τα μαθηματικά έχουν πράγματι μιας ευρείας έκτασης δομή.

Η ευρείας έκτασης δομή των μαθηματικών (αν υπάρχει)

Η τελευταία πρόταση δεν απέχει πολύ από την ταυτολογία. Γιατί πιο θα ήταν το νόημα της δήλωσης ότι τα μαθηματικά δεν έχουν μία ευρείας έκτασης δομή; Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό που με ενδιαφέρει – και θεωρώ δεδομένο ότι οι συγγραφείς που προαναφέρθηκαν συμμερίζονται αυτό το ενδιαφέρον, ανεξάρτητα από την οπτική τους – είναι ότι αυτή η ευρείας έκτασης δομή «επηρεάζει» την καθημερινή δουλειά των μαθηματικών επιβάλλοντας περιορισμούς στο είδος των (συγκεκριμένων) μαθηματικών με τα οποία ασχολούνται. Παραδείγματα τέτοιων περιορισμών είναι:

(α) Ποια είναι τα θέματα των ερευνών τους και τα ερευνητικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνται;

(β) Με ποιο τρόπο συστηματοποιούν τα αποτελέσματα των ερευνών τους;

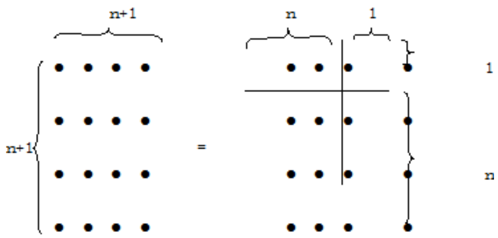
(γ) Ποιοι είναι οι γενικοί σκοποί μιας συγκεκριμένης περιοχής των μαθηματικών;

(δ) Τι θεωρείται μαθηματική απόδειξη; Ποια είναι, ας πούμε, τα πρότυπα αυστηρότητας για τη μαθηματική απόδειξη;

(ε) Πως αφηγείται κανείς την ιστορία των μαθηματικών (ή ενός κλάδου τους);

Από αυτή την οπτική, είναι δυνατόν να διακριθεί η ανάπτυξη των μαθηματικών σε μεγάλες περιόδους. Ένα καλό παράδειγμα μιας τέτοιας προσπάθειας αποτελεί η δουλειά του Teun Koetsier. Επιτρέψτε μου να παρουσιάσω συνοπτικά την προσέγγισή του. Αν και διακρίνει τρία επίπεδα – το μικρο-επίπεδο, όπου οι μαθηματικοί αφιερώνουν το χρόνο τους στην απόδειξη θεωρημάτων, το μεσαίο επίπεδο, όπου διαμορφώνονται τα ερευνητικά προγράμματα και το μακρο-επίπεδο, όπου διακρίνονται συγκεκριμένοι περίοδοι ανάπτυξης των μαθηματικών- θα περιορισθώ μόνο στο μακρο-επίπεδο. Ο Koetsier επηρεασμένος από τον Imre Lakatos, χωρίς να είναι τυφλός οπαδός του, μιλάει για *ερευνητικές παραδόσεις*. «Μια ερευνητική παράδοση στα μαθηματικά είναι μια ομαδική ερευνητική δραστηριότητα, ιστορικά εντοπισμένη (σε μια συγκεκριμένη περίοδο), η οποία χαρακτηρίζεται από κοινές γενικές παραδοχές (με τη μορφή π.χ. ορισμών και αξιωμάτων) για τις οντότητες που αποτελούν αντικείμενο της έρευνας σε ένα συγκεκριμένο, θεμελιώδη, τομέα των μαθηματικών και περιλαμβάνει παραδοχές για τις κατάλληλες μεθόδους απόδειξης των ιδιοτήτων αυτών των οντοτήτων» (Koetsier, 1991: 151).

Ένα παράδειγμα είναι χρήσιμο για την αποσαφήνιση της προσέγγισης του. Στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, ο Koetsier διακρίνει δύο παραδόσεις τις οποίες αποκαλεί *Παράδοση Επίδειξης* (*Demonstrative Tradition)* και *Ευκλείδεια Παράδοση (Euclidian Tradition),* σε χρονολογική σειρά. Μια κύρια διαφορά ανάμεσα στις δύο παραδόσεις είναι ότι η Ευκλείδεια Παράδοση εισάγει την έννοια της απόδειξης, ως πρότυπο μεθόδου για την καθιέρωση μαθηματικών αληθειών. Ο Koetsier ισχυρίζεται ότι η μέθοδος απόδειξης που υιοθετούσε η Παράδοση της Επίδειξης ήταν μη-παραγωγική. Είχε ως βάση της μία μορφή 'Anschauung'. Το καλύτερο παράδειγμα αυτής της μεθόδου αποτελεί η «απόδειξη» του $(n+1)^2 = n^2 + 2.n + 1$, με την Πυθαγόρεια λογική. Για να δειχθεί ότι $4^2 = (3 + 1)^2 = 3^2 + 2.3 + 1$, αρκεί η παρατήρηση των εξής δύο σχημάτων:



Όμως, εάν αυτό γίνει αποδεκτό ως μία πειστική μέθοδος, πρέπει να αποδεχθούμε ότι μια συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να «θεωρηθεί» ως η κάθε περίπτωση. Δηλαδή, υποθέτω ότι όχι μόνο κατανοώ αυτό το σχήμα (ή μάλλον το νόημα του) αλλά και κάθε άλλη παρόμοια περίπτωση. Με δεδομένο ότι μπορεί να αποδοθεί μία έννοια στην «οπτική απόδειξη» (proof by looking)[1], τότε είναι προφανές ότι η μετάβαση από την Παράδοση Επίδειξης στην Ευκλείδεια Παράδοση αποτελεί ένα μεγάλο άλμα. Είναι επίσης προφανές ότι αποτελεί και ένα άλμα προόδου.

Όπως είναι αναμενόμενο, με την εικόνα που προβάλλει ο Teun Koetsier δεν συμφωνεί ούτε κάθε φιλόσοφος ούτε κάθε ιστορικός των μαθηματικών. Αναφέρω την εργασία του Eduard Glas (ειδικά, 1991a και 1991b) στην οποία περιλαμβάνεται μια κριτική της άποψης του Koetsier. Βέβαια, ούτε η άποψη του Koetsier ούτε η άποψη του Glas

[1] Η έκφραση «οπτική απόδειξη» (proof by looking) εισάγεται από τον David Wells, 1991 και αντιγράφω: "Πολλές απλές αριθμητικές προτάσεις μπορεί να αποδειχθούν "με μία ματιά" (at sight) εξετάζοντας ένα κατάλληλο σχήμα " (198). Εάν ο Koetsier έχει δίκιο (δες 1991: 188-190), τότε πρέπει από την προηγούμενη διατύπωση να απαλειφθεί ο περιορισμός «απλές» αφού ισχυρίζεται ότι, σύμφωνα με τον Oskar Becker, υπάρχει μια οπτική απόδειξη της αριθμητικής πρότασης: κάθε αριθμός της μορφής $2^n.(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$ όπου $p = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ είναι πρώτος, είναι ένας τέλειος αριθμός (ΣτΜ. τέλειος είναι ένας αριθμός που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, π.χ. 6=3+2+1)

είναι οι μοναδικές στο θέμα αυτό. Μια προσέγγιση στο ίδιο θέμα του Philip Kitcher (1983) είναι εντελώς διαφορετική και επιπλέον δεν εντάσσεται άμεσα στο ευρύτερο πεδίο της εξελικτικής ή/και φυσιοκρατικής επιστημολογίας, για να αναφέρω μια από τις πολλές επιστημολογικές προσεγγίσεις (σύγκρινε για παράδειγμα εκείνη του Rav, 1993).

Ίσως όμως, όλες αυτές οι απόψεις είναι ουσιαστικά λανθασμένες, ως προσανατολισμένες σε λάθος κατεύθυνση. Εάν κάποιος μιλάει για δομές, δεν θα έπρεπε ως εκ τούτου να παίρνει την ιδέα των δομών στα σοβαρά; Με άλλα λόγια, μια δομιστική προσέγγιση είναι αναγκαία για μια τέτοια περιγραφή. Πιο συγκεκριμένα το πρόγραμμα των Bourbaki θα μπορούσε να ειδωθεί ως μια τέτοια πρόταση και το αν είναι ιδεαλιστικό ή ρεαλιστικό είναι ένα ζήτημα για παραπέρα συζήτηση (δες, π.χ. Corry, 1992). Ενδεχομένως με βάση μια άποψη σαν αυτή που υποστηρίζεται από τον Roman Duda (Duda, 1997), δηλαδή με όρους αντιθέσεων και πολώσεων: ρεαλισμός- ιδεαλισμός, πεπερασμένο-άπειρο, διακριτό- συνεχές, προσεγγιστικό-ακριβές, βεβαιότητα-πιθανότητα, απλότητα – συνθετότητα, μονάδα – πολλαπλότητα.

Ολοκληρώνοντας αλλά και περιπλέκοντας το ζήτημα, δεν έχω πει τίποτα - και δεν προτίθεμαι να το κάνω σε αυτή την εισήγηση- για τις πολλαπλές σχέσεις ανάμεσα, γενικά μιλώντας, στα μαθηματικά και την κοινωνία και ανάμεσα μιλώντας ειδικότερα, στα μαθηματικά και τα ζητήματα του φύλου, για παράδειγμα. Ότι έχει λεχθεί μέχρι τώρα αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως ένα αυτόνομο τμήμα του κοινωνικού, το οποίο «υπακούει» μόνο στους εσωτερικούς του «νόμους», εάν τέτοιοι νόμοι υπάρχουν. Αλλά αυτό μπορεί να είναι μέρος της ιστορίας την οποία, όπως προανέφερα δεν προτίθεμαι να ολοκληρώσω εδώ (δες για περισσότερες λεπτομέρειες, Restivo 1983 and 1992). Παρόλα αυτά, στη συνέχεια θα θεωρήσω δεδομένο ότι ένα είδος ευρείας κλίμακας δομή των μαθηματικών έχει «οικοδομηθεί» και ότι ένας μαθηματικός λειτουργεί μέσα στο πλαίσιο της δομής αυτής.

Η μετάβαση από την ευρείας κλίμακας δομή των μαθηματικών στην μικροκλίματα της εκπαιδευτικής πρακτικής

Με δεδομένη την ευρείας κλίμακας δομή των μαθηματικών εγχειρημάτων, πως μεταφράζεται η δομή αυτή στη καθημερινή μαθηματική πρακτική; Δεν μπορούμε να δεχθούμε ότι κάθε μαθηματικός έχει μια πλήρη και ολοκληρωμένη θεώρηση των μαθηματικών. Είναι γενικά αποδεκτό ότι μετά τον Henri Poincaré και τον David Hilbert τους τελευταίους των «Γενικών Μαθηματικών», δεν υπάρχουν πια μαθηματικοί που να ασχολούνται με το αντικείμενο σφαιρικά. Επομένως πρέπει να υπάρχει ένα ενδιάμεσο επίπεδο. Ένας δυνατός τρόπος θεώρησης αυτού του επιπέδου σκιαγραφείται από τον Teun Koetsier. Σύμφωνα με το μοντέλο του σε αυτό το επίπεδο έχουμε τα ερευνητικά προγράμματα.

«Ένα ερευνητικό πρόγραμμα συγκροτείται από έναν αριθμό ερευνητικών σκοπών μαζί με ένα σύνολο υποδείξεων για την επίτευξη των σκοπών. Το πρόγραμμα περιλαμβάνει μια παραδειγματική λύση ενός προβλήματος η οποία εκθέτει το είδος των σκοπών και την αποτελεσματικότητα των υποδείξεων για την επίτευξη των σκοπών. Τα μεγάλα προγράμματα μπορούν κάλλιστα να συμπεριλαμβάνουν υποπρογράμματα» (Koetsier, 1991: 154).

Μέσα σε ένα ερευνητικό πρόγραμμα λειτουργεί αυτό που αποκαλεί μεθοδολογία μαθηματικών ερευνητικών παραδόσεων (*methodology of mathematical research traditions*). Η μεθοδολογία αυτή βασικά περιλαμβάνει δύο στοιχεία:

(α) «Ένα μαθηματικό ερευνητικό πρόγραμμα ή μια ερευνητική παράδοση αναπτύσσεται ευρετικά αν παράγει εικασίες (υποψήφια θεωρήματα) με σπουδαιότητα» (Koetsier, 1991: 159) και

(β) «Η προτίμηση μιας ορθολογικής μαθηματικής κοινότητας για ένα ερευνητικό πρόγραμμα ή μια ερευνητική παράδοση είναι ανάλογη με την αναμενόμενη ανάπτυξη της (ibidem).

Δεν είναι αναγκαίο να επαναλάβουμε το σχόλιο ότι το μοντέλο του Koetsier δεν είναι παρά ένας τρόπος θεώρησης των πραγμάτων. Χωρίς αμφιβολία διαφορετικά μοντέλα είναι δυνατά αλλά με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο πρέπει να περιλαμβάνουν μια έννοια παρόμοια με το ερευνητικό πρόγραμμα του Koetsier[2]. Σε τελευταία ανάλυση αυτό είναι

---

[2] Έτσι για ένα δομιστή οι τοπικές δομές μπορούν να ειδωθούν ως υπο-δομές της γενικότερης ευρείας κλίμακας δομής. Να σημειωθεί ότι ένα άλλο πρόβλημα που αγνοώ πλήρως είναι εάν η «κινητήρια δύναμη» των ερευνητικών προγραμμάτων ή των υπο-δομών πηγάζει από τα ίδια τα προγράμματα ή τις ίδιες τις δομές και αν όχι, από τους μεμονωμένους μαθηματικούς ή τις ομάδες των μαθηματικών. Όπως επίσης, αν η ιστορία δεν τελειώνει εκεί, εάν άλλοι μη μαθηματικοί, άτομα ή και ομάδες μετέχουν σε αυτή τη διαδικασία.

το επίπεδο στο οποίο ο επόπτης ενός ευφυούς και πολλά υποσχόμενου σπουδαστή των μαθηματικών αποφασίζει το θέμα με το οποίο αξίζει το κόπο να ασχοληθεί. Αυτό συνεπάγεται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο τη δυνατότητα αξιολόγησης των ενδεχόμενων αποτελεσμάτων και επιπτώσεων της έρευνας που θα αναληφθεί στην μαθηματική κοινότητα.

Μερικά παραδείγματα ερευνητικών προγραμμάτων

Υπάρχουν παραδείγματα πετυχημένων ερευνητικών προγραμμάτων στην «πραγματική» μαθηματική ζωή; Ευτυχώς και χωρίς συζήτηση η απάντηση είναι: ναι. Μερικά από αυτά είναι:

1. Το πρόγραμμα του Erlanger

Χωρίς αμφιβολία ένα από τα πιο διάσημα παραδείγματα είναι το πρόβλημα του *Erlanger,* οργανωμένο από τον Felix Klein. O Saunders MacLane μας δίνει μια συνοπτική και εύστοχη περιγραφή του προγράμματος αυτού:

«Στη γεωμετρία, ο Felix Klein πρότεινε ότι οι ποικιλίες του χώρου που παρέχονται από τις μη-Ευκλείδειες και άλλες γεωμετρίες μπορούν να ταξινομηθούν και να οργανωθούν με βάση τις ομάδες των συμμετριών τους, την πλήρως γραμμική ομάδα, την ορθογώνια ομάδα, την προβολική ομάδα και άλλες (MacLane, 1986: 407).

Συνέχεια του προγράμματος του *Erlanger*, σε πιο σύγχρονες εποχές είναι το αποκαλούμενο πρόγραμμα του *Langlands*. Βασικά η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν αναπαραστάσεις άπειρων διαστάσεων των ομάδων Lie, ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων στη θεωρία αριθμών. O Stephen Gelbart σε ένα εξόχως διαφωτιστικό κείμενο γράφει τα εξής:

«…Το πρόγραμμα του *Langlands* είναι μια σύνθεση αρκετών σπουδαίων θεμάτων της κλασσικής θεωρίας αριθμών. Είναι επίσης - και αυτό είναι πιο σημαντικό - ένα πρόγραμμα μελλοντικής έρευνας. Το πρόγραμμα αυτό ανεδείχθη γύρω στο 1967 με τη μορφή μιας σειράς εικασιών και επηρέασε ακολούθως τη τρέχουσα έρευνα στη θεωρία αριθμών, σχεδόν με τον ίδιο τρόπο που οι εικασίες του A. Weil διαμόρφωσαν την πορεία της αλγεβρικής γεωμετρίας από το 1948.» (Gelbart, 1984: 178).

Στο ίδιο κείμενο ο συγγραφέας υπογραμμίζει ότι «…περισσότερο από το μισό αυτής της επισκόπησης αφιερώνεται σε πολύ γνωστό υλικό, το οποίο όμως ίσως ποτέ στο παρελθόν δεν χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά ως μέσο για την εισαγωγή του προγράμματος Langlands» (Gelbart, 1984: 179).

2. Το πρόγραμμα του Hilbert

Εξίσου γνωστό στη μαθηματική κοινότητα είναι το γενικό ερευνητικό πρόγραμμα που διατυπώθηκε συνοπτικά από τον David Hilbert στην περίφημη ομιλία του στο Παρίσι, με την ευκαιρία του Διεθνούς Συνεδρίου των Μαθηματικών το 1900 με τον τίτλο 'Mathematische Probleme'. Ο Hilbert θέτει 23 προβλήματα τα οποία ουσιαστικά καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την μαθηματική δραστηριότητα στο πρώτο μισό αυτού του αιώνα. Μερικά από τα διάσημα αυτά προβλήματα είναι:

- *Πρόβλημα 1*: Η υπόθεση του συνεχούς του Cantor, δηλαδή η ερώτηση εάν υπάρχει σύνολο του οποίου η πληθικότητα να είναι μεγαλύτερη από την πληθικότητα του συνόλου των ακεραίων και μικρότερη από την πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

- *Πρόβλημα 2*: Η συνέπεια της αριθμητικής. Δεν χρειάζονται σχόλια.

- *Πρόβλημα 8*: Η υπόθεση του Riemann, δηλαδή με δεδομένη τη συνάρτηση $Z(s) = \Sigma\ 1/n^s$, όπου s είναι μιγαδικός αριθμός και n παίρνει τιμές από 1 έως άπειρο, να αποδειχθεί ότι οι μη τετριμμένες λύσεις της $Z(s) = 0$ έχουν το 1/2 ως πραγματικό μέρος.

- *Πρόβλημα 10*: Το Διοφαντικό πρόβλημα, δηλαδή να βρεθεί μια μέθοδος διαπίστωσης αν ένα σύνολο εξισώσεων με ακέραιους (ρητούς) συντελεστές, έχει ακέραιες (ρητές) λύσεις.

Για περισσότερες λεπτομέρειες, δες Alexandrov (1971) και Browder (1976).

3. Πεπερασμένες Απλές Ομάδες

Όπως αποδεικνύεται στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι ανάγκη ένα ερευνητικό πρόβλημα να έχει ως αφετηρία του εικασίες. Ένα πρόγραμμα μπορεί να αναπτύσσεται γύρω από ένα πρόβλημα το οποίο έχει ήδη λυθεί. Πρέπει να προσθέσω εδώ, ότι ελάχιστοι φιλόσοφοι των μαθηματικών παίρνουν υπόψη τους τέτοιες περιπτώσεις, τις οποίες θεωρώ εξαιρετικά σημαντικές. Η περίπτωση στην οποία αναφέρομαι είναι το θεώρημα της ταξινόμησης για τις Πεπερασμένες Απλές Ομάδες, γνωστό και ως *Τεράστιο Θεώρημα (Enormous Theorem).* Η υπάρχουσα απόδειξη, περίπου 15.000 σελίδων, αποτελείται από μια σειρά εργασιών, οι περισσότερες, όχι όμως όλες, δημοσιευμένες, γραμμένες από μία ετερογενή ομάδα μαθηματικών σε μία περίοδο 30 ετών, με διαφορετικούς τύπους γραφής και διαφορετικές μεθόδους απόδειξης. Μια τέτοια «απόδειξη» δύσκολα θα μπορούσε να ονομαστεί απόδειξη, όπως επισημαίνει ο Ronald Solomon:

«Η κατάσταση της αρχικής απόδειξης είναι τέτοια, ώστε εάν όλοι όσοι έχουν εργαστεί για αυτήν εξαφανιστούν θα είναι εξαιρετικά δύσκολο για τις μελλοντικές γενιές των μαθηματικών να ανακατασκευάσουν την απόδειξη αυτή από την βιβλιογραφία» (Cipra, 1996: 89).

Μέρος της εξήγησης είναι ότι οι απλές ομάδες ταξινομούνται σε τέσσερες κατηγορίες: κυκλικές (πρώτης τάξης), εναλλάσσουσες, τύπου Lie (διακρίνονται σε δεκαέξι οικογένειες) και σποραδικές. Οι πρώτες τρεις κατηγορίες περιλαμβάνουν έναν άπειρο αριθμό απλών ομάδων, κάθε μια με τα δικά της προβλήματα, τις μεθόδους και τις τεχνικές απόδειξης. Επιπλέον οι σποραδικές απλές ομάδες είναι πολύ παράξενες. Υπάρχουν ακριβώς είκοσι έξι και η μεγαλύτερη από τις ομάδες αυτές, γνωστή και ως *Τέρας (Monster*), έχει 10^{53} στοιχεία. Πρέπει να πούμε ότι σε πολλές περιπτώσεις σχεδιάστηκαν μέθοδοι απόδειξης για τη μία ή την άλλη συγκεκριμένη περίπτωση. Γίνεται επομένως ξεκάθαρο, ότι οι στόχοι αυτού του ερευνητικού προγράμματος είναι, ξεκινώντας από τους Daniel Gorenstein (πέθανε το 1992), Richard Lyons και Ronald Solomon:

(i) Να καταστήσουν ομοιόμορφες τις διαφορετικές μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιήθηκαν σε μια περίοδο τριάντα ετών. Η προσδοκία είναι ότι θα παραχθούν νέες ιδέες απόδειξης: «Τακτοποιώντας τα νήματα της αρχικής απόδειξης, οι Lyons και Solomon κατάφεραν ήδη να τις επεκτείνουν παραπέρα, αποδεικνύοντας κάποια από τα συστατικά θεωρήματα για σημαντικά γενικότερες περιπτώσεις. Αυτοί και άλλοι εργαζόμενοι στην απόδειξη της δεύτερης γενιάς βρήκαν νέες εφαρμογές των τεχνικών της αρχικής απόδειξης» (Cipra, 1996: 89).

(ii) Να μειώσουν την έκταση της απόδειξης σε περίπου 5.000 σελίδες ίσως και λιγότερες και να τη δημοσιεύσουν ως μια *ενιαία* απόδειξη. Αυτός είναι ένας μάλλον πρωτοφανής στόχος: προφανώς οι αποδείξεις δεν θεωρούνται αποδείξεις αλλά πρέπει να παρουσιαστούν ως τέτοιες.

(iii) Να απαλειφθούν όλα τα υπάρχοντα σφάλματα. Δεν χρειάζονται σχόλια.

Για λεπτομέρειες δες Gorenstein, 1986.

4. Θεωρία Πιθανοτήτων παλιά και νέα

Η θεωρία των πιθανοτήτων στην «παλιά» μορφή διατυπώθηκε με όρους των συναρτήσεων P, συνήθως από ένα σύνολο προτάσεων S, ορισμένων σε μια συγκεκριμένη γλώσσα L, στο διάστημα των πραγματικών [0,1], ικανοποιώντας ορισμένα αξιώματα, όπως

P(A ή όχι-A) = 1,

P(A και όχι-A) = 0,

P(A ή B) = P(A) + P(B) - P(A και B), κοκ.

Αυτή η προσέγγιση δεν είχε κανένα πρόβλημα στις διακριτές περιπτώσεις Στην περίπτωση του συνεχούς όμως είχε πολλά προβλήματα (εκτός και αν κάποια γεωμετρική ή άλλη πεπερασμένα εκφράσιμη ερμηνεία ήταν διαθέσιμη) να ορίσει πιθανότητες[3].

Ο A. N. Kolmogorov ήταν ο πρώτος το 1933 που είδε τη συνάφεια της θεωρίας πιθανοτήτων με τη θεωρία μέτρου και τον ολοκληρωτικό λογισμό. Αυτό οδήγησε σε μια επαναδιατύπωση της θεωρίας πιθανοτήτων τέτοια ώστε όλα τα αποτελέσματα της θεωρίας μέτρου να μπορούν να εκφραστούν ως πιθανότητες. Έτσι κάθε εγχειρίδιο σήμερα αρχίζει με τον ορισμό ενός χώρου πιθανοτήτων ως μιας τριάδας <S, F, P>, όπου:

(i) S είναι ένα σύνολο (στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται τίποτα περισσότερο, αλλά πολλές φορές αυτό το σύνολο αναφέρεται ως *δειγματοχώρος* [*sample space*]),

[3] Αυτές οι συγχύσεις και οι δυσκολίες είναι υπεύθυνες για τις πολλές, ποικίλες και διασκεδαστικές δημοσιεύσεις για τα παράδοξα της θεωρίας των πιθανοτήτων, δες π.χ. Northrop, 1978, ειδικά κεφάλαιο οκτώ.

(ii) F είναι το σύνολο των υποσυνόλων του S, που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες: (i) $F \neq \emptyset$, (ii) αν $A \in F$, τότε $S\backslash A \in F$, (iii) αν $A_i \in F$, για i = 1, 2, ..., n, ... τότε $\cup_i A_i \in F$. Με άλλα λόγια, F είναι μία σ-άλγεβρα, αν και με την ορολογία της θεωρίας πιθανοτήτων ονομάζεται χώρος γεγονότων (*event space)*,

(iii) P είναι ένα *μέτρο πιθανότητας* στο F, τέτοιο ώστε:

(*) $P(A) \geq 0$, για κάθε $A \in F$,

(**) $P(S) = 1$, και

(***) αν $A_i \in F$, για i = 1, 2, ..., n, ... και $A_i \cap A_j = \emptyset$, για $i \neq j$, τότε $P(\cup_i A_i) = \Sigma_i P(A_i)$.

Μεταξύ άλλων αυτή η νέα προσέγγιση επιτρέπει να μιλάμε για χαρακτηριστικές συναρτήσεις κατανομής [4], πέρα από τις ήδη γνωστές κλασσικές κατανομές την διακριτή και συνεχή.

5. Θεωρία κατηγοριών

Ένα πρόσφατο ερευνητικό πρόγραμμα είναι εκείνο που αναπτύσσεται με επίκεντρο τη θεωρία κατηγοριών. Σε κάποιο βαθμό το πρόγραμμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το *πρόγραμμα του Erlangen* για την θεωρία συνόλων, όπως με σαφήνεια διατυπώνεται από τον Saunders MacLane:

«Η κατάσταση μοιάζει με εκείνη της γεωμετρίας μετά την ανακάλυψη των αποδείξεων συνέπειας των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών, οι οποίες έδειξαν ότι δεν υπάρχει μία γεωμετρία αλλά πολλές. Αυτό σήμαινε ότι μπορούσαν να διατυπωθούν γεωμετρίες με πολλά διαφορετικά συστήματα αξιωμάτων, μερικά από τα οποία ήταν συναφή με την ανώτερη ανάλυση και μερικά με την φυσική. ... Παρομοίως, η αρχική ιδέα μιας συλλογής στοιχείων οδηγεί σε ουσιαστικά διαφορετικές εκδοχές της θεωρίας συνόλων, μερικές από τις οποίες ... έχουν συνάφεια με άλλους τομείς των μαθηματικών, αν και όχι ακόμα (;) με την φυσική» (MacLane, 1986: 385-386).

[4] Ένα παράδειγμα θα βοηθούσε. Η χαρακτηριστική συνάρτηση κατανομής είναι αναγκαία για την επίλυση του εξής προβλήματος: Στην k ρίψη ενός ιδανικού νομίσματος ένας παίκτης λαμβάνει 0 εάν είναι γράμματα και $(2/3)^k$ εάν είναι κεφάλι. Έστω X το συνολικό κέρδος του παίχτη μετά από άπειρες ρίψεις του νομίσματος. Η λύση του προβλήματος υπάρχει στο Grimmett & Welsh, 1994: 102-104.

Μια κατηγορία *C* αποτελείται από αντικείμενα A, B, C, … και βέλη f, g, h, … από αντικείμενα σε αντικείμενα, τα οποία πληρούν τις εξής συνθήκες:
(i) για κάθε ζεύγος βελών: αν $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow C$, τότε η $g \circ f: A \rightarrow C$ υπάρχει και καλείται σύνθεση των f και g,
(ii) για κάθε αντικείμενο A, υπάρχει μία συνάρτηση $1_A: A \rightarrow A$, το ταυτοτικό βέλος,
(iii) η σύνθεση είναι προσεταιριστική: για κάθε βέλος f, g, και h, αν η σύνθεση είναι ορισμένη, τότε $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
(iv) για κάθε βέλος $f: A \rightarrow B$, ισχύει ότι $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Η ισχύς της θεωρίας κατηγοριών είναι πραγματικά εντυπωσιακή. Οποιαδήποτε θεώρημα αποδειχθεί για τις κατηγορίες ισχύει τουλάχιστον για τις εξής περιπτώσεις (δες MacLane, 1986: 387):
(i) Την κατηγορία όπου τα αντικείμενα είναι σύνολα και τα βέλη είναι συναρτήσεις από σύνολα σε σύνολα,
(ii) Την κατηγορία όπου τα αντικείμενα είναι ομάδες και τα βέλη είναι ομοιομορφισμοί ανάμεσα σε ομάδες,
(iii) Την κατηγορία όπου τα αντικείμενα είναι διανυσματικοί χώροι και τα βέλη είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί,
(iv) Την κατηγορία όπου τα αντικείμενα είναι τοπολογικοί χώροι και τα βέλη είναι συνεχείς απεικονίσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μαζί με τις έννοιες της θεωρίας κατηγοριών εισήχθη ένας νέος τρόπος απόδειξης προτάσεων βασισμένος σε διαγράμματα, αποκαλούμενος μερικές φορές *ιχνηλασία διαγραμμάτων (diagram chasing).* Είναι απολύτως τυπικό για ένα εγχειρίδιο θεωρίας κατηγοριών να είναι γεμάτο με διαγράμματα, όπως το ακόλουθο:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "j"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Κοιτώντας το διάγραμμα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μετάβαση από την πάνω αριστερή στην κάτω δεξιά γωνία μπορεί να γίνει ακολουθώντας δύο διαδρομές, άρα $h \circ f = j \circ g$.

Αν, με τους όρους του μοντέλου του Koetsier, μπορούμε να μιλάμε για μια ερευνητική παράδοση ή για ένα ερευνητικό πρόγραμμα είναι μια δύσκολη απόφαση τόσο για τους μαθηματικούς όσο και για τους φιλοσόφους. Για μια σχετική συζήτηση, δες Bell, 1994.

Αυτή η σύντομη επισκόπηση των ερευνητικών προγραμμάτων δεν έχει καμία αξίωση πληρότητας. Επαρκεί μια ανάγνωση, π.χ. του Dieudonné, 1987, ειδικά του κεφαλαίου V ('Nouveaux objets et nouvelles méthodes'), για ένα πλήθος παραδειγμάτων.

Η σπουδαιότητα των μεθόδων απόδειξης

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις παρουσιάστηκαν κυρίως, αν και όχι αποκλειστικά, με βάση τα προβλήματα που επιδίωξαν να λύσουν. Θα μπορούσαμε όμως εξίσου να δούμε αυτά τα παραδείγματα από την οπτική των (νέων) μεθόδων απόδειξης. Πολύ συχνά, το επίκεντρο ενός μαθηματικού προγράμματος είναι πρώτιστα οι μέθοδοι απόδειξης και δευτερευόντως τα προβλήματα ή οι εικασίες. Να σημειωθεί επιπλέον ότι οι μέθοδοι είναι νέες για την υπό συζήτηση περιοχή. Πολύ συχνά αυτές οι μέθοδοι εφαρμόζονταν ήδη σε μια άλλη περιοχή των μαθηματικών, αλλά δεν υπήρχε η μεταφορά τους στην υπό συζήτηση περιοχή (όπως συνέβη π.χ. με το ερευνητικό πρόγραμμα της θεωρίας πιθανοτήτων). Στην ιστορία των μαθηματικών υπάρχει ένα πλήθος τέτοιων περιπτώσεων:

1. Μερικά ιστορικά παραδείγματα μεθόδων απόδειξης

(i) Χωρίς αμφιβολία η πιο διάσημη περίπτωση είναι η εισαγωγή στα Ελληνικά μαθηματικά της απόδειξης με *απαγωγή στο άτοπο* (*by reductio)*. Μπορεί να διατυπωθούν ερωτηματικά για τη φιλοσοφική σπουδαιότητα και τις οντολογικές – επιστημολογικές επιπτώσεις αυτής της μεθόδου, αλλά όλοι συμφωνούν ότι σηματοδοτεί ένα νέο τρόπο θεώρησης και εργασίας των μαθηματικών.

(ii) Εξίσου διάσημη είναι η μέθοδος απόδειξης της *άπειρης εξάντλησης* (*infinite descent)*, που αναπτύχθηκε από τον Pierre de Fermat για την απόδειξη της μη ύπαρξης λύσεων των Διοφαντικών εξισώσεων. Η βασική ιδέα είναι να αποδειχθεί, ότι αν υπάρχει μία (ακέραια) λύση, τότε πρέπει να υπάρχει και μία άλλη ακέραια λύση η οποία είναι απόλυτα μικρότερη, καταφανώς οδηγώντας σε αντίφαση.

Με όρους μεταφοράς από ένα τομέα των μαθηματικών σε έναν άλλο και κατά συνέπεια εισαγωγής αποδεικτικών μεθόδων από ένα τομέα σε άλλον οι δύο πιο διάσημες περιπτώσεις είναι:

(iii) Η *επαναδιατύπωση της γεωμετρίας με αλγεβρικούς όρους,* η οποία οδήγησε σε μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση της γεωμετρίας. Είτε αυτή η ανάπτυξη αποδοθεί στον Descartes είτε όχι, πρόκειται αναμφίβολα για μία περίπτωση όπου μέθοδοι απόδειξης από την άλγεβρα μπορούσαν τώρα να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην απλούστερη περίπτωση, είναι αρκετό να σκεφτούμε την ταξινόμηση των καμπυλών με αλγεβρικούς όρους. Ας δούμε για παράδειγμα την ταξινόμηση των καμπυλών δευτέρου βαθμού.

Από το ένα μέρος, μιλώντας γεωμετρικά, υπάρχει το πολύ γνωστό σχήμα του κώνου που τέμνεται από ένα επίπεδο υπό διαφορετικές γωνίες (αποδίδεται στον Απολλώνιο) και από το άλλο μέρος,υπάρχει η ταξινόμηση των καμπυλών της μορφής $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + dy + e = 0$ με βάση τις ορίζουσες και τα λοιπά.

(iv) Η *αυστηροποίηση των μαθηματικών* κατά τον 19ο αιώνα, ειδικά του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, η οποία κατέστησε δυνατή την επαναδιατύπωση ερωτήσεων για τις παραγώγους και τα ολοκληρώματα με πιο αφηρημένους όρους και επέτρεψε την ανάπτυξη μεθόδων απόδειξης που υπερέβαιναν εκείνες της γεωμετρίας. Ουσιαστικά η περίπτωση αυτή είναι εντελώς όμοια με εκείνη της θεωρίας πιθανοτήτων που προαναφέρθηκε.

Για τις περιπτώσεις (iii) και (iv), δες στο Grattan-Guinness, 1997 για περισσότερες λεπτομέρειες και βιβλιογραφικές αναφορές.

2. Μερικά παραδείγματα μεθόδων απόδειξης στις μέρες μας

Ίσως κάποιος ισχυριστεί ότι τουλάχιστον σήμερα έχουμε τελικά ένα μοναδικό σύνολο προτύπων απόδειξης, αλλά αυτό αναμφίβολα δεν ισχύει. Στο εσωτερικό της μαθηματικής κοινότητας αναπτύσσονται σοβαρές συζητήσεις για τα εξής προβλήματα (για μια γενική συζήτηση, δες Hersh, 1997: μέρος πρώτο, κεφάλαιο 4):

(i) Μια απόδειξη που περιλαμβάνει τη χρήση υπολογιστών μπορεί να θεωρείται απόδειξη; Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση από την οποία ξεκίνησε η όλη συζήτηση ήταν το θεώρημα (ή η εικασία;) των τεσσάρων χρωμάτων. Καθώς μέρος της απόδειξης αποτελείται από ένα πρόγραμμα υπολογιστή[5], για ένα αριθμό μαθηματικών δεν αξίζει να λέγεται απόδειξη. Δες Tymoczko, 1986 για περισσότερες λεπτομέρειες.

(ii) Ποια είναι η αξία των πιθανοθεωρητικών αποδείξεων; Μπορεί να θεωρούνται αποδείξεις; Η απάντηση στην τελευταία ερώτηση πρέπει να είναι θετική. Σε τελευταία ανάλυση, αποδεικνύονται διατυπώσεις όπως, «Αν ο έλεγχος Τ, που περιλαμβάνει μια επιλογή k αριθμών, εκτελεσθεί σε ένα δεδομένο αριθμό n, και το αποτέλεσμα είναι θετικό, ο αριθμός n είναι πρώτος, με πιθανότητα $1 - 1/4^k$». Η πιο ενδιαφέρουσα ερώτηση όμως είναι η πρώτη: τι μας λεει μια απόδειξη σαν αυτή; Έχει ενδιαφέρον να ξέρουμε ότι ένας αριθμός είναι *πολύ πιθανόν* ένας πρώτος αριθμός; Δες π.χ., Ribenboim, 1989: 107-128, για μία σαφή παρουσίαση.

(iii) Ποια είναι η αξία μιας «βιντεο-απόδειξης»; Πρέπει εδώ να προσθέσω ότι, αν και υποστηρίζεται ότι οι βιντεο-αποδείξεις εισάγουν έναν εντελώς νέο και πρωτότυπο τρόπο μαθηματικής δραστηριότητας δεν αποτελούν τίποτα περισσότερο από μία μοντέρνα τεχνολογική εκδοχή των οπτικών αποδείξεων (proofs-by-looking) που προαναφέρθηκαν. Ίσως η ερώτηση θα έπρεπε να διατυπωθεί πιο γενικά: μπορεί να υπάρχουν «πειραματικές» αποδείξεις; Δες το κείμενό μου 1990 για μια σχετική συζήτηση με παραδείγματα .

Συμπερασματικά, από μια γενική και μη αναλυτική άποψη, τα μαθηματικά μπορεί να θεωρηθούν ως ένα δίκτυο ερευνητικών προγραμμάτων, μεγάλα μέρη του οποίου συγκροτούν ερευνητικές παραδόσεις. Η λειτουργία ενός προγράμματος είναι να δημιουργεί, πρώτον, προβλήματα, εικασίες, δηλαδή δουλειές που πρέπει να γίνουν και δεύτερον, ομοφωνία για τις μεθόδους και τα πρότυπα που θα χρησιμοποιηθούν στο χειρισμό των προβλημάτων. Αυτό αποτελεί, σε

[5] Για να είμαστε λίγο πιο σαφείς η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος – ένα κλασσικό μαθηματικό αριστούργημα- δείχνει ότι το σύνολο όλων των χαρτών που πρέπει να χρωματιστούν μπορεί να περιοριστεί σε ένα πεπερασμένο σύνολο χαρτών, έτσι ώστε αν οι χάρτες του συνόλου αυτού μπορεί να χρωματιστούν, το ίδιο ισχύει για όλους τους χάρτες. Το δεύτερο μέρος της απόδειξης αποτελείται από ένα πρόγραμμα υπολογιστή με το οποίο χρωματίζεται κάθε χάρτης του πεπερασμένου συνόλου. Δεν υπάρχει επομένως άλλη επιλογή από το να εκτελεσθεί το πρόγραμμα και να διαπιστωθεί αν η τελική απάντηση είναι ναι ή όχι. Μια μάλλον πρωτοφανής κατάσταση. Δες Appel και Haken, 1989.

γενικές γραμμές το περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθηματικοί εκτελούν τις καθημερινές τους εργασίες.

Μια μέρα στη ζωή ενός μαθηματικού

Στο μικρο- επίπεδο κάθε μαθηματικός επιχειρεί να αποδείξει θεωρήματα, να διατυπώσει εικασίες, να ελέγξει αποδείξεις ή θεωρήματα αποδειγμένα από άλλους μαθηματικούς, να ψάξει για αντι-παραδείγματα που διαψεύδουν μια μαθηματική πρόταση και λοιπά. Το βασικό ερώτημα είναι: πως τα κάνουν αυτά; Δοθείσης μιας μαθηματικής πρότασης Α, πως ασχολούνται με αυτήν ώστε να βρουν (ή να κατασκευάσουν) μια απόδειξη; Εν ολίγοις, προκύπτει η ερώτηση της ευρετικής.

Όπως θα περίμενε κανείς, υπάρχουν αρκετές υποδείξεις, ιδέες και προτάσεις. Χωρίς αμφιβολία, η πιο γνωστή είναι η *μέθοδος αποδείξεων και ανασκευών* του Lakatos. Με τα δικά του λόγια:

«Κανόνας1. Αν έχεις μια εικασία, προσπάθησε να την αποδείξεις και να την ανασκευάσεις. Εξέτασε προσεκτικά την απόδειξη συντάσσοντας έναν κατάλογο μη τετριμένων λημμάτων (αποδεικτική ανάλυση). Αναζήτησε αντιπαραδείγματα τόσο για την εικασία (καθολικά αντιπαραδείγματα) όσο και για τα ύποπτα λήμματα. (τοπικά αντιπαραδείγματα).

Κανόνας 2. Αν έχεις ένα καθολικό αντιπαράδειγμα που καταρρίπτει την εικασία σου, πρόσθεσε στην αποδεικτική ανάλυση ένα κατάλληλο λήμμα, που δεν θα ανασκευασθεί από το αντιπαράδειγμα σου και αντικατέστησε την παλαιά εικασία με μια νέα βελτιωμένη, που ενσωματώνει το λήμμα αυτό ως προϋπόθεση. Μην επιτρέψεις το να εκδιωχθεί αυτή η ανασκευή ως τέρας. Προσπάθησε να κάνεις ρητά όλα τα «κρυμμένα» λήμματα.

Κανόνας 3. Αν συναντήσεις ένα τοπικό αντιπαράδειγμα, έλεγξε μήπως είναι και καθολικό αντιπαράδειγμα. Αν ναι, τότε εφαρμόζεις τον προηγούμενο κανόνα 2» (Lakatos, 1976: 50). (ΣτΜ. Ελληνική έκδοση 1996: 84-85)

Όμως αυτό δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία. Τι, για παράδειγμα υποτίθεται ότι κάνει ένας μαθηματικός εάν καταρχήν δεν βρει μια απόδειξη; Ως παράδειγμα, επιτρέψτε μου να εκθέσω συνοπτικά μερικές όψεις της ιστορίας του *Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat* (ΤΘF) (για λεπτομέρειες δες το κείμενό μου,1987).

Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat

Καταρχήν, αντί για την αντιμετώπιση του γενικού προβλήματος, βρέθηκαν αποδείξεις για συγκεκριμένες περιπτώσεις: έτσι αποδείχτηκε ότι η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει ακέραιες λύσεις για $n = 3, 4, 5, 7, 14$. Σε αυτές τις αποδείξεις η μέθοδος της άπειρης εξάντλησης ήταν καθοριστική. Μέχρις ότου το 1823 η Sophie Germain απέδειξε τα ακόλουθα.

Για τη διατύπωση του θεωρήματος ήταν αναγκαίες οι ακόλουθες διακρίσεις:

- η εξίσωση περιορίζεται σε πρώτους αριθμούς p, οπότε:

  $x^p + y^p = z^p$,

- η πρώτη περίπτωση του ΤΘF δηλώνει ότι δεν υπάρχουν x, y, z, τέτοια ώστε ο p δεν διαιρεί το x.y.z και $x^p + y^p = z^p$ (η δεύτερη περίπτωση είναι προφανώς, εκείνη όπου ο p διαιρεί το x.y.z).

Το θεώρημα της Germain λεει το ακόλουθο:

Για κάθε περιττό πρώτο αριθμό p τέτοιο ώστε ο $2.p + 1$ είναι επίσης πρώτος, η πρώτη περίπτωση ισχύει.

Με μερικά επιπλέον θεωρήματα, η Germain και ο Legendre ήταν σε θέση να αποφανθούν για όλους τους πρώτους αριθμούς < 100. Όπως είναι αναμενόμενο το πρόβλημα είναι να καθορισθεί πόσοι πρώτοι αριθμοί p υπάρχουν τέτοιοι ώστε ο $2.p + 1$ είναι επίσης πρώτος αριθμός, ένα πραγματικά πολύ δύσκολο πρόβλημα. Πρέπει να προσθέσω εδώ ότι η τεχνική να διασπάται ένα θεώρημα σε υπο-περιπτώσεις που αντιμετωπίζονται μεμονωμένα, είναι ένα συνεχές σχεδόν χαρακτηριστικό της ιστορίας του ΤΘF. Για παράδειγμα, κατά την επόμενη σημαντική πρόοδο που επετεύχθη από τον Eduard Kummer, επειδή το πρόβλημα είχε μεταφερθεί στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών εισήχθη μια άλλη διάκριση ανάμεσα σε κανονικούς και μη κανονικούς πρώτους αριθμούς. Το θεώρημα στο οποίο κατέληξε ο Kummer αποφαίνεται: Αν ο πρώτος αριθμός p είναι κανονικός, τότε το ΤΘF ισχύει.

Το σημαντικό σημείο που πρέπει να σημειωθεί εδώ, είναι ότι το ΤΘF εισήχθη σε ένα νέο πεδίο: δεν αποτελεί πλέον ένα πρόβλημα της θεωρίας αριθμών, αλλά ένα πρόβλημα της θεωρίας μιγαδικών αριθμών.

Αυτό είναι ένα δεύτερο σταθερό φαινόμενο που πρέπει να σημειωθεί: Ένα πρόβλημα, όπως το ΤΘF, «μεταναστεύει» σε ένα άλλο πεδίο αν δεν βρίσκονται ενδιαφέροντα αποτελέσματα στο συγκεκριμένο πεδίο που βρίσκεται. Όμως, το να διαπιστωθεί, αν ένας πρώτος αριθμός p είναι κανονικός, είναι εξίσου δύσκολο με το να διαπιστωθεί αν ο p είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε ο 2.p + 1 να είναι επίσης πρώτος αριθμός. Χωρίς αμφιβολία, αυτό επιτρέπει στους μαθηματικούς κατά τη διάρκεια των χρόνων που ακολούθησαν να εντοπίσουν όλους τους κανονικούς πρώτους αριθμούς μέχρι το125.000.

Αλλά το ΤΘF δεν έμεινε σε αυτή τη περιοχή και μια άλλη «μετανάστευση» έλαβε χώρα. Ξαναγράφοντας την εξίσωση ως εξής :

$$(x/z)^p + (y/z)^p = 1, \text{ ή}$$

$$X^p + Y^p = 1,$$

το ΤΘF λεει ότι αυτή η καμπύλη δεν διέρχεται από ρητά σημεία. Μπαίνουμε στο πεδίο των σωμάτων των αλγεβρικών αριθμών και από αυτό το πεδίο στη περιοχή των ελλειπτικών καμπυλών, modular μορφής, όπου τελικά βρίσκεται μια απόδειξη (δες Wiles, 1995). Να σημειωθεί, ότι σπουδαίοι μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με αυτό, όπως οι Gerd Faltings, Gerhard Frey, Ken Ribet, ακόμα και ο Andrew Wiles[6], ουσιαστικά ασχολήθηκαν με άλλα προβλήματα, ως πόρισμα των οποίων θα αποδείκνυαν το ΤΘF.

Αυτό που θέλω να υπογραμμίσω είναι ότι η αναζήτηση μιας απόδειξης – το αρχικό βήμα στο μοντέλο του Lakatos- προφανώς συμβαίνει με ένα συστηματικό τρόπο (ή με συστηματικούς τρόπους). Έτσι είναι δυνατόν να διατυπωθούν κανόνες και οδηγίες. Μερικοί από τους κανόνες αυτούς είναι μάλλον προφανείς – η κατάτμηση του προβλήματος σε διαφορετικές περιπτώσεις περιλαμβάνονταν ήδη στις προτροπές του Polya (δες παρακάτω) – αλλά η υπόδειξη της αναζήτησης «μεταφράσεων»

---

[6] Στη περίπτωση του Andrew Wiles υπάρχει μια ακόμη πιο περίεργη περιπλοκή. Ήδη από παιδί ήθελε να αποδείξει το ΤΘF αλλά κατά τη διάρκεια των μαθηματικών του σπουδών δέχτηκε συμβουλές να μην σπαταλήσει το χρόνο του σε αυτό το πρόβλημα. Αλλά να χρησιμοποιήσει το ταλέντο του σε σπουδαία προβλήματα των ελλειπτικών καμπυλών και των modular μορφών. Όμως μετά το θεώρημα του Ribet που απέδειξε τη συνάφεια ανάμεσα στα δύο προβλήματα ο Wiles συνειδητοποίησε ότι τελικά εργαζόταν στο πρόβλημα των ονείρων του. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη περίφημη δημοσίευση του Wiles το1995, το ΤΘF αν και μνημονεύεται στο τίτλο αναφέρεται μόνο στην εισαγωγή.

του προβλήματος σε άλλους τομείς και πεδία, με τρόπο ώστε να ενθαρρύνεται μία «μετανάστευση» είναι ίσως λιγότερο τετριμμένη.

Δεν θα μπω σε λεπτομέρειες, αλλά παρόμοιες ιστορίες μπορούν να λεχθούν και για άλλα ανοιχτά προβλήματα των μαθηματικών. Παραπέμπω στο Echeverria (1996) για μια πολύ ωραία ανάλυση της εικασίας του Goldbach.

Αλλά ακόμα και αυτό δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία. Οι αποδείξεις είναι περίεργα πράγματα. Είναι ίσως κοινοτυπία να πω, ότι ένας μαθηματικός βλέπει μια απόδειξη αν συμβαίνει να είναι μια απόδειξη. Χωρίς αμφιβολία όμως, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν περισσότερα κριτήρια από μια απλή τυπική ορθότητα, όπως οι συνοπτικές περιγραφές των παρακάτω περιπτώσεων δείχνουν (για περισσότερες λεπτομέρειες, δες κείμενό μου 1988).

Ο Apéry και η συνάρτηση Ζήτα του Riemann

Υποθέστε ότι παρακολουθείτε ένα σεμινάριο στο οποίο ένας μαθηματικός παρουσιάζει μια απόδειξη σε μερικούς συναδέλφους του. Υποθέστε ακόμα, ότι αυτό που αποδεικνύει είναι μια σπουδαία μαθηματική πρόταση. Τότε συμβαίνει το εξής: καθώς ο μαθηματικός προχωρεί στην απόδειξή του, το ακροατήριό του καταρχήν εκπλήσσεται, στη συνέχεια εκνευρίζεται και τελικά εξεγείρεται (μερικοί αποχωρούν, άλλοι γελούν, …). Χωρίς αμφιβολία, η απόδειξη με τυπικούς όρους είναι (σχεδόν) σωστή. Τι έχει συμβεί;

Ο Roger Apéry διερεύνησε την συνάρτηση Ζήτα του Riemann, $Z(s) = \Sigma_n 1/n^s$, όπου s είναι μιγαδικός αριθμός και το n παίρνει τιμές από 1 έως άπειρο (την ίδια συνάρτηση η οποία περιλαμβανόταν στο όγδοο πρόβλημα του Hilbert, όπως προαναφέρθηκε). Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι αυτό αποτελεί ένα σημαντικό θέμα της μαθηματικής κοινότητας. Συγκεκριμένα, ενδιαφέρθηκε για τις ακέραιες τιμές, Z(n). Μερικά αποτελέσματα, όπως τα παρακάτω ήταν γνωστά:

Για $n = 2k$, $Z(2k) = (-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}B_{2k}/(2.(2k)!)$,

όπου B_{2k} είναι ο 2k–στός αριθμός Bernoulli, δηλαδή, ο 2k-στός συντελεστής στην εξίσωση:

$$x/(e^x-1)= \Sigma\ B_i x^i/k!.$$

Παράδειγμα: Για $n = 2$, $k = 1$ και δοθέντος ότι $B_2 = 1/6$, βρίσκουμε ότι:

$$\Sigma_n 1/n^2 = Z(2) = (-1)^0(2\pi)^2/6.2.2!$$

$$= 1.4.\pi^2/6.2.2$$

$$= \pi^2/6,$$ ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα.

Όμως, πολύ λιγότερα είναι γνωστά για τις περιττές τιμές. Είναι οι Z(3), Z(5), ..., γενικά, Z(2n+1), ρητοί ή άρρητοι αριθμοί; Το πρόβλημα ήταν γνωστό στον Euler, αλλά ούτε ο Euler ούτε οι μαθηματικοί μετά από αυτόν κατάφεραν να συνεισφέρουν στην επίλυσή του. Τον Ιούνιο του 1978, ο Roger Apéry παρουσίασε μια απόδειξη ότι η τιμή της Z(3) είναι άρρητος αριθμός. Αυτή η απόδειξη προκάλεσε μια παράξενη αντίδραση των συναδέλφων του.

Αν η ερώτηση δεν φαίνεται αφελής: τι ήταν λάθος στην τυπικά ορθή απόδειξη του Apéry; Οι Μαθηματικοί έδωσαν την ακόλουθη εξήγηση:

(i) Η απόδειξη ήταν «μυστηριώδης» και αποτελούνταν από μια σειρά «θαυμάτων». Αφού, π.χ., ο Apéry χρησιμοποιεί τις ακόλουθες σειρές, που ορίζονται συνδρομικά:

$$n^3u_n = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} - (n-1)^3u_{n-2}.$$

Ο Apéry ισχυρίστηκε τα ακόλουθα: αν αρχίσουμε με το $u_o = 1$ και $u_1 = 5$, τότε κάθε u_n είναι ακέραιος αριθμός! Αυτό είναι πραγματικά εκπληκτικό, αφού κάθε u_n έχει τη μορφή A/n^3. Επομένως πρέπει να είναι διαιρετό με το n^3, για κάθε n [7].

(ii) Η απόδειξη δεν προσφέρει καμία ένδειξη για άλλες τιμές της Z(s) όπου $s = 2n+1$. Προφανώς, οι μαθηματικοί θεωρούν τις αποδείξεις που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό, ως αποδείξεις χαμηλής ποιότητας.

(iii) Μέρος της δυσπιστίας στην απόδειξη του Apéry οφείλονταν στο γεγονός ότι δεν χρησιμοποιούσε καμία «νέα» μέθοδο. Εν ολίγοις, η απόδειξη θα μπορούσε να είχε βρεθεί από τον Euler. Τότε λοιπόν, γιατί ο Euler δεν βρήκε την απόδειξη, αλλά ούτε και κανείς άλλος τα αμέσως επόμενα χρόνια;

[7] Πρέπει εδώ να γίνει ένα ενδιαφέρον ιστορικό σχόλιο. Ο Apéry εμπνεύστηκε αυτό τον τύπο των σειρών από τις εργασίες του περίφημου Ινδού μαθηματικού Ramanujan. Όμως για τον τελευταίο, ο όρος «θαύμα» είχε ένα απολύτως θετικό περιεχόμενο.

Μετά την επαναδιατύπωση της απόδειξης (κάτι που έγινε από άλλους μαθηματικούς) το αποτέλεσμα έγινε πλέον αποδεκτό και βρέθηκαν γενικεύσεις του (δες Apéry, 1996: 58)[8].

Με λίγα λόγια, όπως είναι αναμενόμενο, οι διαδικασίες οι οποίες οδήγησαν σε νέα μαθηματικά αποτελέσματα και ιδέες, είναι περίπλοκες, ποικιλόμορφες, εντοπίζονται και κατανοούνται δύσκολα και ουσιαστικά γεμάτες παγίδες. Συνεπώς, αν και για μερικά περιορισμένα σύνολα προβλημάτων το σύνολο των ευρετικών όπως περιγράφηκαν από τον Polya μπορεί να φανεί χρήσιμο, εν τούτοις δεν αντιμετωπίζει καίρια ζητήματα.

Σε κάποιο βαθμό, το ίδιο μπορεί να ειπωθεί και για εργασίες που γίνονται στο πεδίο της ψυχολογίας. Το επίκεντρο των εργασιών αυτών είναι ακόμη στη συγκρότηση και ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά και ευκαιριακά αναφέρεται κάτι για τους ενήλικες και για τους επαγγελματίες μαθηματικούς, π.χ. στον Tall (1991). Φαίνεται παράξενο που το βιβλίο του Hadamard αναφέρεται ακόμα, αν και χρονολογείται από το 1945 (εξίσου παράξενο είναι το γεγονός ότι την ίδια εποχή εκδίδεται το βιβλίο του Polya *Πώς να το λύσω - How to Solve It* , το οποίο επίσης αναφέρεται ακόμα). Δεν χρειάζεται να σχολιαστεί το γεγονός, ότι διαδικασίες όπως είναι η γενίκευση ή η αναγωγή του προβλήματος σε απλούστερες περιπτώσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες και παραγωγικές. Αλλά το κύριο πρόβλημα είναι η υπέρβασή τους. Χωρίς να μπαίνω σε λεπτομέρειες (για μια ακόμη φορά, ομολογώ), μπορεί να φανεί μάλλον ειρωνεία ότι μια από τις παλιότερες προσεγγίσεις του προβλήματος παράγει ακόμα αποτελέσματα: *η μέθοδος της ανάλυσης και σύνθεσης*. Για μια πρόσφατη επισκόπηση, δες Otte & Panza, 1997.

Μαθηματικός κόσμος ή τρελός κόσμος; - Math world or mad world?

Ίσως είναι η κατάλληλη στιγμή να επιστρέψουμε σε ένα από τους αρχικούς ισχυρισμούς μου. Συγκεκριμένα, στο γεγονός ότι η φιλοσοφική οπτική που κάποιος υιοθετεί για τα μαθηματικά – οντολογική και επιστημολογική- προσδιορίζει συγχρόνως τις απόψεις

[8] Η μετέπειτα αναγνώριση των αποτελεσμάτων του απάλειψε τις κακές αναμνήσεις αυτού του γεγονότος. Ο γιος του François Apéry δεν μνημονεύει το γεγονός, αλλά γράφει ότι: « Η πιο λαμπρή στιγμή της καριέρας του ήταν, όταν σε ηλικία 60 και πλέον ετών, απέδειξε ότι η τιμή της Z(3) είναι άρρητος αριθμός» (Apéry, 1996:58).

του για την εξέλιξη και την ανάπτυξη των μαθηματικών. Οι οπαδοί του μαθηματικού ρεαλισμού θα συνέκριναν ευχαρίστως τον κόσμο των αριθμών, των συνόλων και των γεωμετρικών σχημάτων με τον υλικό κόσμο μέρος του οποίου αποτελούμε. Η σύγκριση αυτή όμως απαιτεί εξαιρετική προσοχή. Γιατί, είναι αστείο να ισχυριστούμε ότι ο κόσμος των μαθηματικών είναι ένας πραγματικός κόσμος. Στον υλικό μας κόσμο είναι απολύτως ασφαλές να γενικεύουμε από σε καιρό σε καιρό. Σε τελευταία ανάλυση, τα κοράκια είναι πραγματικά μαύρα και τα πουλιά, με εξαίρεση τον Τουίτυ και τους φίλους του, πετούν. Όμως, ο μαθηματικός κόσμος είναι ένας τρελός κόσμος. Να μερικά παραδείγματα. Το (a) και (b) είναι γνωστά στο μαθηματικό κόσμο, ενώ το (c) είναι μάλλον μια γενική παρατήρηση.

(a) *Προσέγγιση της κατανομής των πρώτων αριθμών*: Έστω π(n) η συνάρτηση η οποία απαριθμεί τους πρώτους αριθμούς ≤ n. Έστω ότι Li(n) – το λογαριθμικό ολοκλήρωμα – ορίζεται από την συνάρτηση:

$\int_2^n (1/\ln(x)dx$, όπου ln(x) είναι ο φυσικός λογάριθμος του x.

Το θεώρημα των πρώτων αριθμών δηλώνει ότι η Li(n) είναι μία εξαιρετικά καλή προσέγγιση της π(n) (για την ακρίβεια: η Li(n) είναι ασυμπτωτικά ίση με την π(n)).

Για πεπερασμένες τιμές του n, μπορεί να διαπιστωθεί, με άμεσο υπολογισμό, ότι, αν και η διαφορά είναι μικρή, Li(n) > π(n). Υπολογισμοί μέχρι το 10^9 επιβεβαιώνουν αυτή τη διαπίστωση. Φαίνεται εντελώς λογικό να συμπεράνουμε ότι αυτό ισχύει πάντοτε. Το οποίο δεν ισχύει. Ο Littlewood απέδειξε ότι η διαφορά Li(n) - π(n) αλλάζει πρόσημο *άπειρες* φορές! Η πρώτη εκτίμηση για τη τιμή του n που συμβαίνει αυτό, δόθηκε από τον Skewes. Κατέληξε στον εντυπωσιακό αριθμό

10^(10^(10^34))),

που σημαίνει ότι μια αλλαγή του πρόσημου πρέπει να λάβει χώρα πριν από αυτόν τον αριθμό. Αυτό το ανώτερο φράγμα βελτιώθηκε στο $6{,}69.10^{370}$, έναν επίσης εντυπωσιακό αριθμό. Δες Devlin, 1988: 207-213 για περισσότερες λεπτομέρειες.

(b) *Η Εικασία του Mertens*: Αν n είναι φυσικός αριθμός, τότε ή ο n είναι διαιρετός από το τετράγωνο ενός πρώτου αριθμού, p^2, ή όχι. Στη δεύτερη περίπτωση αποκαλούμε τον n ανεξάρτητο τετραγώνου (square-free). Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση m(n) ως εξής:

- αν n δεν είναι ανεξάρτητος τετραγώνου: $m(n) = 0$
- αν n είναι ανεξάρτητος τετραγώνου και ο αριθμός των πρώτων στο n είναι άρτιος: $m(n) = 1$
- αν n είναι ανεξάρτητος τετραγώνου και ο αριθμός των πρώτων στο n είναι περιττός: $m(n) = -1$.

Παράδειγμα: $m(6) = m(2.3) = 1$, $m(9) = 0$, $m(11) = -1$.

Τέλος, ορίζεται η συνάρτηση M(n) ως εξής:

$$M(n) = m(1) + m(2) + \ldots + m(n).$$

Η εικασία του Mertens ισχυρίζεται ότι:

$$|M(n)| < \sqrt{n}.$$

Ένας άμεσος έλεγχος αποκαλύπτει ότι η ανισότητα αυτή ισχύει για τιμές του n της τάξης των δισεκατομμυρίων. Όμως, υπάρχει ένα αντι-παράδειγμα για μία τιμή του n της τάξης του 10^{65}.

(c) Σε κάποιο βαθμό, είναι αναμενόμενο κάποιος να «απατάται» σχεδόν συνέχεια. Σκεφθείτε τους πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι διακρίνονται, κλασσικά, σε δύο είδη: τους αλγεβρικούς και του υπερβατικούς πραγματικούς αριθμούς. Οι πρώτοι μπορεί να ορισθούν με αναφορά σε πολυώνυμα ενός ορισμένου βαθμού (π.χ., $\sqrt{2}$ είναι μία από τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$), ενώ οι δεύτεροι δεν μπορεί να ορισθούν με τέτοιο τρόπο. Επομένως η απόδειξη ότι ένας ορισμένος πραγματικός αριθμός είναι υπερβατικός δεν είναι εύκολη.

Όμως, ένα από τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται είναι το εξής:

Δοθέντος αριθμού r, αν υπάρχει μια άπειρη ακολουθία διακεκριμένων ρητών αριθμών p_i/q_i, τέτοια ώστε

$|r - p_i/q_i| < 1/q_i^{n_i}$ όπου n_i τείνει στο άπειρο όσο το i τείνει στο άπειρο, τότε ο r είναι υπερβατικός.

Αυτό σημαίνει ότι μερικοί υπερβατικοί αριθμοί είναι πάρα πολύ καλές προσεγγίσεις ρητών αριθμών. Ως εκ τούτου, η διάκριση αλγεβρικών και υπερβατικών αριθμών είναι εξαιρετικά δύσκολη και είναι αναμενόμενο οι αριθμητικοί υπολογισμοί να οδηγούν πολύ συχνά σε εντελώς λανθασμένες διαπιστώσεις.

Ένα άλλο εντυπωσιακά ωραίο παράδειγμα, που περιλαμβάνει τους δυο πιο γνωστούς υπερβατικούς αριθμούς π και e, είναι το εξής (παρμένο από Borwein & Borwein, 1992: 827).
Ο ακόλουθος τύπος δίνει τη σωστή τιμή του π μέχρι 42 δισεκατομμύρια ψηφία και μόνο τότε αρχίζουν τα σφάλματα:

$\pi = [(1/10^5)[\Sigma_n e^{-n^2/10^{\wedge}10}]]^2$, όπου n παίρνει τιμές από $-\infty$ μέχρι ∞.

Πιο είναι το ζήτημα που αναδεικνύουν αυτά τα παραδείγματα και τα σχόλια; Ακόμα και αν μπορούσαμε να βρούμε ένα σύνολο υψηλής ποιότητας ευρετικών, οι οποίες είναι επαρκείς για το χειρισμό ενός πλήθους μαθηματικών προβλημάτων, πρέπει να είμαστε προετοιμασμένοι κάθε στιγμή για την εμφάνιση του παράξενου και του ιδιόρρυθμου. Με άλλα λόγια, είναι γεγονός ότι οι ευρετικές δεν διασφαλίζουν την επιτυχία σε κάθε περίπτωση, αλλά αν κάποιος αποτυγχάνει περιστασιακά ελπίζει στο καλύτερο. Στο μαθηματικό σύμπαν το καλύτερο που έχει να κάνει κάποιος είναι να φοβάται για το χειρότερο.

Δεν θα επιμείνω σε αυτή την προσέγγιση περισσότερο, αλλά θα εξετάσω μια εναλλακτική προσέγγιση που αναπτύχθηκε τα τελευταία χρόνια: τα προγράμματα υπολογιστών που αποδεικνύουν θεωρήματα.

Επιτυχία και αποτυχία της αυτοματοποιημένης συλλογιστικής

Αν και το επίκεντρο αυτής της παραγράφου είναι η αυτοματοποιημένη συλλογιστική, θα εξετάσω συνοπτικά μερικές άλλες προσεγγίσεις, χωρίς πρόθεση ξανά να είμαι διεξοδικός. Χωρίς αμφιβολία, ένα από τα πιο διάσημα προγράμματα, γραμμένο από τον Douglas Lenat, είναι το *Automatic Mathematician* (AM). Αυτό το πρόγραμμα δεν αποδεικνύει θεωρήματα, αλλά λειτουργεί σε ένα άλλο επίπεδο, συγκεκριμένα στη δημιουργία νέων εννοιών με βάση δεδομένες έννοιες και στη διατύπωση εικασιών με πιθανό ενδιαφέρον.

Τεχνητός Μαθηματικός (Artificial Mathematician)

Η βασική δομή του προγράμματος AM είναι εντελώς απλή: μια μικρή συλλογή βασικών, μάλλον γενικών εννοιών και ένα εκτεταμένο σύνολο ευρετικών για εφαρμογή σε αυτές τις έννοιες. Μερικά παραδείγματα:

(a) Έστω ότι έχουν δοθεί δύο σύνολα A και B, καθώς και μια συνάρτηση f: A x A → B. Επομένως f(a,b) = c. Σε αυτή την περίπτωση, μια ενδιαφέρουσα ευρετική είναι να δούμε τι συμβαίνει αν τα δύο ορίσματα της συνάρτησης ταυτίζονται, έτσι ώστε να έχουμε την συνάρτηση g: A → B. Αν, π.χ., η f είναι πολλαπλασιασμός, a.b = c, τότε η g είναι η τετραγωνική συνάρτηση $a^2 = c$.

(b) Δοθείσης μιας συνάρτησης f: A → B, δείτε τι συμβαίνει αν η f εφαρμοστεί κατ΄ επανάληψη (αν αυτό βέβαια είναι δυνατό), ας πούμε $f^n = f^\circ f^\circ f \ldots {}^\circ f$ (n φορές). Αν, π.χ., η f είναι πρόσθεση, οπότε f: N x N → N και εφαρμοστεί η προηγούμενη ευρετική, τότε έχουμε τη συνάρτηση g: N → N, τέτοια ώστε g(a) = 2a. Επανειλημμένες εφαρμογές της g, παράγουν συναρτήσεις οι οποίες απεικονίζουν το a επί του 2a, 3a, ..., na. Με άλλα λόγια έχουμε το βασικό πολλαπλασιασμό.

(c) Δοθείσης μιας συνάρτησης f: A → B, δείτε τι συμβαίνει με την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει. Έτσι, αν οριστεί ο πολλαπλασιασμός, a.b = c, θα προκύψει από αυτή την ευρετική η διαίρεση, παίρνοντας υπόψη την αδύνατη περίπτωση a/b, όπου b = 0.

(d) Δοθείσης μιας συνάρτησης f: A → B, εξετάστε τις ακραίες περιπτώσεις, δηλαδή, αν η μία ή η άλλη έννοια λαμβάνει τιμές από ένα δεδομένο πεδίο τιμών εξετάστε τις ακρότατες τιμές να δείτε τι συμβαίνει. Έτσι, π.χ., αν η έννοια του διαιρέτη είναι διαθέσιμη, τότε μπορεί να κατασκευασθεί η συνάρτηση d η οποία απεικονίζει αριθμούς επί τον αριθμό των διαιρετών αυτού του αριθμού (αυτή η συνάρτηση υπάρχει πράγματι στη θεωρία αριθμών και είναι μια βασική συνάρτηση). Μια ακραία περίπτωση είναι να εξετάσουμε το ελάχιστο της d(n). Προφανώς η κατώτατη τιμή είναι 2, οπότε εκείνα τα n για τα οποία d(n) = 2 είναι ειδικά. Πράγματι, δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι πρώτοι αριθμοί.

(e) Δοθείσης μιας συνάρτησης f: A → B, και ενός συνόλου συγκεκριμένων τιμών της f, αναζητείστε ένα τύπο και διατυπώστε την εικασία, ότι όλες οι τιμές επιβεβαιώνουν τον προτεινόμενο τύπο. Παράδειγμα: συνεχίζοντας με την συνάρτηση d του προηγούμενου παραδείγματος, υποθέστε ότι εξετάζετε το n, έτσι ώστε d(n) = 3. Αν το πρόγραμμα AM δημιουργήσει έναν αριθμό παραδειγμάτων για αυτή τη συνάρτηση, θα προκύψουν ορίσματα όπως 4, 25, 121, ... Αυτά είναι όλα τετράγωνα, ως εκ τούτου μπορεί να διατυπωθεί η εικασία: «Αν d(n) =

3, τότε n = m^2, για ορισμένα m» (το οποίο συμβαίνει στη συγκεκριμένη περίπτωση). Υπάρχει όμως η δυνατότητα να διατυπωθεί, η πιο ισχυρή εικασία «d(n) = 3 αν και μόνον αν n = m^2, όπου m είναι πρώτος αριθμός».

Δεν είναι εύκολο να αξιολογηθούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του προγράμματος AM σε λίγες γραμμές. Παραπέμπω τον αναγνώστη στο Boden, 1990: 206-209, για μια ισόρροπη κρίση. Επιτρέψτε μου όμως να σημειώσω, ότι το πρόγραμμα AM δεν διαφεύγει από τον τρόμο όλων των επιστημόνων των υπολογιστών: τη συνδυαστική έκρηξη. Αν δεν εισαχθούν στο σύστημα πρόσθετες μετα-ευρετικές, το πρόγραμμα AM θα δημιουργήσει, έννοια την έννοια και εικασία την εικασία, όλα τα ενδιαφέροντα, αλλά και όλα τα αδιάφορα αποτελέσματα. Αυτό όμως, δεν είναι μια ιδιαίτερη κριτική του προγράμματος AM, αλλά όλων γενικά των προγραμμάτων υπολογιστών, τα οποία επιδιώκουν να μοντελοποιήσουν μια δημιουργική διαδικασία.

Μεγάλη προσοχή έχει δοθεί σε προγράμματα υπολογιστών, τα οποία έχουν τη δυνατότητα να ελέγχουν υπάρχουσες αποδείξεις. Χωρίς αμφιβολία, ένα από τα πιο διάσημα είναι το πρόγραμμα AUTOMATH, το οποίο αναπτύχθηκε από τον N.G. de Bruijn. Εξίσου εντυπωσιακά όμως είναι προγράμματα όπως το Mathematics Understander (MU), το οποίο αναπτύχθηκε από τον Edmund Furse και το ONTIC, το οποίο αναπτύχθηκε από τον David A. McAllester (δες το βιβλίο του: 1989). Στο ίδιο επίπεδο, είναι προγράμματα όπως τα MACSYMA, REDUCE, MATHEMATICA και πολλά άλλα. Μια ενδιαφέρουσα επισκόπηση περιλαμβάνεται στο Johnson et al. (1994). Δεν θα συζητήσω αυτά τα προγράμματα, αλλά θα επικεντρωθώ στις ιδέες της αυτοματοποιημένης συλλογιστικής, οι οποίες βρίσκονται στη βάση τους[9].

9 Υπάρχει ένα σημείο που πρέπει να αναφερθεί. Σε πολλές από τις προσεγγίσεις αυτές, ο συγγραφέας ή οι συγγραφείς υπογραμμίζουν τη διπλή χρήση των στρατηγικών από κάτω-προς-τα-πάνω και από πάνω-προς-τα-κάτω. Με όρους αναζήτησης αποδείξεων αυτό μεταφράζεται σε: (i) ξεκινάω από τα αξιώματα και παράγω ότι περισσότερο μπορώ έχοντας υπόψη το συμπέρασμα στο οποίο επιθυμώ να φθάσω και (ii) ξεκινάω από το συμπέρασμα διατυπώνω συλλογισμούς ανάδρομα έχοντας υπόψη πια είναι τα αξιώματα. Αν κάπου υπάρξει σύμπτωση θα έχουμε τη ραχοκοκαλιά μιας απόδειξης. Το αξιοσημείωτο είναι ότι αυτή η διαδικασία δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια σύγχρονη μετάφραση της πολλή γνωστής μεθόδου της ανάλυσης και σύνθεσης. Κάποιος μπαίνει στον πειρασμό να πει: *ουδέν νεότερο υπό τον ήλιο* (*nihil novi sub sole).*

Αυτοματοποιημένη συλλογιστική

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της αυτοματοποιημένης συλλογιστικής είναι η απλότητα των βασικών ιδεών της. Όμως, η διατύπωση των βασικών της αρχών είναι μόνο ένα μικρό τμήμα του όλου εγχειρήματος. Για την επεξήγηση των βασικών αρχών της αυτοματοποιημένης συλλογιστικής, απαιτούνται μερικές διευκρινήσεις πρώτα για την κλασσική προτασιακή λογική και μετά για την κλασσική κατηγορηματική λογική πρώτης-τάξης [10].

1. Αυτοματοποιημένη συλλογιστική στον προτασιακό λογισμό

Η κλασσική λογική έχει την εξαιρετικά ωραία ιδιότητα να είναι δυνατή η επαναδιατύπωση κάθε τύπου A σε μια τυπική μορφή A-*cnf*, τη κανονική μορφή σύζευξης (conjunctive normal form). Ένας τύπος στη μορφή A-*cnf* αποτελείται από μια σειρά συζεύξεων (ενδεχομένως κενών), κάθε συζευκτικός σύνδεσμος είναι μια σειρά διαζεύξεων (ενδεχομένως κενών), και τα μέλη των διαζεύξεων είναι ή γράμματα p, q, r, ... ή αρνήσεις τους. Έτσι π.χ., ο τύπος

$$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$$

γίνεται

$$(p \vee q \vee \sim p) \,\&\, (\sim q \vee q \vee \sim p).$$

Αν απαλείψουμε τις συζεύξεις, τότε απομένουν οι προτασιακές μορφές:

(i) $p \vee \sim q \vee \sim p$

(ii) $\sim q \vee q \vee \sim p$.

Γιατί αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον; Γιατί μπορεί να αποδειχθεί ότι όλοι οι λογικοί *κανόνες* μπορεί να αναχθούν σε ένα *μοναδικό* κανόνα, τον αποκαλούμενο κανόνα διαχωρισμού (resolution rule):

Ας υποτεθεί ότι δίνονται δύο τύποι στη *cnf* μορφή (κανονική μορφή σύζευξης) τέτοιοι ώστε:

(i) $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee p \vee \ldots \vee A_n$

(ii) $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee \sim p \vee \ldots \vee B_m$,

μπορούν να ενοποιηθούν σε έναν:

---

10 Οι ιδέες για την Αυτοματοποιημένη Συλλογιστική που παρουσιάζονται εδώ προέρχονται από το Wos et al., 1992, και το Bundy, 1983.

(iii) A_1 v A_2 v … v A_n v B_1 v B_2 v … v B_m.

Με λόγια αν σε δύο τύπους εμφανίζεται το γράμμα p και το ίδιο γράμμα με άρνηση τότε οι δύο προτάσεις μπορεί να συναρμοστούν σε μια νέα πρόταση απαλείφοντας το p και την άρνηση του p.

Με αυτό το υλικό διαθέσιμο η απόδειξη θεωρημάτων γίνεται εύκολη. Ένας από τους τυπικούς τρόπους είναι με τη χρήση της διάψευσης. Αν πρέπει να αποδειχθεί ότι το B έπεται ενός συνόλου προκείμενων προτάσεων A_1, A_2, …, A_n, τότε ξαναγράψτε όλες τις προκείμενες προτάσεις και την άρνηση του συμπεράσματος σε *cnf* μορφή (κανονική μορφή σύζευξης) και προσπαθήστε να βρείτε μία αντίφαση – οριζόμενη από την *κενή* πρόταση, f – με διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα διαχωρισμών (resolutions rule).

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η p ⊃ s προκύπτει από την (p v q) ⊃ r και r ⊃ s

Η επαναδιατύπωση σε *cnf* μορφή (κανονική μορφή σύζευξης) δίνει τις ακόλουθες προτάσεις:

1. ~p v r
2. ~q v r
3. ~r v s
4. p
5. ~s

Εφαρμογή του διαχωρισμού στην 3 και 5: 6. ~r
Εφαρμογή του διαχωρισμού στην 1 και 6: 7. ~p
Εφαρμογή του διαχωρισμού στην 4 και 7: 8. f. αντίφαση.

Βέβαια, αφού στον προτασιακό λογισμό υπάρχει μία διαδικασία αποφάσεων με την οποία μπορεί να διαπιστωθεί αν κάθε συγκεκριμένος τύπος είναι αποδείξιμος, ξέρουμε ότι αυτή η μέθοδος παράγει πάντοτε σωστές απαντήσεις. Για την κατηγορηματική λογική όμως η κατάσταση είναι πιο ενδιαφέρουσα .

2. Αυτοματοποιημένη συλλογιστική στην κατηγορηματική λογική

Όπως και στον προτασιακό λογισμό, κάθε τύπος είναι δυνατόν να επαναδιατυπωθεί σε μια τυποποιημένη μορφή. Χωρίς να προχωρήσω σε λεπτομέρειες, αλλά μιλώντας γενικά η τυποποιημένη μορφή, αποκαλούμενη φραγμένη εμπρός κανονική μορφή (prenex normal form (*pnf*)), έχει όλους τους ποσοδείκτες μπροστά και στη συνέχεια μία έκφραση σε κανονική μορφή σύζευξης (*cnf)* χωρίς ποσοδείκτες. Όπως και στην προτασιακή λογική είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί με ένα μοναδικό (εξίσου καλό) κανόνα, τον κανόνα του πλήρους διαχωρισμού (full resolution rule). Έτσι φαίνεται ότι μπορούμε να κάνουμε το ίδιο που κάνουμε και στην προτασιακή λογική. Όμως, όπως γνωρίζουμε, στην κατηγορηματική λογική δεν υπάρχει μία διαδικασία αποφάσεων με την οποία μπορεί να διαπιστωθεί αν κάθε συγκεκριμένος τύπος είναι αποδείξιμος, οπότε επαναλαμβανόμενες εφαρμογές του κανόνα δεν οδηγούν σε βέβαιη επιτυχία. Παρόλα αυτά τα μαθηματικά έχουν ως ελάχιστη προϋπόθεση την κατηγορηματική λογική, επομένως εδώ είναι η πρόκληση. Βασικά υπάρχουν δύο επιλογές :

(a) *Εύρεση περιορισμένων περιπτώσεων*: Υπάρχουν μέρη της κατηγορηματικής λογικής στα οποία υπάρχει μία διαδικασία αποφάσεων με την οποία μπορεί να διαπιστωθεί αν κάθε συγκεκριμένος τύπος είναι αποδείξιμος, οπότε για αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατόν να σχηματιστεί ένας αλγόριθμος.

(b) *Έρευνα για ευρετικές*: Εύρεση πρόσθετων «κανόνων» που μπορεί να καθοδηγήσουν στην έρευνα για τον εντοπισμό της κενής πρότασης.

Δεν θα ήταν δίκαιο μέσα σε μισή ή μία σελίδα να απαριθμήσω τα θετικά και αρνητικά της αυτοματοποιημένης συλλογιστικής. Θα παραθέσω μερικές από τις επιτυχίες της για τον απλό λόγο ότι οι περισσότεροι μαθηματικοί, λογικοί και φιλόσοφοι είναι απόλυτα πεισμένοι ότι η γενική αξία της αυτοματοποιημένης συλλογιστικής είναι σχεδόν μηδαμινή.

(i) Ένα από τα πραγματικά εντυπωσιακά και εξαιρετικά πρόσφατα αποτελέσματα είναι η επίλυση του προβλήματος των *αλγεβρών Robbins.* Το πρόβλημα είναι απλό. Δοθέντων των ακόλουθων αξιωμάτων, τα οποία ορίζουν μία άλγεβρα Robbins:

(R1) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$,

(R2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z))((x + y) + z = x + (y + z))$,

(R3) $(\forall x)(\forall y)(-(-(x + y) + -(x + -y)) = x)$,

να δειχτεί ότι αποτελούν μία άλγεβρα Boole.

Όπως είναι εμφανές το πρόβλημα είναι να αποδειχθεί ότι οι άλγεβρες Robbins ταυτίζονται με τις άλγεβρες Boole. Παραπέμπω στο McCune, 1997, για μια επισκόπηση του προβλήματος και της επίλυσής του. Θα περιοριστώ σε μερικά γενικά σχόλια. Η βασική προσέγγιση προσανατολίζονταν στην εύρεση πρόσθετων αποφάνσεων Α τέτοιων ώστε τα αξιώματα Robbins μαζί με τις αποφάνσεις Α να οδηγούν στην απόδειξη της ισοδυναμίας με μια άλγεβρα Boole. Το πρόβλημα τότε περιορίζονταν στην απόδειξη των Α από τα αξιώματα (R1), (R2), και (R3). Η ιστορία από μόνη της είναι συναρπαστική. Να ένας κατάλογος μερικών από αυτές τις αποφάνσεις:

(A1) $(\forall x)(--x = x)$,

(A2) $(\exists y)(\forall x)(y + x = x)$,

(A3) $(\exists y)(\forall x)(1.x = x)$,

(A4) $(\forall x)(x + x = x)$,

(A5) $(\exists x)(x + x = x)$,

(A6) $(\exists x)(\exists y)(x + y = y)$.

Ειδικά οι (A4) έως (A6) είναι εκπληκτικές, αφού κάθε μια τους είναι πιο αδύναμη από την προηγούμενη. Να σημειωθεί ότι αυτή η πρακτική αναζήτησης ενδιάμεσων αποφάνσεων είναι μια τυπική πρακτική των ερευνητών μαθηματικών.

(ii) Τα προγράμματα αυτοματοποιημένης συλλογιστικής είναι εξαιρετικά καλά στην παραγωγή αντι-παραδειγμάτων και πεπερασμένων μοντέλων. Μπορεί κάποιος να σκεφτεί ότι αυτό είναι τετριμμένο αλλά δεν είναι. Για τον απλό λόγο ότι η παραγωγή όλων των εκδοχών, ακόμα και όταν είναι πεπερασμένες, είναι εξαιρετικά δύσκολη. Επομένως, είναι αναγκαία μια κατευθυνόμενη αναζήτηση. Χρησιμοποιώντας αυτή την τεχνική, κατέστη δυνατόν να επιλυθούν προβλήματα στη θεωρία των πεπερασμένων ημι-ομάδων (δες Wos et al., 1992: 320-323). Έξω από το πεδίο των μαθηματικών, η ίδια τεχνική αποδείχτηκε χρήσιμη στην τυπική λογική.

(iii) Ως παράγωγα των προγραμμάτων αυτοματοποιημένης συλλογιστικής και άλλων προγραμμάτων, εμφανίστηκαν μερικά περίεργα αποτελέσματα. Ο Bailey et al., 1997, σχολιάζει ποικίλες μεθόδους για τον υπολογισμό των δεκαδικών ψηφίων του π και παρατηρεί ότι οι περισσότερες ταυτότητες συγκλίνουν πάρα πολύ αργά[11]. Έτσι συνάγεται ότι απαιτούνται καλύτερες ταυτότητες. Από το ένα μέρος αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης οι εργασίες του Ramanujan και από το άλλο, με στόχο τον υπολογισμό κάθε ψηφίου, χρησιμοποιήθηκε μια μέθοδος υπολογιστή (αποκαλούμενη 'PSLQ') για την παραγωγή νέων ταυτοτήτων, όπως η ακόλουθη (όπου i παίρνει τιμές από 0 έως άπειρο):

$$\pi = \Sigma_i\ (1/16^i)[4/(8i+1) - 2/(8i+4) - 1/(8i+5) - 1/(8i+6)]$$

Πέρα από το γεγονός ότι αυτού του είδους η ταυτότητα παραπέμπει στην απόδειξη του Apéry, είναι σημαντικό να κατανοηθεί ότι το πρόγραμμα αναζητά ταυτότητες στη βάση της αριθμητικής ταυτότητας και στη συνέχεια ερευνά για μία απόδειξη.

Για μια παρόμοια εργασία δες Wilf & Zeilberger, 1990, όπου παρουσιάζεται μια γενική μέθοδος για την παραγωγή ταυτοτήτων στην οποία η απόδειξη μπορεί αυτόματα να ελεγχθεί.

Τέλος πρέπει να προσθέσω, ότι η αυτοματοποιημένη συλλογιστική παρέχει μια ωραία και τυπική ιδέα του *αναλογικού συλλογισμού* (*reasoning by analogy).* Υποθέστε ότι η απόδειξη μιας πρότασης A ακολουθεί μια συγκεκριμένη πορεία, επιλεγμένη από την ευρετική που εφαρμόζεται, οπότε έχουμε ένα αποδεικτικό σχήμα. Αυτό το σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα αποδεικτικό πλαίσιο για μία πρόταση όμοια με την A.

Παράδειγμα: Σκεφτείτε την απόδειξη της άπειρης εξάντλησης (δες παραπάνω). Αυτό είναι ένα αποδεικτικό σχήμα το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε Διοφαντικό πρόβλημα, ως μια ευρετική. Για ένα ωραίο και ενδιαφέρον παράδειγμα, δες Melis, 1998.

Αποδείξεις από το απρόσμενο

Ότι ισχύει για τους ανθρώπους, ισχύει και για τις μηχανές. Τουλάχιστον σε αυτή τη περίπτωση. Είναι προφανές ότι η αυτοματοποιημένη συλλογιστική ρίχνει νέο φως στο τι είναι η έρευνα για τη μαθηματική

---

[11] Για κάποιον που ενδιαφέρεται, σύμφωνα με την δημοσίευση του Bailey et al. (1997), ο υπολογισμός περιλαμβάνει 6.442.450.938 δεκαδικά ψηφία. Όμως, τον Ιούνιο του 1998 ο αριθμός πλησίαζε τα $51{,}5.10^9$ δεκαδικά ψηφία. Αυτό το εντυπωσιακό αποτέλεσμα επιτεύχθηκε από τον Yasumasa Kanada.

απόδειξη και ποια είναι η φύση της μαθηματικής απόδειξης. Ταυτόχρονα θέλω να επαναλάβω ένα προηγούμενο σχόλιο, ότι το μαθηματικό σύμπαν, αν υπάρχει τέτοιο πράγμα, είναι ένας περίεργος τόπος. Το ίδιο ισχύει για τις αποδείξεις. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι πολλές αποδείξεις είναι τυπικές και δεν περιλαμβάνουν τίποτα περίεργο ή παράξενο, αλλά παρόλα αυτά, καμιά φορά πρέπει να περιμένουμε εκπλήξεις. Ολοκληρώνοντας αυτό το μέρος, επιτρέψτε μου να παρουσιάσω μερικές τέτοιες αποδείξεις[12].

Παράδειγμα 1. Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός. Για n φυσικό αριθμό, ορίζεται S(d) ως το άθροισμα των διαιρετών του. Τότε τρεις περιπτώσεις είναι δυνατές:

(i) S(d) = 2n, ο αριθμός είναι τέλειος,
(ii) S(d) > 2n, ο αριθμός είναι καθ' υπεροχήν ατελής,
(iii) S(d) < 2n, ο αριθμός είναι ατελής[*].

Να αποδειχθεί ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 46 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο καθ' υπεροχήν ατελών αριθμών (Honsberger, 1970: Essay Fourteen).

Αντιμετωπίζοντας αυτό το πρόβλημα για πρώτη φορά φαίνεται ως μια λογική στρατηγική να πάρουμε δύο καθ' υπεροχήν ατελείς αριθμούς a και b και να διερευνήσουμε τις ιδιότητες του αθροίσματός τους a + b. Αν και αυτή η στρατηγική ενδέχεται να είναι επιτυχής, μια άμεση απάντηση λαμβάνεται από την απόδειξη του ακόλουθου λήμματος:
Αν ένας αριθμός n είναι τέλειος ή καθ' υπεροχήν ατελής, τότε τα πολλαπλάσιά του είναι καθ' υπεροχήν ατελείς αριθμοί (Αφήνω την πολύ απλή απόδειξη στον αναγνώστη).

Το επόμενο βήμα είναι να γραφεί ο αριθμός n ως 6k + m, όπου m = 0, 2 ή 4. Αν m = 0, τότε n = 6k = 6k' + 6k", και, αφού 6 είναι τέλειος αριθμός, n είναι καθ' υπεροχήν ατελής. Αν m = 2, τότε n = 6k' + 20,

---

12 Είναι σχεδόν αναπόφευκτο ότι πρέπει να δοθεί το παράδειγμα της σκακιέρας από την οποία λείπουν δύο απέναντι γωνίες και το ερώτημα είναι να αποδειχθεί ότι η σκακιέρα δεν μπορεί να καλυφθεί με πλακάκια μεγέθους ακριβώς δύο τετραγώνων. Αφού καθένας δίνει αυτό το παράδειγμα μπορεί να σχηματιστεί η εντύπωση ότι αυτό είναι το μοναδικό παράδειγμα. Για αυτό παρουσιάζω εδώ τρία διαφορετικά παραδείγματα.

* ΣτΜ. Τέλειος (perfect) ακέραιος αριθμός είναι ο αριθμός που ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, καθ' υπεροχήν ατελής (abundance) είναι ο αριθμός που είναι μεγαλύτερος από το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του και ατελής (deficient)είναι ο αριθμός που είναι μικρότερος από το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του.

και, αφού 20 είναι καθ' υπεροχήν ατελής αριθμός, το ίδιο είναι και ο n. Αν m = 4, τότε n = 6k' + 40, και, αφού 40 είναι καθ' υπεροχήν ατελής αριθμός, το ίδιο είναι και ο n. ο.ε.δ.

Παράδειγμα 2. Θεωρείστε 18 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, μικρότερους από 1.000. Να δειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς αυτούς είναι διαιρετός από το άθροισμα των ψηφίων του.

Η συντομότερη απόδειξη που ξέρω βασίζεται στο απλό γεγονός ότι αν ο αριθμός είναι abc τότε $a + b + c \leq 27$. Με εξαίρεση τον αριθμό 999 (κανένα πρόβλημα γιατί το 999 είναι διαιρετό με το 27), τότε $a + b + c < 27$. Σε μια σειρά 18 αριθμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα πολλαπλάσιο του 18. Αυτός ο αριθμός είναι διαιρετός με το 9 και με το 2, ως εκ τούτου το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 9, τότε $a + b + c = 9$ ή 18. ο.ε.δ.

Παράδειγμα 3. Αυτό το πρόβλημα είναι ειλικρινά το αγαπημένο μου, γιατί δεν μπορεί να υπάρξει τίποτα πιο απλό από αυτό. Θεωρείστε την πραγματική συνάρτηση $f: R \to R$. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι *συμμετρική* αν $f(x) = f(-x)$ και *αντι-συμμετρική* αν $f(x) = -f(-x)$. Να αποδειχθεί ότι κάθε πραγματική συνάρτηση είναι άθροισμα μιας συμμετρικής και μιας αντι-συμμετρικής συνάρτησης.

Πιθανόν κάποιος σκέφτεται να «αφαιρέσει» από την f μία συμμετρική συνάρτηση g και στη συνέχεια να επιχειρήσει να αποδείξει ότι η f - g είναι μια αντι-συμμετρική συνάρτηση, υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Αντίθετα, η απάντηση είναι η εξής:

$$f(x) = [f(x) + f(-x)]/2 + [f(x) - f(-x)]/2.$$

Προφανώς $f(x) + f(-x) = f(-x) + f(x)$ και $f(x) - f(-x) = -[f(-x) - f(x)]$ ο.ε.δ.

Γενικά μιλώντας, είναι αυτή η αίσθηση του απρόσμενου η οποία φαίνεται πολύ δύσκολο να καταχτηθεί από την αυτοματοποιημένη συλλογιστική. Αλλά να σημειωθεί, ότι οι ερευνητές μαθηματικοί θεωρούν αυτές τις αποδείξεις εξίσου ευφυείς. Σε ελεύθερη απόδοση αυτό σημαίνει ότι και οι ίδιοι δεν περιμένουν μια απόδειξη αυτού του είδους. Έτσι για μια ακόμη φορά άνθρωπος και μηχανή συναντώνται.

Επίλογος

Το περιεχόμενο αυτού του κειμένου έχει σχεδόν στο σύνολό του περιγραφικό χαρακτήρα. Επιχείρησα να συγκεντρώσω στοιχεία, τα οποία πρέπει να αποτελούν μέρος μιας περιγραφής που θέλει να είναι αντιπροσωπευτική της μαθηματικής πρακτικής, όπως την ξέρουμε. Με αυτά δεδομένα όμως προκύπτει μια ερώτηση: Είναι η υπάρχουσα μαθηματική πρακτική η καλύτερη δυνατή; Υπάρχει περιθώριο βελτίωσης; Είναι δυνατόν να μην έχουν διερευνηθεί όλες οι όψεις της μαθηματικής απόδειξης; Δεν έχω άλλη επιλογή από το να επαναλάβω ένα σχόλιο που διατυπώθηκε πολλές φορές μέσα σ' αυτό το κείμενο: Η απάντηση σ' αυτές τις ερωτήσεις επηρεάζεται από τις προσωπικές απόψεις. Αν, π.χ. κάποιος πιστεύει ότι υπάρχει μια ιδανική απόδειξη και παράλληλα πιστεύει ότι αυτό το ιδεώδες είναι ανθρωπίνως εφικτό, τότε υπάρχει ένα σημείο πέρα από το οποίο δεν είναι δυνατή καμία βελτίωση[13]. Αν όμως, κάποιος πιστεύει ότι τα μαθηματικά είναι (τίποτα περισσότερο από) ένα ανθρώπινο προϊόν, τότε στη βάση αυτής της παραδοχής αφήνει περιθώριο για αναστοχασμό και αφήνει ανοιχτή την εκδοχή του «σχεδιασμού» των μαθηματικών σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Η τελευταία ιδέα δεν είναι καθόλου παράλογη. Τελειώνω αναφέροντας την ενδιαφέρουσα, αλλά όχι αρκετά γνωστή, εργασία της van Gasteren (1990), όπου προτείνει να προσπαθούν οι μαθηματικοί να παρουσιάζουν τις αποδείξεις με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτυγχάνεται η μέγιστη σαφήνεια. Ένα από τα κίνητρά της είναι ότι τέτοιες αποδείξεις ελέγχονται ευκολότερα με τη χρήση προγραμμάτων αυτοματοποιημένης συλλογιστικής, οπότε είναι δυνατόν να επιτευχθεί μια ορισμένη διαίρεση εργασίας μέσα στη μαθηματική κοινότητα. Σε τελευταία ανάλυση, είτε

[13] Στο κείμενό μου (1993) σκιαγραφώ αυτή τη ιδεατή μαθηματική κοινότητα (IMK). Τα βασικά χαρακτηριστικά της είναι: (a) στην IMK όλα τα μέλη είναι ίσα, (b) η IMK είναι σχετικά απομονωμένη από την υπόλοιπη κοινωνία, (c) όλα τα μέλη της IMK πιστεύουν στην ύπαρξη ενός μοναδικού μαθηματικού σύμπαντος U (ανεξάρτητα από την ερώτηση της πραγματικής ύπαρξής του) και θεωρούν ότι στόχος των μαθηματικών είναι η αναζήτηση μιας πλήρους περιγραφής του U, (d) όλα τα μέλη πιστεύουν στην ύπαρξη μιας μοναδικής ή προτιμώμενης γλώσσας L στην οποία διατυπώνεται αυτή η περιγραφή, (e) αν υπάρχει μια απόδειξη για κάθε μαθηματική πρόταση, τότε η απόδειξη αυτή μπορεί κατά κανόνα να βρεθεί από κάθε μαθηματικό, (f) κάθε απόδειξη κάθε μαθηματικής πρότασης μπορεί να ελεγχθεί από κάθε μαθηματικό και τελικά, αν και προαιρετικό, (g) η εύρεση της απόδειξης είναι κυρίως προϊόν κάποιου είδους έμφυτων ικανοτήτων. Να σημειωθεί ότι η περιγραφή της IMK είναι πολύ φτωχότερη από την πραγματική κοινότητα.

μας αρέσει είτε όχι, τα μαθηματικά είναι ένα κοινωνικό φαινόμενο και από αυτή την οπτική.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Σημείωση: Ο κατάλογος των βιβλιογραφικών αναφορών είναι εκτεταμένος. Δεν σημαίνει ότι στοχεύει στο να εντυπωσιάσει τον αναγνώστη, αλλά είναι απλά το αποτέλεσμα της δημιουργίας αυτού του κειμένου. Προσπάθησα να καλύψω όσο το δυνατόν περισσότερες περιοχές, συμπληρώνοντας με υποσημειώσεις εκείνα τα σημεία όπου η συζήτηση με τον αναγνώστη δεν έχει ολοκληρωθεί.

Alexandrov, P.S. (ed.) (1971). *Die Hilbertschen Probleme*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig.

Apéry, François (1996). 'Roger Apéry, 1916-1994: A Radical Mathematician.' *The Mathematical Intelligencer*, vol. 18, 2, 54-61.

Appel, Kenneth & Wolfgang Haken (1989). *Every Planar Map is Four Colorable*. Providence: AMS (Contemporary Mathematics, vol. 98).

Bailey, D.H.; J.M. Borwein; P.B. Borwein & S. Plouffe (1997). 'The Quest for Pi'. *Mathematical Intelligencer*, vol. 19, 1, 50-57.

Bell, John L. (guest ed.) (1994). *Categories in the Foundations of Mathematics and Language*. Special issue of *Philosophia Mathematica*, vol. 2, first third.

Boden, Margaret (1990). *The Creative Mind*. London: Sphere Books.

Borwein, Jonathan & Peter Borwein (1992). 'Some Observations on Computer Aided Analysis'. *Notices of the AMS*, vol. 39, 8, 825-829.

Browder, Felix E. (ed.) (1976). *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*. Providence: AMS. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 28).

Bundy, Alan (1983). *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning*. New York: Academic Press.

Cipra, Barry (1996). *What's Happening in the Mathematical Sciences, 1995-1996, volume 3*. Providence: AMS.

Corry, Leo (1992). 'Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure'. *Synthese*, Vol. 92, 315-348.

Crowe, Michael (1992): 'Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics'. In: Gillies, Donald, 15-20 (originally published in 1975).

Dauben, Joseph: ‘Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge.’ In: Gillies, Donald, 49-71 (originally published in 1984).

Devlin, Keith (1988). *Mathematics: The New Golden Age*. Harmondsworth: Penguin.

Dieudonné, Jean (1987). *Pour l’honneur de l’esprit humain. Les mathématiques aujourd’hui*. Paris: Hachette.

Duda, Roman (1997). ‘Mathematics: Essential Tensions’. *Foundations of Science*, vol. 2, 1, 11-19.

Dunham, William (1990). *Journey Through Genius. The Great Theorems of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Echeverria, Javier (1996). ‘Empirical Methods in Mathematics. A Case Study: Goldbach’s Conjecture.’ In: Munévar, Gonzalo (ed.), *Spanish Studies in the Philosophy of Science*. Dordrecht: Kluwer Academic, 19-55.

Gelbart, Stephen (1984). ‘An Elementary Introduction to the Langlands Program’. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, volume 10, number 2, 177-219.

Gillies, Donald (ed.) (1992). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Glas, Eduard (1981). *Wiskunde en samenleving in historisch perspectief*. Muiderberg: Coutinho.

Glas, Eduard (1991a). ‘Lakatos revisited’. *Kennis en Methode*, XV, 3, 307-311.

Glas, Eduard (1991b). ‘Koetsiers verfijnde metamethodologie - een repliek’. *Kennis en Methode*, XV, 4, 404-405.

Gorenstein, Daniel (1986). ‘Classifying the Finite Simple Groups’. *Bulletin (New Series) of the AMS*, 14, 1-98.

Graham, L.A. (1959). *Ingenious Mathematical Problems and Methods*. New York: Dover Publications.

Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Fontana History of the Mathematical Sciences*. London: Fontana Press.

Grimmett, Geoffrey & Dominic Welsh (1994). *Probability. An Introduction.* Oxford: Clarendon Press.

Hersh, Reuben (1997). *What is Mathematics, Really?* London: Jonathan Cape.

Honsberger, Ross (1970). *Ingenuity in Mathematics*. Washington: New Mathematical Library, MAA.

Johnson, Jeffrey; Sean McKee & Alfred Vella (eds.) (1994). *Artificial Intelligence in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

King, Jerry P. (1992). *The Art of Mathematics*. New York: Plenum Press.

Kitcher, Philip (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Koetsier, Teun (1991). *Lakatos' Philosophy of Mathematics. A Historical Approach*. New York/Amsterdam: North-Holland. (Studies in the History and Philosophy of Mathematics, volume 3).

Kuhn, Thomas (1977). *The Essential Tension. Selected Studies in Scientific Tradition and Change*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, Imre (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Langley, Pat; Herbert A. Simon, Gary L. Bradshaw & Jan M. Zytkow (1987). *Scientific Discovery. Computational Explorations of the Creative Processes*. Cambridge, Mass.: MIT.

Lenat, D.B. (1980). 'AM: Discovery in Mathematics as Heuristic Search'. In: R. Davis & D.B. Lenat (eds.). *Knowledge-Based Systems in Artificial Intelligence*. New York: McGraw-Hill, 3-228.

MacLane, Saunders (1986). *Mathematics. Form and Function*. Heidelberg: Springer.

McAllester, David A. (1989). *ONTIC. A Knowledge Representation System for Mathematics*. Cambridge, Mass.: MIT.

McCune, William (1997). 'Solution of the Robbins Problem'. *Journal of Automated Reasoning*, vol. 19, no.3, 263-276.

Melis, Erica (1998). 'The Heine-Borel Challenge Problem. In Honor of Woody Bledsoe'. *Journal of Automated Reasoning*, vol. 20, 3, 255-282.

Munévar, Gonzalo (ed.) (1996). *Spanish Studies in the Philosophy of Science*. Dordrecht: Kluwer Academic (BSPS volume 186).

Northrop, Eugene P. (1978). *Riddles in Mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

Otte, M. & M. Panza (eds.) (1997). *Analysis and Synthesis in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Polya, Georg (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press. [New York: Doubleday Anchor Books, 1957.]

Rav, Yehuda (1993). 'Philosophical problems of mathematics in the light of evolutionary epistemology.' In: Restivo, Sal et al (eds.). *Math Worlds: New Directions in the Social Studies and Philosophy of Mathematics*. New York: State University New York Press, 80-109.

Restivo, Sal (1983). *The Social Relations of Physics, Mysticism, and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Restivo, Sal (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Restivo, Sal; Jean Paul Van Bendegem & Roland Fischer (eds.) (1993). *Math Worlds: New Directions in the Social Studies and Philosophy of Mathematics*. New York: State University New York Press.

Ribenboim, Paulo (1989). *The Book of Prime Number Records*. Heidelberg: Springer.

Schoenfeld, Alan H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Stewart, Ian (1987). *The Problems of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, Oxford.

Tall, David (ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer (Mathematics Education Library).

Taylor, Richard and Andrew Wiles (1995). 'Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras'. *Annals of Mathematics*, Second Series, vol. 141, 3, 553-572.

Tymoczko, Thomas (ed.) (1986). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Stuttgart: Birkhäuser.

Van Bendegem, Jean Paul (1987). 'Fermat's Last Theorem seen as an Exercise in Evolutionary Epistemology'. In: Werner Callebaut & Rik Pinxten (eds.), *Evolutionary Epistemology*. Dordrecht: Kluwer, 337-363.

Van Bendegem, Jean Paul (1988). 'Non-Formal Properties of Real Mathematical Proofs'. In: Arthur Fine and Jarrett Leplin (eds.), *PSA 1988. Volume One*. East Lansing: PSA, 249-254.

Van Bendegem, Jean Paul (1990a). 'Characteristics of Real Mathematical Proofs'. In: A. Diaz, J. Echeverria and A. Ibarra (eds.), *Structures in Mathe-*

matical Theories. San Sebastian: Servicio Editorial Universidad del Pais Vasco, 333-337.

Van Bendegem, Jean Paul (1993). 'Foundations of Mathematics or Mathematical Practice: Is One Forced to Choose?' In: S. Restivo, J.P. Van Bendegem & R. Fischer (eds.), 21-38.

Van Bendegem, Jean Paul (1996): 'Mathematical Experiments and Mathematical Pictures'. In: Igor Douven & Leon Horsten (eds.), *Realism in the Sciences. Proceedings of the Ernan McMullin Symposium Leuven 1995*. Louvain Philosophical Studies 10. Leuven: Leuven University Press, 203-216.

van Gasteren, A.J.M. (1990). *On the Shape of Mathematical Arguments*. Heidelberg: Springer.

Wells, David (1991). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Harmondsworth: Penguin Books.

Wilder, Raymond L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*. Oxford: Pergamon Press.

Wiles, Andrew (1995). 'Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem'. *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 141, 3, 443-551.

Wilf, Herbert S. & Doron Zeilberger (1990). 'Towards computerized proofs of identities'. *Bulletin (New Series) of the AMS*, vol. 23, 1, 77-83.

Wos, Larry; Ross Overbeek; Ewing Lusk & Jim Boyle (1992). *Automated Reasoning. Introduction and Applications*. New York: McGraw-Hill.

Απόδοση στα Ελληνικά: Ελ. Γιαννακοπούλου & Δ. Χασάπης

Το επιστημονικό καθεστώς των μαθηματικών ή συνιστούν τα μαθηματικά «επιστημονική ήπειρο»;

Αριστείδης Μπαλτάς

Ε.Μ.Π. Αθήνας

Πρώτ` απ` όλα, δεδομένου του γενικού περιγράμματος της αλτουσεριανής έννοιας της επιστήμης, το να θεωρήσουμε ότι οι ποικίλες μαθηματικές θεωρίες σχηματίζουν μια επιστημονική ήπειρο ακούγεται παράδοξο – για να μην πούμε τίποτα χειρότερο. Ακόμη κι αν είναι επιτρεπτό να μιλάμε για μαθηματικές έννοιες και μαθηματικό εννοιολογικό σύστημα, πως δικαιούμαστε να μιλάμε για αντικείμενα, τα οποία τέτοια συστήματα οικειοποιούνται, και σε τι συνίστανται οι πειραματικές συναλλαγές, οι οποίες συσχετίζουν τα δυο και ελέγχουν κατά πόσον τέτοιες οικειοποιήσεις είναι πραγματικά αποτελεσματικές; Φαίνεται σαν τα μαθηματικά να συνιστούν απαγορευμένο βασίλειο για την έννοια της επιστήμης, της οποίας τις περιπέτειες προσπαθούμε να ιχνηλατήσουμε. Σε ό,τι ακολουθεί, θα δοκιμάσουμε να δείξουμε πολύ σχηματικά, μόνον σχηματικά, μόνον προγραμματικά, ότι τα πράγματα δεν είναι όπως φαίνονται.

* Το κείμενο αυτό δημοσιεύτηκε αρχικά στο περιοδικό ΝΕΥΣΙΣ 3, Φθινόπωρο 1995, 97-108.

Αρχίζουμε, λοιπόν, υποστηρίζοντας μια θεμελιώδη θέση οφειλόμενη στον Ρεϊμόν (Raymon), η οποία ακούγεται παρατραβηγμένη, αλλά σε μια δεύτερη ανάγνωση δεν είναι[1]: κάθε δοσμένο μέρος των μαθηματικών ή , εφόσον τα μαθηματικά είναι πάντοτε γραπτά (με την συνήθη ή τουλάχιστον με τη γενικευμένη κατά Ντερριντά σημασία του όρου), κάθε μαθηματικό «κείμενο» είναι συγκροτητικά για το ίδιο διαιρεμένο σε δύο μέρη. Χρησιμοποιώντας την ορολογία του Ρεϊμόν, και για λόγους που θα προκύψουν αμέσως , καλούμε το μέρος Ι «μαθηματικό» μέρος και το μέρος ΙΙ «μαθηματικοποιημένο» μέρος. Σε σχέση , και μόνο σε σχέση, με το δοσμένο μαθηματικό κείμενο, το μέρος ΙΙ συνιστά το οικειοποιούμενο αντικείμενο, ενώ το μέρος Ι συνιστά το εννοιολογικό σύστημα που επιτελεί την οικειοποίηση. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα, το «κείμενο» της αναλυτικής γεωμετρίας συνιστά τη γνωσιακή οικειοποίηση του «μαθηματικοποιημένου» της ευκλείδειας γεωμετρίας (μέρος ΙΙ του κειμένου) από το «μαθηματικό» της άλγεβρας (μέρος Ι του κειμένου).

Πρέπει να εξειδικεύσουμε δύο πράγματα σε σχέση μ᾽ αυτή τη θέση. Πρώτον, ότι αυτά τα δύο μέρη είναι αξεδιάλυτα συνυφασμένα ` αυτά δεν μπορούν ουσιωδώς να διαχωριστούν με την έννοια ότι κάποιες ειδικές παράγραφοι ή προτάσεις ανήκουν μόνο στο ένα ή στο άλλο μέρος. Δεύτερον, ότι η συγκεκριμένη διαίρεση ανάμεσα σε αντικείμενο και εννοιολογικό σύστημα είναι ιδιάζουσα για το δοσμένο μαθηματικό κείμενο και δεν διατηρείται απαραίτητα για άλλα τέτοια κείμενα. Ό,τι συνιστά αντικείμενο σε σχέση με το δοσμένο κείμενο μπορεί να συνιστά εννοιολογικό σύστημα σε σχέση με ένα άλλο, και αντιστρόφως. Μ' άλλα λόγια, το να είναι το ένα μέρος αντικείμενο και το άλλο εννοιολογικό σύστημα ισοδυναμεί με *την εκπλήρωση μιας λειτουργίας* του κειμένου και δεν αποτελεί ανεξάρτητη ιδιότητα των μαθηματικών οντοτήτων που ενέχονται.

Ας επεξεργαστούμε περισσότερο αυτή τη θέση, ξεκινώντας με μια από τις απλούστερες εκφράσεις της. Ας θεωρήσουμε την έννοια του αριθμού όπως λειτουργεί έμπρακτα μέσα σε κάποια δοσμένη πρακτική, ας πούμε τη λογιστική, μαζί με τους πρακτικούς κανόνες που υπαγορεύουν τις επιτρεπόμενες χρήσεις τους. Αυτή η έννοια, μαζί μ' αυτές τις χρήσεις, μαθηματικοποιείται με τη σημασία του Ρεϊμόν,

[1] Βλ. Pierre RAYMOND, L' Histoire et les Sciences, Maspero (Petite Collection), 1978.

αφότου γίνει ανεξάρτητη, τουλάχιστον μέχρι ένα ορισμένο βαθμό, απ' όλες τις όψεις της εν λόγω πρακτικής. Αυτή η ανεξαρτησία ισοδυναμεί με το μετασχηματισμό της σε κάποιο είδος «αντικειμένου», «αντικειμένου» που κατέχει προσίδιες «ιδιότητες» και προκαλεί «γεγονότα» ή «φαινόμενα», είτε συγκεκριμένα, όπως «2x7=10+4» είτε γενικά, όπως «a+b=b+a». Στο βαθμό που κερδίζει ένα τέτοιο μέτρο ανεξαρτησίας, η υπό συζήτηση έννοια γίνεται επιδεικτική μιας προσιδιάζουσας εννοιολογικής μεταχείρισης. Πράγμα που σημαίνει ότι όλα τα «γεγονότα» ή «φαινόμενα» που αυτό το «αντικείμενα» προκαλεί ζητούν τη γνωσιακή τους οικειοποίηση από ένα αυστηρό εννοιολογικό σύστημα. Το μέρος του I του Ρεϊμόν δεν είναι τίποτα άλλο από το μαθηματικό, ακριβώς εννοιολογικό σύστημα το οποίο επιτυγχάνει αυτό το σκοπό. Μ' άλλα λ'ογια το αντικείμενο που καθορίζει ένα μαθηματικό κείμενο είναι σύνολο από τέτοια «γεγονότα» και «φαινόμενα», ενώ το αντίστοιχο εννοιολογικό σύστημα παρέχει τους μαθηματικούς λόγους του γιατί αυτά έχουν έτσι.[2] Τα πρώτα στάδια της αριθμητικής, όπως κορυφώνονται στο έργο του Διόφαντου, συνιστούν το ιστορικά πρώτο «μαθηματικό» που πέτυχε την οικειοποίηση των εν λόγω «γεγονότων» και «φαινομένων», τουλάχιστον μέσα στ' αντίστοιχα ιστορικά όρια. Έκδηλα, τα ίδια πράγματα μπορούν να ειπωθούν για τα γεωμετρικά σχήματα, για το ρόλο τους σε πρακτικές κατασκευής, για «γεγονότα» ή «φαινόμενα» του είδους ότι «οι γωνίες ενός τριγώνου με ίσες πλευρές είναι ίσες», και για το «μαθηματικό» του ευκλείδιου συστήματος.

Και, βέβαια, τα παραδείγματα μπορούν να πολλαπλασιαστούν όσο θέλουμε. Το «μαθηματικοποιημένο» των «ροών» (fluxions) του Newton και των διαφορικών του Leibniz το οικειοποιείται γνωστικά το «μαθηματικό» του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού του Κωσύ (Cauchy) και των διαδόχων του. Το «μαθηματικοποιημένο» των πιθανοτήτων που προέκυψε από τα τυχερά παιγνίδια το οικειοποιείται

---

[2] Υπό κάποιες προϋποθέσεις που απαιτούν περαιτέρω διευκρινήσεις, αυτή φαίνεται πως ήταν και η άποψη του Ράσελ, τουλάχιστον κατά κάποιο στάδιο της σκέψης του. Βλ. B. RUSSELL, "The Regressive Method of Discovering the Premises of Mathematics" (1907) στο: B. RUSSELL, *Essays in Analysis* (Edited By D. Lackey), London, George Allen and Unwin, 1973. O Andrew Irvine μου υπέδειξε αυτό το κείμενο και τον ευχαριστώ θερμά. Επιπλέον, το κείμενο του ιδίου του Irvine "Epistemic Logicism and Russell's Repressive Method", χειρόγραφο, προσθέτει ορισμένες σημαντικές διευκρινήσεις προς την ίδια κατεύθυνση, ενόσω στρατολογεί και την υποστήριξη του Kurt Godel υπέρ της ίδιας άποψης.

γνωστικά το «μαθηματικό» της θεωρίας μέτρου, ενώ το «μαθηματικοποιημένο» της συνάρτησης δέλτα του Ντιράκ το οικειοποιείται γναστικά η θεωρία κατανομών του Σβαρτς (Schwartz).

Αυτά τα παραδείγματα δεν πρέπει να δώσουν την εντύπωση ότι το «μαθηματικοποιημένο» περιορίζεται ή αποτελείται μόνο από τα ανώριμα πρώτα βήματα της μαθηματικοποίησης. Το ότι το «μαθηματικοποιημένο» αναφέρεται μόνο σε μια λειτουργία που εκπληρώνεται σε σχέση με κάποιο μαθηματικό κείμενο συνεπάγεται ότι κάθε μέρος των μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει υπό αυτή την ιδιότητα σε σχέση με κάποιο άλλο μέρος. Το παράδειγμα της αναλυτικής γεωμετρίας που μνημονεύσαμε παραπάνω διευκρινίζει το σημείο. Και στα αντίστοιχα μαθηματικά κείμενα, το εννοιολογικό σύστημα, ας πούμε, της αλγεβρικής τοπολογίας ή της θεωρίας των πολλαπλοτήτων εκλαμβάνει ως αντικείμενό του κάποιο πλήρως ώριμο μέρος των μαθηματικών, όπως κι αν ορίζεται αυτή η ωριμότητα. Πράγματι η ανάπτυξη των μαθηματικών δεν συνίσταται μόνο στην «εσωτερική» ανάπτυξη των διαφόρων κλάδων τους’ η αλληλοδιείσδυση τμημάτων αυτών των κλάδων, όπως αυτή εκδηλώνεται μ΄ςσω της εναλλαγής της λειτουργίας του «μαθηματικοποιημένου» μ’ αυτήν του «μαθηματικού», συνήθως σηματοδοτεί ένα μείζον επίτευγμα σε αυτή την ανάπτυξη.

Τώρα, πιθανόν τα κύρια πυρομαχικά ενάντια στη θέση ότι τα μαθηματικά συνθέτουν μια επιστημονική ήπειρο να αντλούνται από το γεγονός ότι τα μαθηματικά «αντικείμανα» που σκιαγραφήσαμε δεν είναι υλικά. Αυτό φαίνεται να αποκλείει μια, και για πάντα, τη δυνατότητα ορισμού πειραματικών συναλλαγών, ως τις υλικές, ακριβώς, διαδικασίες που αυτές οφείλουν να είναι. Ωστόσο είναι προφανές ότι αυτή η ένσταση βασίζεται στον τρόπο με τον οποίο κατανοείται όόρος «υλικές». Κι εδώ είναι ο τόπος, για να ξεκαθαρίσουμε ότι ο ειλικρινής και ρητός υλισμός του Αλτουσερ δεν ανάγει την υλικότητα στο αισθητό, στο χωροχρονικά εκτατό, στο αιτιακά αποτελεσματικό και τα συνώνυμά τους. Υλικότητα, με την περισσότερο εκλεπτυσμένη και γενική σημασία, είναι ότι μπορεί να παραμένει ανεξάρτητο απ’ τη νόησή μας, ό,τι μπορεί να υπερβεί τις πιο διεισδυτικές σκέψεις μας, ό,τι αντιστέκεται με επιτυχία στις επιμελέστερες προσπάθειές μας να το γνωρίσουμε. Τα μαθηματικά αντικείμενα χαρακτηρίζονται από μια τέτοια υφή.

Το ότι υπάρχουν μαθηματικά «γεγονότα τα οποία επιμένουν να αντιστέκονται στις επίμονες προσπάθειες οικειοποίησής τους ή το ότι αλλόκοτα «φαινόμενα» τα οποία η μαθηματική πρακτική ούτε προσδοκά ούτε μπορεί εύκολα να διευθετήσει εμφανίζονται διαρκώς σε διάφορους τόπους αποτελεί μια σταθερά της μαθηματικής πρακτικής σε όλους τους κλάδους της και σ’ όλες τις περιόδους της ιστορίας της. Η μυστηριώδης, ή ακόμα και αντιφατική «φύση» των άρρητων ή των «φανταστικών» αριθμών, όπως εγγράφεται στο ίδιο τους το όνομα˙ η όχι λιγότερο μυστηριώδης αδυναμία να τετραγωνισθεί ο κύκλος ή να αποδειχθεί το ευκλείδιο αίτημα των παραλλήλων˙ η αντίσταση που συνεχίζουν να εκδηλώνουν η υπόθεση Γκόλντμπαχ (Goldbach) και πολλά απ’ τα προβλήματα του καταλόγου Χίλμπερτ (Hilbert) συνιστούν μερικά από τα πιο φημισμένα παραδείγματα που πιστοποιούν του λόγου το ασφαλές.

Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι περιπτώσεις αντίστασης στην οικειοποίηση διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Απ΄ τη μια μεριά υπάρχουν κάποια αδιαμφισβήτητα «γεγονότα», όπως η ύπαρξη των άρρητων ή η αναγκαιότητα του αιτήματος των παραλλήλων, τα οποία επαναστατούν σε κάθε προσπάθεια εξήγησής τους. Απ΄ την άλλη μεριά υπάρχουν υποθέσεις, όπως αυτή του Γκόλντμπαχ, που ανθίστανται στην απόδειξή τους ή στην απόδειξη του άτοπου τους. Προφανώς τα δεύτερα δεν είναι καθαυτό μαθηματικά «γεγονότα», γιατί η ενδεχόμενη απόδειξή ότι δεν ισχύουν θα τα αποκλείσει από τα μαθηματικά, καθιστώντας τα απλώς αντικείμενα έρευνας του ιστορικού των μαθηματικών ή μέσα άσκησης της συναφούς παιδαγωγικής. Το ότι το ακριβές καθεστώς των μαθηματικών υποθέσεων παραμένει έτσι σε εκκρεμότητα ανοίγει το δρόμο για να κατανοήσουμε το σε τι ακριβώς συνίστανται οι πειραματικές συναλλαγές που προσιδιάζουν στα μαθηματικά.

Τώρα κάθε προσπάθεια ν’ αποδείξουμε μια δοσμένη υπόθεση πραγματοποιείται μέσα σε κάποιο μαθηματικό κείμενο μέσω του εννοιολογικού συστήματος που ορίζει το αντίστοιχο «μαθηματικό». Υποστηρίζουμε ότι η πραγματοποίηση μιας απόδειξης επιφέρει τέσσερα διακριτά αποτελέσματα. Πρώτον, η ύπαρξη της απόδειξης αίρει την εκκρεμότητα του καθεστώτος της υπόθεσης, καθιστώντας την καθαυτό μαθηματικό «γεγονός». Δεύτερον, η ίδια η απόδειξη συνιστά τη γνωσιακή οικειοποίηση του εδραιωμένου από την ύπαρξή της «γεγονότος», μέσα στο πλαίσιο του ενεχόμενου εννοιολογικού συστήματος. Τρίτον, το ότι το εννοιολογικό σύστημα όντως επιτυγχάνει την οικειοποίηση δείχνει αναδρομικά ότι αυτό είχε την ικανότητα να εξηγήσει το γεγονός, κάτι το οποίο το ίδιο το εγχείρημα της απόδειξης σχεδιάστηκε να ελέγξει. Τέταρτον, η έμπρακτη εκτύλιξη της απόδειξης συνιστά μια διαδικασία με την οποία αυτή η ικανότητα επικυρώνεται. Έτσι, συνοψίζοντας , η απόδειξη της υπόθεσης επικυρώνει, με μόνη την ύπαρξή της, την ικανότητα του εννοιολογικού συστήματος να οικειοποιηθεί γνωσιακά το «γεγονός» που έγκειται στην υπόθεση, ενώ είναι η ίδια που συνιστά την εν λόγω επικύρωση. Με αυτήν την έννοια, η απόδειξη της υπόθεσης και η επικύρωση της ικανότητας του εννοιολογικού συστήματος να εξασφαλίσει την οικειοποίηση συμπίπτουν.

Δίχως άλλο, αυτό ακούγεται παράδοξο. Με βάση αυτά που ξέρουμε για τη φυσική ή τη χημεία, η διαδικασία της απόδειξης δεν μπορεί παρά να αποτελεί αποκλειστική αρμοδιότητα του αντίστοιχου εννοιολογικού συστήματος, ενώ οι διαδικασίες επικύρωσης είναι δουλειά μόνο των πειραματικών συναλλαγών που συσχετίζουν ένα εννοιολογικό σύστημα με το αντικείμενό του. Πως είναι λοιπόν δυνατόν απόδειξη και επικύρωση να συμπίπτουν;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, αρκεί να επισημάνουμε δύο πράγματα. Πρώτον, ότι οι πειραματικές συναλλαγές κάθε επιστήμης συμμετέχουν και στο αντίστοιχο αντικείμενο και στο εννοιολογικό σύστημα, όντας γι αυτό το λόγο υλικές και ιδεατές, ή αφηρημένες και συγκεκριμένες διαδικασίες ταυτόχρονα. Δεύτερον, ότι το αντικείμενο και το εννοιολογικό σύστημα των μαθηματικών αποτελούν απλώς λειτουργίες των μαθηματικών κειμένων, οι οποίες έχουν την ικανότητα να αλλάζουν τους ρόλους τους σε σχέση με διαφορετικά κείμενα. Μ᾽ αυτή την έννοια, το αντικείμενο και το εννοιολογικό σύστημα είναι της ίδιας «φύσης», πράγμα που συνεπάγεται ότι οι πειραματικές συναλλαγές που σχετίζονται μ᾽ αυτά δεν μπορούν παρά να μοιράζονται εξίσου τη «φύση» αυτή. Το ότι απόδειξη και επικύρωση συμπίπτουν, όχι μόνο λοιπόν δεν συνιστά κάποιο παράδοξο, αλλά είναι κάτι που έπρεπε να περιμένουμε. Επιπλέον αυτή η ταυτότητα ολοκληρώνει τη θεώρηση της γενικής δομής των μαθηματικών δείχνοντας ότι οι πειραματικές συναλλαγές που προσιδιάζουν εδώ αποτελούν λειτουργίες του αντίστοιχου μαθηματικού κειμένου με τη σειρά τους: ό,τι συνιστά απόδειξη σε σχέση με κάποιο τέτοιο κείμενο μπορεί να συνιστά πειραματική διαδικασία σε σχέση με κάποιο άλλο.

Τώρα σε αντίθεση με τη φυσική ή τη χημεία, όπου το αποτέλεσμα μιας πειραματικής συναλλαγής ενέχει κατ᾽ αποκλειστικότητα μια αξία επικύρωσης είτε μια αξία κατάρριψης, η κατάρριψη στα μαθηματικά δεν είναι απλώς το αρνητικό της επικύρωσης: όπως μόλις αναλύσαμε, αν δεν αποδείξουμε την υπόθεση, αυτή απλώς παραμένει εκκρεμής, ενώ, ότι αυτή είναι άτοπη, τότε καταστρέφεται το καθεστώς της ως μαθηματικού «γεγονότος» και αυτή αποβάλλεται από τα μαθηματικά. Καθαυτό κατάρριψη εκδηλώνεται στα μαθηματικά μόνο όταν πραγματικά μαθηματικά «γεγονότα» των οποίων η ύπαρξη είναι πλήρως εγγυημένη από το ενεχόμενο εννοιολογικό σύστημα, αντιφάσκουν ρητά με κάποια τμήματα του ιδίου συστήματος. Τα « αντιπαραδείγματα» στη θεωρία των πολυέδρων του Λάκατος (Lakatos) εξειδικεύουν αυτό το σημείο.[3] Ή, για να πάρουμε ένα άλλο παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι η ύπαρξη του αντιφατικού συνόλου του Ράσσελ (Russell) ήταν πλήρως εγγυημένη από το εννοιολογικό σύστημα που όριζαν οι πρώτες εκδοχές της θεωρίας συνόλων. Η ίδια η ύπαρξη του, ωστόσο, κατέρριπτε αυτό το σύστημα, δείχνοντας τον αντιφατικό χαρακτήρα του. Και, βέβαια, η κατάρριψη της θεωρίας συνόλων που προκλήθηκε από το βασίλειο των μαθηματικών όλα τα «γεγονότα» που επέτρεπε αυτό το αντιφατικό σύστημα. Ότι οι κατοπινές εκδοχές αυτής της θεωρίας κατόρθωσαν να «σώσουν» κάποια από τα εν λόγω «γεγονότα» μετασχηματίζοντάς τα κατάλληλα αποτελεί διαφορετικό ζήτημα το οποίο θα διαπραγματευθούμε αμέσως.

Η ανατροπή ενός μαθηματικού εννοιολογικού συστήματος μέσω της «ανακάλυψης» ενός ορισμένου «γεγονότος» του οποίου την ύπαρξη το σύστημα εγγυάται, ενώ ταυτόχρονα το ίδιο αντιφάσκει με το σύστημα αυτό, συνιστά κατά κανόνα μείζον επεισόδιο στην ιστορία του αντίστοιχου μαθηματικού κλάδου, αν όχι στην ιστορία των μαθηματικών στην ολότητά τους. Αντίστοιχα, το να κατορθώσουμε να εξηγήσουμε αδιαμφισβήτητα «γεγονότα», τα οποία είχαν αντισταθεί επίμονα στην οικειοποίησή τους, ή το να κατορθώσουμε να αποδείξου

---

[3] Βλ. Imre LAKATOS, Proofs and Refutations, Edited by John Worrall and Zahar, Cambridge University Press, 1977.

ανάλογα ανθεκτικές υποθέσεις μέσω κάποιων απροσδόκητων εννοιολογικών μέσων, συνιστούν ισοδύναμης σοβαρότητας επεισόδια. Χωρίς να προχωρήσουμε εδώ σε βάθος στο ζήτημα, μπορούμε να πούμε ότι όλες αυτές οι στιγμές ισοδυναμούν με επιστημονικές επαναστάσεις στο εσωτερικό της ηπείρου των μαθηματικών ή, για να χρησιμοποιήσουμε τον αλτουσεριανό όρο, σε «εσω-επιστημονικές» ρήξεις.[4]

Για τους παρόντες σκοπούς μας αρκεί να πούμε ότι οι εσω-επιστημονικές ρήξεις ή οι επιστημονικές επαναστάσεις στο εσωτερικό της ηπείρου των μαθηματικών δεν διαφέρουν, κατ' αρχήν, από τις αντίστοιχες πιο οικείες συνονόματές τους που συζητήθηκαν πλατιά στην περίπτωση των φυσικών επιστημών. Είναι ο κρυφός ρόλος που παίζουν οι ιδεολογικές «παραδοχές» κατά τη συγκρότηση της «γραμματικής» των σχετικών εννοιών, αυτό που, τόσο σε κείνες τις επιστήμες όσο και στα μαθηματικά, χαράσσει αόρατα τα όρια του εννοιολογικού συστήματος, αποτρέποντάς το από το να εκπληρώσει πλήρως τα καθήκοντά που του αντιστοιχούν. Και στην περίπτωση των μαθηματικών, μια επιστημονική επανάσταση ισοδυναμεί με την αποκάλυψη κάποιων τέτοιων «παραδοχών». Κατά συνέπεια, ότι καθιστά το σχετικό μαθηματικό εννοιολογικό σύστημα ανίκανο να οικειοποιηθεί κάποια αδιαμφισβήτητα «γεγονότα», ανίκανο «να δει» πως μπορεί ν' αποδειχθεί η αλήθεια ή το άτοπο μιας υπόθεσης που αντιστέκεται, ή ακόμη «να δει» ότι παρέχει άσυλο σε μια μοιραία αντίφαση, είναι η ύπαρξη και ο σιωπηλός ρόλος που παίζουν κάποιες ιδεολογικές «παραδοχές». Όσον αφορά τα προηγούμενα παραδείγματά μας, ήταν οι κρυμμένες «παραδοχές» μέσα στην ίδια την έννοια του αριθμού εκείνες που καθιστούσαν μόνο τους ρητούς, και μετά μόνο τους πραγματικούς αριθμούς γραμματικά δυνατούς' ήταν οι «παραδοχές» που συνέδεαν κρυφά το εννοιολογικό σύστημα της γεωμετρίας με την εμπειρία του φυσικού χώρου εκείνες που καθιστούσαν τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες γραμματικώς αδύνατες' και ήταν οι «παραδοχές» που υπαγόρευαν ότι το «σύνολο» αποτελεί πρωταρχική έννοια, εφαρμόσιμη χωρίς περιορισμούς, εκείνες που επέτρεψαν την ύπαρξη του αντιφατικού συνόλου του Ράσσελ.

Όπως συμβαίνει και στην περίπτωση της φυσικής, μια επιστημονική επανάσταση στο εσωτερικό των μαθηματικών καταλήγει σ' ένα

[4] Βλ. M. FICHANT, M.PECHEUX, Sur l' Histoire des Sciences, Maspero, 1971.

καινούργιο εννοιολογικό σύστημα, το οποίο επιλύει ή διαλύει τα προβλήματα ή τους γρίφους όπου σκόνταψε το προηγούμενο σύστημα. Ωστόσο, καθώς η ανατροπή ενός εννοιολογικού συστήματος δεν μπορεί να σβήσει μονομιάς όλα τα γεγονότα που είχαν εξηγηθεί απ' αυτό, το καινούργιο σύστημα δεν μπορεί να δημιουργήσει κενό γύρω του. Αντίθετα αυτό πρέπει να διατηρήσει τουλάχιστον εκείνους τους δεσμούς με το παλιό, που εξασφαλίζουν ότι τα γεγονότα των οποίων την ύπαρξη εγγυώνται άλλα μέσα συνεχίζουν να σώζονται από το ίδιο. Κάτι τέτοιοι δεσμοί πράγματι διατηρούνται: η ίδια η εδραίωση του νέου συστήματος απορρέει, ακριβώς, από την αποκάλυψη κάποιων ιδεολογικών «παραδοχών» στις οποίες το παλιό παρείχε άσυλο. Πρέπει να προσθέσουμε, ωστόσο, ότι το νέο σύστημα μπορεί να σώσει τέτοια γεγονότα, μόνο αφού τα μετασχηματίσει κατάλληλα. Για παράδειγμα, η σημερινή έννοια του αριθμού καλύπτει φυσικούς, ρητούς, πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς. Αλλά οι «ρητοί αριθμοί», ας πούμε, συνιστούν μόνο μια μετάφραση της αντίστοιχης παλιότερης έννοιας μέσα στο πλαίσιο και με τα μέσα που παρέχει το νέο εννοιολογικό σύστημα. Τονίζουμε ότι πρόκειται για μονόδρομη μετάφραση: το παλιό σύστημα είναι ανίκανο να φιλοξενήσει τις νέες έννοιες με τρόπο ανάλογο με αυτόν που το νέο επιφυλάσσει για τις έννοιες του παλιού, γιατί οι συναφείς ιδεολογικές «παραδοχές» το απαγορεύουν. Και αυτή η ασυμμετρία συνεπάγεται ότι το νέο σύστημα είναι γραμμικά ευρύτερο απ' το παλιό, με την έννοια ότι αυτό διαθέτει έναν ευρύτερο «λογικό χώρο». Χωρίς να το αναλύσουμε εδώ περισσότερο, μπορούμε να πούμε ότι το γεγονός αυτό εφοδιάζει τα μαθηματικά με έναν αντικειμενικό «μετρητή» προόδου.

Τώρα, μια τέτοια σχέση διαδοχής ανάμεσα σε δύο μαθηματικά εννοιολογικά συστήματα φέρει ένα συγκεκριμένο όνομα στη μαθηματική πρακτική: το νέο σύστημα είναι πιο αυστηρό από το παλιό. Έτσι, αν αγνοήσουμε την επέκταση των μαθηματικών μέσω των διαδικασιών οι οποίες αποφέρουν νέες «μαθηματικές» οντότητες, ή αυτών που πραγματοποιούν νέους συνδυασμούς των λειτουργιών του «μαθηματικοποιημένου» και του «μαθηματικού», προκαλώντας τη δημιουργία νέων μαθηματικών κλάδων, μπορούμε να πούμε ότι η πρόοδος στο εσωτερικό της ηπείρου των μαθηματικών ισοδυναμεί με τη διαδικασία με την οποία τα μαθηματικά εννοιολογικά συστήματα καθίστανται όλο και περισσότερο αυστηρά. [5] Αλλά, σύμφωνα με όσα είπαμε, η αυστηρότητα κατακτάται στο μέτρο που αποκαλύπτονται ιδεολογικές «παραδοχές». Και γνωρίζουμε [6] ; ότι οι ιδεολογικές «παραδοχές» είναι κοινωνικά, επομένως και ιστορικά, καθορισμένες. Μπορούμε να πούμε, κατά συνέπεια ότι η μαθηματική αυστηρότητα συνιστά ένα «μέτρο» του ιστορικού διαστήματος που διαχωρίζει δύο τέτοια εννοιολογικά συστήματα, δηλαδή ένα μέτρο της μαθηματικής ιστορίας.

Εάν θέλαμε να συνοψίσουμε σε μια φράση ότι προηγήθηκε, μπορούμε να πούμε ότι το αντικείμενο των μαθηματικών δεν είναι τιποτ᾽ άλλο από τα ίδια τα μαθηματικά νούμερα (από τα ίδια τα μαθηματικά) κατά ένα άλλο επίπεδο. Αυτή η απλή φράση έχει ωστόσο μια σημαντική συνέπεια: τα μαθηματικά δεν έχουν θεμέλια στα οποία να στηρίζονται, ακριβώς όπως συμβαίνει και με τις άλλες επιστήμες. Μιας και ξεκινάνε από το ήδη «μαθηματικοποιημένο», αγνοώντας το πώς και το από πού προσκτάται αυτό, τα μαθηματικά χαίρουν της δικιάς τους αυτονομίας και αυτάρκειας, εξαρτώμενα από τα δικά τους προσίδια μέσα και τις δικές τους προσίδιες διαδικασίες σε ότι αφορά την επιτέλεση των καθηκόντων που τα ίδια αναθέτουν στον εαυτό τους και σε ότι αφορά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που τα ίδια επιτυγχάνουν. Έτσι ό,τι η μαθηματική πρακτική καλεί «θεμελιωτικές θεωρίες» δεν είναι θεωρίες που χαίρουν ενός υψηλότερου λογικού, γνωσιολογικού ή μεταφυσικού καθεστώτος᾽ είναι απλώς μαθηματικές θεωρίες με μεγαλύτερο πεδίο δράσης. Όπως συμβαίνει και στις άλλες επιστήμες, αυτές οι θεωρίες αποτελούν διαψεύσιμα και προσωρινά αποτελέσματα των προσπαθειών που αποβλέπουν στο ιδεώδες ενός μοναδικού , αυστηρά ενοποιημένου εννοιολογικού συστήματος το οποίο θα περιέβαλλε στο εσωτερικό του, αν αυτό ήταν δυνατόν, το όλον αντικείμενο της ηπείρου. Δηλαδή, παρά τις φιλοδοξίες τους, το λογικό,

[5] Γνωρίζουμε πως η «αυστηρότητα» αναφέρεται γενικά στην κύρια γνωσιακή αρετή ενός εννοιολογικού συστήματος, ενώ η αντίστοιχη αρετή των συναφών πειραματικών διαδικασιών είναι η «ακρίβεια». Ωστόσο δείξαμε ότι στην περίπτωση των μαθηματικών οι διαδικασίες εννοιολογικής απόδειξης συμπίπτουν με αυτές της πειραματικής επικύρωσης. Κατά συνέπεια η «αυστηρότητα» συνιστά την κοινή αρετή και των δύο, πράγμα που σημαίνει ότι αυτή μετρά επίσης και την επιτυχία με την οποία ένα μαθηματικό εννοιολογικό πραγματοποιεί τη γνωσιακή οικειοποίηση του αντικειμένου του.

[6] Βλ. A. BALTAS, «Ideological Assumptions in Physics: Social Determinations of Internal Structures» στο: A. Fine and P. Machamer (Editors) *PSA 1986*, Philosophy of Science Association, 1987.

το φορμαλιστικό και το ιντουισιονιστικό πρόγραμμα δεν προμήθευσαν, γιατί δεν το μπορούσαν, τα μαθηματικά με ακλόνητα θεμέλια΄ αυτά «απλώς» ανέπτυξαν τα μαθηματικά περισσότερο.

Για να τελειώσουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε γιατί δικαιούμαστε να καλούμε τα μαθηματικά επιστημονική *ήπειρο* κατά επιστήμη. Το όνομα δεν είναι καθαυτό ιδιαίτερα σημαντικό, αλλά η σύντομη εξέταση που αξίζει το ζήτημα μπορεί να ολοκληρώσει αρμονικά την όλη διαπραγμάτευση.

Τα μαθηματικά, λοιπόν, δεν σχηματίζουν ήπειρο επειδή διαφορετικές, σχετικά αυτόνομες, επιστήμες, μπορούν να διακριθούν στο εσωτερικό της, όπως συμβαίνει και με την ήπειρο των φυσικών επιστημών. Από την άλλη μεριά δεν θα δικαιούμαστε να απονείμουμε στα μαθηματικά τον τίτλο της ηπείρου μόνο και μόνο επειδή η έκτασή τους είναι απεριόριστη. Καθώς καμία επιστήμη δεν επιδέχεται σύνορα κλειστά, όλες οι επιστήμες μπορούν να θεωρηθούν απροσδιόριστα ευρείες. Τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ως ισότιμα με το *σύνολο* των φυσικών επιστημών, μόνο γιατί ο τρόπος της γνωσιακής οικειοποίησης που προσιδιάζει σ΄αυτά επιτρέπει ή, σωστότερα, επιβάλλει μια εξαιρετική πολυπλοκότητα ως προς το πώς οι διαφορετικοί κλάδοι τους διαπλέκονται μεταξύ τους.

Υποστηρίξαμε ότι «αντικείμενο», «εννοιολογικό σύστημα» και «πειραματικές συναλλαγές», δεν αναφέρονται στην περίπτωση αυτή σε αυθύπαρκτες οντότητες ή σε διαδικασίες που ορίζονται per se. Είδαμε πως το γεγονός ότι αυτά συνιστούν μόνο λειτουργίες ενός μαθηματικού κειμένου κάνει κάθε μέρος των μαθηματικών να παίζει πότε τον ένα ρόλο και πότε τον άλλο. Είναι αυτό το καταστατικό γνώρισμα που προικίζει τα μαθηματικά με τη συνθετότητα που συζητάμε, γιατί, ανάμεσα στ΄ άλλα, είναι αυτό το χαρακτηριστικό που επιτρέπει το σχηματισμό διαφορετικών θεμελιωτικών θεωριών, όπως αυτές που μόλις μνημονεύσαμε. Όπως σημειώσαμε, αυτέ δεν είναι θεμελιωτικές επειδή παρέχουν δήθεν στα μαθηματικά μια ασφαλή αδιάψευστη βάση. Τουλάχιστον, σύμφωνα με την παρούσα αντίληψη, αυτές είναι θεμελιωτικές μόνο επειδή παρέχουν αρχές που οργανώνουν καθορισμένες ιεραρχίες μεταξύ διαφόρων μαθηματικών κλάδων. Για παράδειγμα, η θεωρία των συνόλων είναι θεμελιωτική γιατί παρέχει ιεραρχίες όπως η ακόλουθη: σύνολα, σύνολα εφοδιασμένα με μια εσωτερική πράξη, ομάδες, συνεχείς ομάδες, ομάδες Lie. Αυτή είναι ιεραρχία η οποία ξεκινάει από το «αφηρημένο», όπου οι ενεχόμενες έννοιες είναι «φτωχές», δηλαδή φέρουν λίγους καθορισμούς, και φτάνει στο «συγκεκριμένο», όπου οι ενεχόμενες έννοιες είναι αντίστοιχα «πλουσιότερες». Αλλά αυτό που οφείλουμε να υπογραμμίσουμε είναι το ότι ούτε αυτή η ιεραρχία είναι μοναδική, ούτε η θεωρία συνόλων η μόνη θεμελιωτική θεωρία. Οργανωτικές αρχές και συνακόλουθες ιεραρχίες, βασισμένες σε ειδικά τμήματα της λογικής και των «μεταμαθηματικών» (τα οποία, κατά την παρούσα οπτική, συνιστούν απλώς πρόσθετους κλάδους των ίδιων των μαθηματικών), για να μην αναφέρω αυτές που προέρχονται από το ιντουισιονιστικό πρόγραμμα ή από διάφορες περατοκρατικές προσεγγίσεις, είναι εξίσου νόμιμες και, στο βαθμό που ξεχνάμε τις φιλοσοφικές μας προτιμήσεις, για να μην πω τις ιδεολογικές μας προκαταλήψεις, εξίσου καλά θεμελιωμένες. Τα μαθηματικά, λοιπόν, συνιστούν μαθηματική ήπειρο, και όχι απλώς επιστήμη, γιατί μπορούν να οργανωθούν εσωτερικά και από πολλές, ενδεχομένως απείρως πολλές, διαφορετικές μαθηματικές σκοπιές. Και αποτελούν *επιστημονική* ήπειρο γιατί αυτά όντως υπάγονται στην ανυπότακτη έννοια «επιστήμη» την οποία προσπαθήσαμε να σκιαγραφήσουμε αλλού. [7]

[7] Βλ., π.χ., Α. ΜΠΑΛΤΑ, «Πρόταση για τη συγκρότηση της έννοιας “Επιστήμη”, Λόγου Χάριν, 2, 1991, σ. 37-72.

Για τη διπλή σημασία της <u>παραγωγής</u>: η αποδεικτική επιστήμη ως κοινωνική πρακτική

Γιώργος Φουρτούνης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Επιτρέψτε μου να ξεκινήσω με ορισμένες διευκρινήσεις. Πρώτον, το κείμενο που ακολουθεί είναι γραμμένο από τη σκοπιά της φιλοσοφίας της επιστήμης εν γένει. Δεν αναφέρεται ειδικώς στα μαθηματικά. Έχω την πολυτέλεια, ωστόσο, να αξιοποιήσω το κείμενο του Αριστείδη Μπαλτά που προηγήθηκε,[1] και το οποίο υποστήριξε τον *επιστημονικό χαρακτήρα των μαθηματικών*. Συμμερίζομαι απολύτως αυτή τη θέση, στο μέτρο ακριβώς που, όπως θα φανεί, δεν δέχομαι τη διάκριση μεταξύ συστήματος και ερμηνείας, διάκριση που υποβαστάζει τόσο την κυρίαρχη αντίληψη περί επιστήμης όσο και τον αποκλεισμό των μαθηματικών από αυτήν. Το κείμενο του Α. Μπαλτά μου επιτρέπει να θεωρώ, λοιπόν, ότι όλα όσα θα υποστηρίξω ισχύουν, *mutatis mutandis*, και για τα μαθηματικά --και ως εκ τούτου, να μην αισθάνομαι «εκτός θέματος». Δεύτερον, σε όσα ακολουθούν θα χρησιμοποιήσω το επιχείρημα υπό μια έννοια που το *αντιπαραθέτει* με την απόδειξη και, γενικότερα, με την λογική παραγωγή. *Δεν* θα το εκλάβω, λοιπόν, με την έννοια που μας επιτρέπει να κάνουμε λόγο για *παραγωγικό επιχείρημα*, ειδική έκφανση της οποίας θα μπορούσε να θεωρηθεί η απόδειξη, θεωρούμενη ως ένα λογικώς έγκυρο παραγωγικό επιχείρημα χωρίς προκείμενες, πέραν των (τυχόν) αξιωμάτων του συστήματος. Όπως θα γίνει κατανοητό στις αμέσως επόμενες γραμμές, εκλαμβάνω το επιχείρημα υπό τη ρητορική του έννοια και, ως εκ τούτου, κατ' αντιπαράθεση με την απόδειξη.

[1] Α. Μπαλτάς, «Το επιστημονικό καθεστώς των μαθηματικών ή συνιστούν τα μαθηματικά 'επιστημονική ήπειρο';». Στον παρόντα τόμο.

Απόδειξη και επιχείρημα στη φιλοσοφία της επιστήμης

Σύμφωνα με μια κυρίαρχη άποψη, έχουμε συνηθίσει να συνδέουμε την απόδειξη με την *καθολική εγκυρότητα,* να προσλαμβάνουμε δηλαδή την *ορθολογικότητα* και την *αντικειμενικότητα* της συναφούς λογικής πράξης με όρους *ανιστορικότητας* και την *υπερκοινωνικότητας*. Επίσης, η απόδειξη συσχετίζεται με την *αλήθεια* ή τη *γνώση*· ως προς αυτόν τον τελευταίο συσχετισμό, μπορούμε να διακρίνουμε δύο γενικές εκδοχές. Αφ' ενός, μια *υποστασιακή* αντίληψη, σύμφωνα με την οποία *υπάρχουν* αλήθειες (*αφ' εαυτών* αληθείς ιδέες, προτάσεις, ισχυρισμοί, πεποιθήσεις κ.λπ.), τις οποίες οικειοποιούμαστε δια της απόδειξης, αντίληψη που μπορεί να αναχθεί στον Πλάτωνα και τον διερευνητικό ορισμό της γνώσης ως «δικαιολογημένης αληθούς πεποίθησης»[2]. Αφ' ετέρου, μια πιο σύγχρονη αντίληψη, που συνεχίζει να διέπει μεγάλο μέρος της σχετικής φιλολογίας και στην οποία κυρίως θα επικεντρωθούμε, την οποία θα μπορούσαμε να ονομάσουμε *φορμαλιστική* αντίληψη. Αυτή συσχετίζει ουσιωδώς την απόδειξη με ένα *τυπικό σύστημα·* πρόκειται δηλαδή για μια αντίληψη όπου η φύση της απόδειξης, και γενικότερα της λογικής παραγωγής, συνυφαίνεται με τη φύση της τυπικής συστημικότητας. Η αντίληψη αυτή διακρίνει δύο επίπεδα συστημικής *εγκυρότητας*: πρώτον, μια *συντακτική* εγκυρότητα, σύμφωνα με την οποία λογική *παραγωγή* θεωρείται μια ακολουθία καλώς σχηματισμένων τύπων ενός συστήματος στην οποία η τελευταία από αυτές (το συμπέρασμα) είναι *έγκυρη στο εν λόγω σύστημα* εάν έπεται από τις προηγούμενες (προκείμενες) και τα τυχόν αξιώματα του συστήματος, βάσει των κανόνων συμπερασμού του συστήματος· στο πλαίσιο αυτό η απόδειξη είναι μια ειδική περίπτωση λογικής παραγωγής, όπου ένα *θεώρημα* προκύπτει μόνον από τα αξιώματα του συστήματος και τους κανόνες συμπερασμού, χωρίς περαιτέρω προκείμενες· σε όσα ακολουθούν, δεν θα επιμείνουμε σε αυτήν την τελευταία διάκριση και θα κάνουμε λόγο αδιακρίτως για συντακτική εγκυρότητα, λογική παραγωγή και απόδειξη. Δεύτερον, μια *σημασιολογική* εγκυρότητα, όπου το συμπέρασμα είναι έγκυρο εάν είναι *αληθές* σε όλες τις *ερμηνείες* του συστήματος στις οποίες οι προκείμενες (και τα αξιώματα) είναι *αληθείς.*[3]

---

[2] Πλάτων, *Θεαίτητος · Μένων* .
[3] Susan Haack, *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, Cambridge 1978

Οι δύο αυτές εκδοχές, η υποστασιακή και η φορμαλιστική, μοιράζονται μια βασική παραδοχή: *την αποσύνδεση της αλήθειας και της απόδειξης* (ή, αν προτιμάτε, τον δευτερογενή, επουσιώδη και εξωτερικό συσχετισμό τους). Στην πρώτη περίπτωση, η απόδειξη είναι η μέθοδος πρόσβασης σε αυθύπαρκτες αλήθειες που, ως τέτοιες, δεν χρειάζονται ουσιωδώς την απόδειξη· στη δεύτερη, η αλήθεια κατά κάποιον τρόπο «επισυνάπτεται» στη συστημική απόδειξη μέσω της *ερμηνείας* του συστήματος. Σε κάθε περίπτωση, η αλήθεια έχει να κάνει με την πρόσβαση στην ουσία των όντων. Δηλαδή, οι δύο αντιλήψεις μοιράζονται μια ουσιολογική και υπερβατική γνωσιολογία, όπου η αλήθεια/γνώση ορίζεται ως σχέση προς τα «εξωτερικά» αντικείμενα.

Από την άλλη πλευρά, το επιχείρημα (στο μέτρο τουλάχιστον που νοείται κατ' αντίθεση προς την απόδειξη) γίνεται αντιληπτό με όρους *σχετικής* εγκυρότητας. Το επιχείρημα, υπ' αυτήν την έννοια, δεν έχει τον αναγκαστικό, καθολικά δεσμευτικό χαρακτήρα της απόδειξης: σε κάθε επιχείρημα μπορεί πάντοτε να αντιταχθεί ένα αντεπιχείρημα· η διαφωνία ακόμα και στο πλέον ισχυρό επιχείρημα είναι λογικώς δυνατή. Εάν οι αποδείξεις παραπέμπουν στη λογική, τα επιχειρήματα έχουν να κάνουν μάλλον με τη ρητορική και στοχεύουν στην πειθώ. Η ορθολογικότητα και η αντικειμενικότητά τους είναι μετριασμένες, νοθευμένες από ανορθολογισμό και μεροληψία. Το επιχείρημα δεν τερματίζει τον διάλογο· ως εκ τούτου, ο τόπος του είναι η *πόλις*, η πολιτική –με άλλους όρους, η κοινωνία και η ιστορία, όθεν και η ουσιώδης σχετικότητά του.

Εάν δεχθούμε, τώρα, αυτήν την κατάστρωση του αντιθετικού διπόλου μεταξύ απόδειξης και επιχειρήματος, θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε υπό το πρίσμα της μια άκρως σχηματική --και άρα ριψοκίνδυνη-- ανασυγκρότηση των περιπετειών και διαμαχών της φιλοσοφίας της επιστήμης. Ξεκινώντας από τη γενική τοποθέτηση που μπορούμε, *ακόμα και σήμερα*, να προσδιορίσουμε ως κυρίαρχη ή «αποδεκτή» άποψη περί επιστήμης, δηλαδή την προβληματική που έχει τις ρίζες της στον Λογικό Θετικισμό και η οποία καθόρισε την αγγλοσαξωνική φιλοσοφία της επιστήμης μέχρι, τουλάχιστον, και την πέμπτη δεκαετία του $20^{ου}$ αιώνα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή θέλησε να εξοβελίσει το επιχείρημα προς όφελος της απόδειξης ως όρο για την καθολική εγκυρότητα, την ορθολογικότητα και την αντικειμενικότητα της γνώσης. Ο τρόπος ήταν η αυστηρή τυποποίηση του συστήματος, όσον αφορά τη συντακτική διάσταση, και η ελαχιστοποίηση των επιστημικών και οντολογικών δεσμεύσεων, όσον αφορά τη σημασιολογική διάσταση --δηλαδή, η εκ των προτέρων προφύλαξη της επιστημονικής γλώσσας έναντι του (λογικού) σφάλματος και του (επιστημικού) ψεύδους. Είναι προφανές ότι η στάση αυτή, στο μέτρο που προϋποθέτει τη φορμαλιστική αντίληψη περί απόδειξης, αποδέχεται πλήρως την αποσύνδεση της απόδειξης και της αλήθειας, του συστήματος και της ερμηνείας του --μεταξύ άλλων και με τη μορφή της αποσύνδεσης της λογικο-παραγωγικής πραγμάτευσης και της *επικύρωσης* των επιστημονικών υποθέσεων.

Θα μπορούσαμε να πούμε, στη συνέχεια, και πάντα από τη σκοπιά που μας ενδιαφέρει εδώ, ότι η λεγόμενη ιστορικιστική στροφή, που ήρθε να αμφισβητήσει την κυριαρχία της προηγούμενης άποψης και να καταδείξει τα όρια του εγχειρήματός της, επιχειρεί να δεξιωθεί το επιχείρημα στη θεωρία της επιστήμης. Αυτό γίνεται, κατ' αρχάς, με τον περιορισμό και την περιχαράκωση της απόδειξης στο πλαίσιο της επιστημονικής συνέχειας ή της «κανονικής επιστήμης» (σύμφωνα με την ορολογία του Κουν). Η «ιδιόρρυθμη επιστήμη» (πάντα κατά Κουν), όμως, και ακόμα περισσότερο η επιστημονική ασυνέχεια, παύει να διέπεται από την τυπική ορθολογικότητα: καμία αποδεικτική διαδικασία δεν ενέχεται στην αλλαγή Παραδείγματος (για να επιμείνουμε στην ορολογία του Κουν).[4] Είναι πλέον η μη-αναγώγιμη ώρα του επιχειρήματος, της ρητορικής, της πειθούς. Η ανασυγκρότηση από τον Φεγιεράμπεντ[5] της *επιχειρηματολογίας*, ακριβώς, του Γαλιλαίου έναντι των αριστοτελικών συγκαιρινών του, αποτελεί μια κλασική πλέον απεικόνιση αυτής της θέσης. Η απόδειξη και το επιχείρημα οριοθετούνται κατά τρόπο εξωτερικό, αλλά ήδη το επιχείρημα αρχίζει να εδραιώνει την κυριαρχία του: η αποδεικτική διαδικασία υποβαστάζεται από μια δομή, από μια «κοίτη» βεβαιότητας,[6] η οποία, ως τέτοια, δεν εμπίπτει στην αρμοδιότητα της απόδειξης.

[4] T.S. Kuhn, *Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*. Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη 1981.
[5] P. Feyerabend, *Ενάντια στη μέθοδο*. Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη 1983.
[6] L. Wittgenstein, *On Certainty*. Blackwell, Oxford (1969).

Η ιστορικιστική στροφή, ακολουθώντας εν πολλοίς την ίδια τη δυναμική της, θα εκβάλλει στην «κοινωνικο-πολιτισμική στροφή» στη θεωρία της επιστήμης. Από τη δική μας σκοπιά, θα άξιζε τον κόπο να διακινδυνεύσουμε τον ισχυρισμό ότι η τελευταία αρνείται τη Κουνιανή διάκριση μεταξύ κανονικής και ιδιόρρυθμης επιστήμης, πράγμα που ολοκληρώνει την κυριαρχία του επιχειρήματος επί της απόδειξης, καθώς χάνεται πλέον κάθε αναφορά στην καθολική εγκυρότητα, την ορθολογικότητα και την αντικειμενικότητα της επιστήμης. Η επιστήμη εκλαμβάνεται πλέον ως μια κοινωνική πρακτική, μεταξύ άλλων, η οποία, όπως κάθε κοινωνική πρακτική, διέπεται από κοινωνικώς καθορισμένα και ιστορικώς μεταβλητά κριτήρια, κανόνες, αξίες, κ.λπ.[7] Τα παράγωγα αυτής της πρακτικής δεν συνιστούν γνωσιακά επιτεύγματα, αλλά κοινωνικές κατασκευές, που εξαρτώνται, αντανακλούν ή συμπυκνώνουν συμφέροντα, συμβάσεις, παραδόσεις, συσχετισμούς δύναμης κ.λπ.· η νόρμα τους είναι η κοινωνική αποτελεσματικότητα και όχι η αλήθεια. Η ορθολογική πραγμάτευση δίνει έτσι τη θέση της στην κοινωνική διαπραγμάτευση, η απόδειξη στο επιχείρημα. Ο λόγος της επιστήμης οφείλει να εξηγείται «συμμετρικά»,[8] δηλαδή όχι δια της προνομιακής επίκλησης του ορθού λόγου, αλλά ως ένας λόγος (discourse) όπως όλοι οι άλλοι.

Σε όλη αυτήν την πορεία, που πολύ σχηματικά αποπειραθήκαμε να ανασυγκροτήσουμε εδώ, η απόδειξη και το επιχείρημα είτε εκτοπίζονται και αποκλείονται αμοιβαίως, προς όφελος της μίας ή του άλλου, είτε, στην καλύτερη περίπτωση, συνυπάρχουν διατηρώντας όμως τελείως διακριτές επικράτειες και αρμοδιότητες· σε κάθε περίπτωση, εμφανίζονται ως δύο ετερογενείς και ασύμβατες διαδικασίες. Και δεδομένου ότι το δίπολο αυτό παραπέμπει στο δίπολο μεταξύ ενός υπερκοινωνικού και ανιστορικού ορθολογισμού και αντικειμενισμού, αφ' ενός, και των κοινωνικό-ιστορικών προσεγγίσεων, αφ' ετέρου, θα μπορούσαμε να πούμε το ίδιο πράγμα λέγοντας ότι, σε κάθε περίπτωση, μοιάζει να μην μπορούμε να κρατήσουμε μαζί δύο βασικές όσο και αναπόφευκτες διαισθήσεις μας που αφορούν την επιστήμη (ή, έστω, να διαχειρισθούμε φιλοσοφικά την μεταξύ τους ένταση): αφ' ενός, αυτήν που, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο,

[7] A. Pickering, *Constructing Quarks: A Sociological History of Particle Physics*. Edinburgh University Press, Edinburgh (1984)
[8] D. Bloor, *Knowledge and Social Imagery*. University of Chicago Press, Chicago (1991).

αντιλαμβάνεται την επιστήμη με όρους *αποδεδειγμένης γνώσης* και, αφ' ετέρου, εκείνη που την αντιμετωπίζει, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, ως *κοινωνική πρακτική*. Μοιάζει να μην μπορούμε να συναρθρώσουμε, σε μια ενιαία και συνεκτική επιστημολογία, την ορθολογικότητα και την αντικειμενικότητα, από τη μια μεριά, και τον κοινωνικό και ιστορικό προσδιορισμό, από την άλλη, της επιστήμης.

Ωστόσο, αυτό που εκ πρώτης όψεως μοιάζει να συνιστά μια ασυμφιλίωτη αντίθεση μεταξύ δύο αντίπαλων αντιλήψεων, στην ουσία υποκρύπτει μια βαθύτερη σύμπτωση. Τόσο η ανιστορική-υπερκοινωνική αντίληψη, όσο και η ιστορική-κοινωνική, μοιράζονται την ίδια προϋπόθεση, με την οποία ξεκινήσαμε την κατάστρωση της συζήτησής μας: τη *φορμαλιστική* αντίληψη περί συστήματος και απόδειξης. Και οι δύο εκλαμβάνουν την αποδεικτική ορθολογικότητα με όρους τυπικότητας, δηλαδή με όρους αφηρημένης συστημικότητας: *αφηρημένης*, αφ' ενός ως προς την κοινωνία και την ιστορία και, αφ' ετέρου, ως προς τη γνώση και την αλήθεια. Με άλλους όρους, και οι δύο συμμερίζονται την *υπερβατικότητα* του αποδεικτικού συστήματος, από τη μια μεριά, και της αλήθειας ή της γνώσης, από την άλλη. Όπως μάλιστα είχαμε υποδείξει στην αρχή, οι δύο αυτές όψεις της υπερβατικότητας (όπου το τυπικό σύστημα εκλαμβάνεται με όρους καθολικής αναγκαιότητας, ενώ η αλήθεια επικυρώνεται ως εκ της πρόσβασής της στην ουσία των πραγμάτων) είναι εγγενώς συσχετισμένες: αποτελούν το κοινό παραγόμενο της διάκρισης ανάμεσα στη συντακτική και τη σημασιολογική διάσταση της εγκυρότητας, στην τυπικότητα του συστήματος και την ερμηνεία του.

Ίσως δεν είναι προφανές με ποιο τρόπο οι ιστορικές και κοινωνικές προσεγγίσεις εξακολουθούν να δεσμεύονται από αυτές τις προϋποθέσεις, όταν μοιάζουν να απορρίπτουν την κυρίαρχη, υπερκοινωνική και ανιστορική, αντίληψη στην οποία αυτές εκφράζονται ρητά. Ωστόσο, είναι συνηθισμένο στην ιστορία της φιλοσοφίας η πλήρης άρνηση μιας συγκροτημένης θέσης να σέβεται, *ακριβώς δια της εν λόγω άρνησης*, τη βαθύτερη λογική της θέσης την οποία αρνείται: είναι σαν να κλείνουμε μια μαθηματική παράσταση σε αγκύλες και να βάζουμε αρνητικό πρόσημο· η άρνηση τότε διατηρεί στο ακέραιο τη δομή της παράστασης που αρνούμαστε. Όταν αρνούμαστε την απόδειξη επειδή απορρίπτουμε την αφηρημένη τυπικότητα, την καθολική αναγκαιότητα και εγκυρότητα, δηλαδή όλα όσα η φορμαλιστική άποψη εκλαμβάνει ως την ουσία της απόδειξης, είναι προφανές ότι *επί της ουσίας* αποδεχόμαστε τη φορμαλιστική αντίληψη περί απόδειξης. Όταν η κοινωνική και ιστορική προσέγγιση αποποιείται την ορθολογικότητα και την αντικειμενικότητα στο όνομα του κοινωνικού και ιστορικού χαρακτήρα της επιστήμης, είναι προφανές ότι αποδέχεται τον υπερκοινωνικό και ανιστορικό χαρακτήρα της επιστημονικής ορθολογικότητας και αντικειμενικότητας. Σε κάθε περίπτωση, αποδεχόμαστε ως μόνο δυνατό νόημα της απόδειξης, της ορθολογικότητας και της αντικειμενικότητας αυτό που οι εν λόγω όροι αποκτούν στο πλαίσιο του φορμαλιστικού, υπερκοινωνικού και ανιστορικού αντικειμενισμού και ορθολογισμού. Αρνούμαστε τη δυνατότητα να υπάρχει ένα μη-φορμαλιστικό νόημα της απόδειξης, ένα μη-αντικειμενιστικό και μη-ορθολογιστικό νόημα της αντικειμενικότητας και της ορθολογικότητας. Εν ολίγοις, όταν η κυρίαρχη αντίληψη περί επιστήμης θέτει το δίλημμα «αποδεδειγμένη γνώση» ή «κοινωνική πρακτική», και η ίδια διαλέγει την «αποδεδειγμένη γνώση», είναι προφανές ότι *δεν* την ακυρώνουμε επιλέγοντας αντίστροφα την «κοινωνική πρακτική» και απορρίπτοντας την αποδεικτικότητα· το ακριβώς αντίθετο, εξακολουθούμε να δεσμευόμαστε από αυτήν.

Θα υποστηρίξω ότι υπήρξε και υπάρχει μια συγκεκριμένη επιστημολογική αντίληψη η οποία, πράγματι, δεν δεσμεύεται από αυτήν την κυρίαρχη κατάστρωση του προβλήματος της επιστήμης, δηλαδή μια συγκεκριμένη επιστημολογία που αψηφά το δίλημμα «κοινωνική πρακτική» ή «αποδεδειγμένη γνώση», που δεν είναι υποχρεωμένη να επιλέξει μεταξύ των δύο, αλλά, αντιθέτως, επιχειρεί να κρατήσει μαζί και να συναρθρώσει αμοιβαία και τις δύο αυτές τοποθετήσεις περί επιστήμης. Πράγμα το οποίο, βεβαίως, όπως θα προσπαθήσουμε να δείξουμε, συνεπάγεται ότι είναι υποχρεωμένη να εννοιολογήσει διαφορετικά την ορθολογικότητα και την αντικειμενικότητα, τη γνώση και την αλήθεια, τη συστημικότητα και την ερμηνεία, την απόδειξη και την επικύρωση· με δυο λόγια, είναι υποχρεωμένη να αποδιαρθρώσει τη δομή, τις βαθύτερες παραδοχές, της κυρίαρχης αντίληψης που μόλις αναφέραμε και οι οποίες διέπουν τη φαινομενική αντιπαλότητα μεταξύ των αντικειμενιστικών και ορθολογιστικών προσεγγίσεων της επιστήμης, από τη μια μεριά, και των ιστορικο-κοινωνικών, από την άλλη. Αυτός, κατά τη γνώμη μου, είναι και ο λόγος που εξηγεί ένα αξιοσημείωτο σύμπτωμα, που δεν έχει περάσει απαρατήρητο,[9] το γεγονός δηλαδή ότι η εν λόγω επιστημολογία, παρ’ όλο που αναπτύχθηκε παράλληλα με τις περιπέτειες του κυρίαρχου ρεύματος της αγγλοσαξονικής φιλοσοφίας της επιστήμης, και εν πολλοίς αναμετρήθηκε με τα ίδια διακυβεύματα, αγνοήθηκε σχεδόν πλήρως από αυτήν. Μιλάμε, βεβαίως, για την ιδιάζουσα γαλλική επιστημολογική παράδοση του Γκαστόν Μπασελάρ, του Ζορζ Καγκιλέμ, του Λουί Αλτουσέρ κ.ά.. Σε όσα ακολουθούν, θα προσπαθήσω να υποστηρίξω τους πιο πάνω ισχυρισμούς για αυτήν την επιστημολογία, ειδικότερα έτσι όπως την επεξεργάζεται ο Αλτουσέρ. Συγκεκριμένα, θα προσπαθήσω να αναπτύξω τις προϋποθέσεις και τις συνέπειες της θέσης ότι *η επιστήμη συνιστά μια διακριτή κοινωνική πρακτική, η οποία παράγει (αποδεδειγμένες) γνώσεις ή αλήθειες*.

Η επιστημονική πρακτική και το αντικείμενό της

Ας ξεκινήσουμε από τον προσδιορισμό της επιστήμης ως κοινωνικής πρακτικής· εδώ η έννοια της *κοινωνικής πρακτικής* δεν χρησιμοποιείται μεταφορικά, αλλά κατά τον πλέον κυριολεκτικό και αναμφίλεκτο τρόπο, δηλαδή ως κοινωνική διαδικασία *παραγωγής*, η οποία κάθε φορά επιστρατεύει ειδική ανθρώπινη *εργασία*, στο πλαίσιο καθορισμένων κάθε φορά κοινωνικών σχέσεων, για το *μετασχηματισμό* μιας ειδικής *πρώτης ύλης* σε ένα ειδικό *προϊόν*.[10] Θα μπορούσαμε να πούμε το ίδιο πράγμα κάνοντας λόγο για εργασία μετασχηματισμού ενός, ειδικού κάθε φορά, *αντικειμένου*, του *επιστημονικού αντικειμένου* όσον αφορά την *επιστημονική* πρακτική, όψεις του οποίου αποτελούν τόσο η πρώτη ύλη όσο και το προϊόν. Στο «εσωτερικό» του αντικειμένου της εκάστοτε πρακτικής, υφίσταται μια *υλική συνέχεια*, αφ’ ενός, αλλά και μια *ποιοτική ασυνέχεια*, μια *τομή*, αφ’ ετέρου, ανάμεσα στην πρώτη ύλη και το προϊόν: από υλική άποψη, η πρώτη ύλη και το προϊόν είναι ομοιογενή, ενώ από ποιοτική άποψη, ακριβώς δυνάμει του *μετασχηματισμού* που μεσολαβεί, είναι ανομοιογενή. Τόσο η υλική συνέχεια (ομοιογένεια) όσο και η ποιοτική ασυνέχεια (ανομοιογένεια) λαμβάνουν χώρα στο πλαίσιο του ειδικού αντικειμένου της πρακτικής.

---

[9] D. Lecourt, *Marxism and Epistemology*. New Left Books, London (1975)· M. Tiles, *Μπασελάρ – Επιστήμη και αντικειμενικότητα.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (1999).

[10] L. Althusser, *For Marx*. Verso, London (1977).

Με δεδομένο, τώρα, ότι η επιστημονική πρακτική συνιστά διαδικασία παραγωγής του ειδικού προϊόντος που ονομάζουμε επιστημονικές *γνώσεις* ή *αλήθειες*, μπορούμε να αρχίσουμε ήδη να αποκομίζουμε και να αξιολογούμε τις πρώτες σημαντικές συνέπειες: η υλική συνέχεια μεταξύ πρώτης ύλης και προϊόντος συνεπάγεται ότι *δεν* υφίσταται οντολογικό χάσμα ανάμεσα στην πρώτη ύλη και το προϊόν της επιστημονικής πρακτικής. Δεν μπορούμε να νοήσουμε, από τη μια μεριά, την πρώτη ύλη ως ένα «υλικό» εισερχόμενο, ανεξαρτήτως *δεδομένο* (τα περίφημα επιστημονικά ή εμπειρικά δεδομένα, τα θετικά γεγονότα) και, από την άλλη, το προϊόν ως «ιδεατής» υφής έννοιες ή «νοητικές» αναπαραστάσεις. Η επιστημονική πρακτική δεν παρεμβαίνει ανάμεσα σε μια «υλική» πρώτη ύλη, «υλικές» οντότητες τοποθετημένες σε έναν χώρο αιτιακών σχέσεων, από τη μια μεριά, και, σε ένα «ιδεατό» προϊόν, «νοητικές» οντότητες, τοποθετημένες σε έναν χώρο λογικών σχέσεων, από την άλλη. Η θέση περί επιστήμης ως πρακτικής αντιτίθεται, λοιπόν, εξ αρχής, στην *εμπειριστική* και *θετικιστική* αντίληψη περί επιστήμης (που, ας σημειωθεί, είναι στενά συνυφασμένη με την αντίληψη, στην οποία ασκεί κριτική ο Α, Μπαλτάς,[11] ότι τα μαθηματικά *δεν* συνιστούν επιστήμη στο μέτρο ακριβώς που δεν εμπίπτουν σε αυτήν την οντολογική ετερογένεια, δεν έχουν δηλαδή –σύμφωνα με την τρέχουσα διατύπωση- «πραγματικό» αντικείμενο).

Ανάμεσα στην πρώτη ύλη και το προϊόν, λοιπόν, υφίσταται οντολογική ομοιογένεια: είναι και τα δύο της ίδιας υφής. Ωστόσο και εδώ η οντολογική αντίθεση της «ύλης» και της «νόησης», του «υλικού» και του «ιδεατού», θεωρημένων ως ασύμβατων κατηγοριών που κατανοούνται δια του αμοιβαίου αποκλεισμού τους είναι ανεπαρκής. Έτσι, πρώτον, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε την επιστημονική πρακτική σύμφωνα με την εν γένει κατασκευασιοκρατική ή ανθρωπολογική προσέγγιση, δηλαδή ως την επιστημονική ή εργαστηριακή «μορφή ζωής», που παράγει τα δικά της υλικά προϊόντα, ειδικά επιστημονικά, εργαστηριακά ή πειραματικά *τεχνήματα*, και η οποία, όπως κάθε μορφή ζωής, εκκρίνει, ως παρα-προϊόντα ή επιφαινόμενα, συναφείς ιδέες, αναπαραστάσεις, πεποιθήσεις κ.λπ., ανάμεσα στις οποίες συγκαταλέγονται και αυτές που ερμηνεύουν αυτά τα τεχνήματα ως

[11] Α. Μπαλτάς, ό.π.

γεγονότα και τη νοητική διευθέτησή τους ως γνώσεις ή αλήθειες.[12] Και αυτό γιατί, ως εκ της υποθέσεώς μας, οι επιστημονικές γνώσεις *είναι* τα ίδια τα *προϊόντα* της επιστημονικής πρακτικής. Δεύτερον, εάν η επιστημονική πρακτική δεν μπορεί να νοηθεί ως καθαρά «υλική», δεν μπορεί εξίσου να νοηθεί και ως καθαρά «νοητική», όπως θα ήθελε η κυρίαρχη φορμαλιστική αντίληψη περί *λογικής παραγωγής*, τελείως ξένη με κάθε έννοια πρακτικής. Και αυτό γιατί στην ίδια την έννοια της πρακτικής ενέχεται η αδράνεια και η αντίσταση του αντικειμένου της, δηλαδή η δυσκολία, ο κόπος και ο πόνος που συνεπάγεται ο μετασχηματισμός ενός απείθαρχου υλικού, η *εργασία*, προϋποθέτει δηλαδή μια κάποια *υλικότητα* του αντικειμένου της, και ως εκ τούτου ενέχει ουσιωδώς μια χρονικότητα, μια ιστορικότητα. Αντιθέτως, μια καθαρά λογική παραγωγή θα ήταν ουσιωδώς άυλη, χωρίς αδράνεια και τριβές, χωρίς αντίσταση και δυνατότητα εκτροπής, εγγενώς α-χρονική, όπου όλοι οι λογικοί μετασχηματισμοί, το παραγωγικό δυναμικό του συστήματος, θα εμπεριεχόταν εξ αρχής στην ίδια του τη συγκρότηση, προσχηματισμένο ήδη από την αφετηρία του· παραγωγή που δεν παράγει τίποτε, μετασχηματισμοί που δεν μετασχηματίζουν τίποτα --όθεν και η θεμελιώδης φορμαλιστική παραδοχή ότι οι λογικο-παραγωγικοί μετασχηματισμοί δεν δίνουν ποτέ τίποτε νέο.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τις προδιαγραφές της πρωταρχικής σύλληψης της επιστήμης ως επιστημονικής πρακτικής, οι αμιγείς οντολογικές κατηγορίες του «ιδεατού» και του «υλικού», της «νόησης» και της «ύλης», και συνακόλουθα, του «υποκειμένου» (της γνώσης) και «αντικειμένου» (της γνώσης), της «νοητικής» θεωρίας και της «υλικής» πράξης, της «αναπαράστασης» και της «παρέμβασης»[13] κ.λπ. είναι ανεπαρκείς για να συλλάβουν την ιδιάζουσα υφή ή *υλικότητα* του επιστημονικού αντικειμένου. Πράγμα που σημαίνει, αντιστρόφως, ότι το επιστημονικό αντικείμενο είναι, ταυτοχρόνως, υλικό *και* ιδεατό. Μπορούμε να εισαγάγουμε εδώ τη θέση, στην οποία αναφέρθηκε και ο Α. Μπαλτάς,[14] περί αμοιβαίας συγκρότησης μεταξύ *επιστημονικού αντικειμένου* και *εννοιολογικού συστήματος* κάθε επιστήμης, θέση που αίρει τόσο τη σύλληψη του επιστημονικού αντικειμένου ως αμιγώς

---

[12] B. Latour & S. Woolgar, *Laboratory Life: The Construction of Scientific Facts*. Princeton University Press, Princeton (1986).

[13] I. Hacking, *Αναπαριστώντας και παρεμβαίνοντας*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2002.

[14] Α. Μπαλτάς, ό.π.

υλικού όσο και τη συμμετρική της σύλληψη των εννοιών και της συστημικότητάς τους με όρους καθαρής νόησης και λογικού χώρου. Πόσο μάλλον που σε αυτήν την αμοιβαία συγκρότηση παρεμβαίνουν πάντοτε οι *πειραματικές διαδικασίες* που κάθε φορά της προσιδιάζουν, οι οποίες μετέχουν τόσο του επιστημονικού αντικειμένου όσο και του εννοιολογικου συστήματος, είναι δηλαδή επίσης και υλικές και νοητικές. Εν κατακλείδι, η ιδιάζουσα υλικότητα του επιστημονικού αντικειμένου, τέτοια ώστε να απαιτεί μια κοινωνική πρακτική για τον μετασχηματισμό του, χαρακτηρίζεται από μια συστημική υφή, από μια εξίσου ιδιάζουσα *συστημικότητα·* αλλά εδώ θα επανέλθουμε.

Μέχρι εδώ είχαμε εστιάσει στην υλική συνέχεια μεταξύ πρώτης ύλης και προϊόντος της επιστημονικής πρακτικής στο «εσωτερικό» του επιστημονικού αντικειμένου, δηλαδή, πολύ σχηματικά, στο γεγονός ότι η πρώτη ύλη και το προϊόν μπορούν κάθε φορά να κατανοηθούν ως «μέρη» του επιστημονικού αντικειμένου, τα οποία μετέχουν της ιδιάζουσας συστημικής υλικότητάς του. Από τη σκοπιά τώρα της ποιοτικής ασυνέχειας, δηλαδή του ίδιου του μετασχηματισμού, η πρώτη ύλη ορίζεται αρνητικά *ως προς το προϊόν*: η πρώτη ύλη είναι ό,τι δεν είναι το προϊόν, ό,τι δεν έχει γίνει ακόμα προϊόν. Στο μέτρο, λοιπόν, που το προϊόν είναι γνώση ή αλήθεια, η πρώτη ύλη της επιστημονικής πρακτικής είναι μη-γνώση, μη-αλήθεια, «άγνοια», «ψεύδος». Η επιστημονική πρακτική μετασχηματίζει άγνοια σε γνώση· ξαναβρίσκουμε εδώ, από άλλη προοπτική, την αντι-εμπειριστική θέση που έχουμε ήδη εκθέσει: η επιστημονική πρακτική δεν ασκείται επί των πραγμάτων, επί «εξωτερικών» αντικειμένων, αλλά επί μιας πρώτης ύλης, υλικά ομοιογενούς με το ειδικό προϊόν της, τη γνώση, αλλά ποιοτικά ανομοιογενούς, δηλαδή επί της άγνοιας. Μόνο που εδώ, σε αυτό το πλαίσιο, η άγνοια ή το ψεύδος δεν μπορούν να νοηθούν ως καθαρή αρνητικότητα, ως το μηδέν της γνώσης ή της αλήθειας, αλλά συνιστούν *οντότητες*, που χαρακτηρίζονται από μια αδράνεια που τους προσιδιάζει, τέτοια ώστε για να μετασχηματισθούν να απαιτούν μια ειδική πρακτική, δηλαδή αποκτούν μια θετικότητα, μια ιδιάζουσα *υλικότητα*, ακριβώς. Η άγνοια και το ψεύδος δεν συνιστούν απροσδιοριστίες, αλλά προσδιορίζονται: προσδιορίζονται *κοινωνικά*. Χρειάζεται εδώ, λίγο αξιωματικά, να εισαγάγουμε τη θέση ότι η άγνοια και το ψεύδος, στην κοινωνική θετικότητά τους, συσχετίζονται με την ιδεολογία, είναι ιδεολογικής υφής. Δεν μπορούμε εδώ να αναπτύξουμε τις επεξεργασίες του Αλτουσέρ επί της έννοιας της ιδεολογίας, τις οποίες και επικαλούμαστε.[15] Ας πούμε μόνον ότι, σε αυτό το πλαίσιο, η ιδεολογία δεν παραπέμπει σε κάποια βασίλειο των ιδεών, όπως η ετυμολογία του όρου θα μπορούσε να παραπλανήσει, αλλά χαρακτηρίζεται από μια υλικότητα που της προσιδιάζει και αναφέρεται στην κοινωνικά δομημένη ανθρώπινη εμπειρία, στη βιωμένη σχέση των ανθρώπων με τον φυσικό και κοινωνικό κόσμο τους, στον ανθρώπινο-κοινωνικό «βιόκοσμο».

Ωστόσο, πρέπει να έχουμε πάντα κατά νου ότι έχουμε να κάνουμε εδώ με μια κοινωνική «άγνοια», ιδεολογικής προέλευσης, πάντοτε *εσωτερικευμένη* στο συστημικής υφής επιστημονικό αντικείμενο. Εάν, όπως ήδη είπαμε, η πρώτη ύλη (άγνοια) και προϊόν (γνώση) συνιστούν «μέρη» του επιστημονικού αντικειμένου, η επιστημονική πρακτική, ο ειδικός μετασχηματισμός που αυτή επιτελεί, η ποιοτική ασυνέχεια σύμφωνα με την ορολογία μας, *λαμβάνει χώρα μεταξύ του γνωστού και μη-γνωστού «μέρους», αντίστοιχα, του επιστημονικού αντικειμένου*. Η επιστημονική πρακτική μετασχηματίζει άγνοια σε γνώση, και ο εν λόγω μετασχηματισμός επιτελείται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του επιστημονικού αντικειμένου· η επιστημονική πρακτική μετασχηματίζει το μη-γνωστό μέρος του αντικειμένου σε γνωστό.

Επιστημολογικό εμπόδιο και επιστημολογική τομή

Μπορούμε εδώ να εισαγάγουμε τις δύο κομβικότερες ίσως έννοιες της επιστημολογίας που επιχειρούμε να ανασυγκροτήσουμε. Αυτό που εμποδίζει το μη-γνωστό να γίνει γνωστό και καθορίζει τη δυσκολία που προβάλλει στον μετασχηματισμό του, ό,τι «χωρίζει» το μη-γνωστό από το γνωστό και, άρα, αυτό που καθιστά το μη-γνωστό ό,τι είναι, δηλαδή ακριβώς *μη-γνωστό*, ο παράγων της υλικής αντίστασης της πρώτης ύλης και ο παράγων που την προσδιορίζει ως άγνοια, είναι ένα *επιστημολογικό εμπόδιο*. Η υπερνίκηση του επιστημολογικού εμποδίου, από την άλλη πλευρά, η επιτέλεση της ποιοτικής ασυνέχειας μεταξύ πρώτης ύλης και προϊόντος στην οποία έγκειται η ίδια η επιστημονική πρακτική, ο μετασχηματισμός του μη-γνωστού σε γνωστό, συνιστά μια *επιστημολογική τομή*. Είναι προφανές ότι οι δύο αυτές έννοιες είναι σύστοιχες: επιστημολογικό εμπόδιο είναι ό,τι χρειάζεται να υπερνικηθεί για να υπάρξει επιστημολογική τομή και,

[15] L. Althusser, *Θέσεις*. Θεμέλιο, Αθήνα (1978).

αντιστρόφως, επιστημολογική τομή είναι ό,τι υπερνικά επιστημολογικά εμπόδια.

Για την περαιτέρω διερεύνηση αυτών των δύο εννοιών, χρειάζεται να λάβουμε υπ' όψιν ότι κάθε κοινωνική πρακτική, για να υπάρχει, οφείλει να *αναπαράγεται*· ο Α. Μπαλτάς, σε ένα πρόσφατο βιβλίο του, θα συσχετίσει την επιστημονική πρακτική με τη μαρξιστική έννοια του «τρόπου παραγωγής»,[16] για να τονίσει το γεγονός ότι η συναφής διαδικασία παραγωγής, εάν εκληφθεί στο σύνολό της, *είναι αδιαχώριστη από την αναπαραγωγή της*. Πράγμα το οποίο σημαίνει ότι κάθε επιμέρους βήμα μετασχηματισμού, κάθε επιμέρους μετασχηματισμός πρώτης ύλης σε προϊόν, δεν είναι αυτοτελής, αλλά αποτελεί στιγμή της αναπαραγωγής της πρακτικής. Ως εκ τούτου, αυτό που ως προς το παρόν βήμα μετασχηματισμού συνιστά προϊόν θα αποτελέσει ως προς ένα επόμενο πρώτη ύλη. Έτσι, αυτό που η εκάστοτε επιστημολογική τομή παράγει ως γνώση/αλήθεια, θα αποτελέσει άγνοια/ψεύδος ως προς μια επόμενη επιστημολογική τομή. Άρα, ο προσδιορισμός γνώση/αληθές και άγνοια/ψευδές, δεν είναι απόλυτος αλλά αμοιβαίος, *σχεσιακός*. Η σχέση γνωστού και μη-γνωστού, αληθούς και ψευδούς, είναι συγκροτητική των δύο σχετιζόμενων όρων. Η ποιοτική ασυνέχεια δεν συνιστά απλώς το *πέρασμα* από το ψευδές στο αληθές, θεωρούμενα αφ' εαυτών· αντιστρόφως, *το αληθές και το ψευδές συνιστούν αποτελέσματα της ασυνέχειας*. Τίποτε δεν είναι αφ' εαυτού αληθές ή ψευδές, γνώση ή άγνοια· η σχέση προς το *εκάστοτε* ψευδές, το εκάστοτε μη-γνωστό, δηλαδή *η ίδια η επιστημολογική τομή*, είναι ουσιώδης για την αλήθεια του *εκάστοτε* αληθούς, για να είναι γνωστό το *εκάστοτε* γνωστό. Η *διάκριση* αληθούς και ψευδούς είναι αδιαχώριστη από την μετασχηματιστική σχέση τους, από την *παραγωγή* του αληθούς, από την επιστημολογική τομή. Η επιστημολογική τομή είναι, με μια και μόνο κίνηση, *παραγωγή*, *διάκριση* και *επικύρωση* του αληθούς, ως αληθούς, έναντι του ψευδούς, που και αυτό διακρίνεται και ακυρώνεται, ως ψευδές, από την ίδια διαδικασία.

Ωστόσο, όπως είναι προφανές, η σχέση αυτή, παρά το γεγονός ότι είναι αμοιβαίως συγκροτητική, *δεν είναι συμμετρική*. Και αυτό γιατί, για να υπάρξει αυτή η σχέση, πρέπει να έχει υπάρξει ο μετασχηματισμός, η ποιοτική ασυνέχεια, η τομή που θα παράξει το γνωστό, το αληθές. Το

[16] Α. Μπαλτάς, *Για την επιστημολογία του Λουί Αλτουσέρ*. Νήσος, Αθήνα (2002).

γνωστό/αληθές είναι γνωστό/αληθές σε σχέση με το μη-γνωστό/ψευδές· το αντίστροφο όμως δεν ισχύει· για την ακρίβεια, *δεν έχει καν νόημα*, γιατί από τη σκοπιά του ψευδούς το αληθές απλώς δεν υπάρχει. Πράγμα που σημαίνει ότι η ποιοτική ασυνέχεια, η παραγωγή του αληθούς, η διάκριση ανάμεσα στο γνωστό και το μη-γνωστό και η συναφής επικύρωση του γνωστού έναντι του μη-γνωστού, έχει *αναδραστικό* χαρακτήρα: το αληθές διακρίνεται από το ψευδές και επικυρώνεται έναντί του *μόνον κατόπιν εορτής και από τη σκοπιά του αληθούς*. Το αληθές αυτο-διακρίνεται από το ψευδές και αυτο-επικυρώνεται ως αληθές έναντι του ψευδούς.

Αλλά η ενότητα της διαδικασίας παραγωγής με την αναπαραγωγή της έχει μια ακόμα σημαντική συνέπεια. Εφ’ όσον το εκάστοτε γνωστό δίδεται ως πρώτη ύλη στο επόμενο μετασχηματιστικό βήμα, έπεται ότι το γνωστό είναι εξίσου έμφορτο επιστημολογικών εμποδίων προς υπερνίκηση --τα οποία όμως θα αναδειχθούν ως τέτοια μόνον στο πλαίσιο των επόμενων μετασχηματισμών και εκ των υστέρων. Αντιστρόφως, πριν από την επιστημολογική τομή που θα το μετασχηματίσει, το εκάστοτε ψευδές δεν είναι ακόμα ψευδές· είναι απλώς ένα αληθές ως προς ένα προηγούμενο ψευδές, ως προς το δικό του ψευδές. Μακροπρόθεσμα, δηλαδή από τη σκοπιά της αναπαραγωγής της επιστημονικής πρακτικής, όλα αυτά σημαίνουν ότι *το επιστημονικό αντικείμενο είναι συγκροτημένο από (εν δυνάμει) επιστημολογικά εμπόδια·* το επιστημονικό αντικείμενο είναι φτιαγμένο από την ύλη των επιστημολογικών εμποδίων. Ως εκ τούτου, τα επιστημολογικά εμπόδια αποκτούν ένα διπλό πρόσημο. Αφ’ ενός, βεβαίως, «αρνητικό», στο μέτρο που συνιστούν, ακριβώς, εμπόδια για την περαιτέρω παραγωγή γνώσεων. Αφ’ ετέρου, όμως, «θετικό», με την έννοια ότι συνιστούν το αναπόφευκτο και *ανεξάντλητο* συγκροτητικό στοιχείο του επιστημονικού αντικειμένου.

Η επιστημονική συστημικότητα

Ας επιχειρήσουμε τώρα να δώσουμε μια περισσότερο συνθετική εικόνα για τη φύση του επιστημονικού αντικειμένου και των μετασχηματισμών του. Προς τούτο, θα χρειαστεί να ξαναπιάσουμε τα θέματα της συστημικότητας και της ερμηνείας. Όπως έχουμε πει, στο πλαίσιο της κυρίαρχης φορμαλιστικής άποψης είχαμε, από τη μια μεριά, ένα τυπικό σύστημα, *ουσιωδώς ανερμήνευτο*, που δεν αναφέρεται σε τίποτα, δεν μιλά για τίποτε και, ως εκ τούτου, δεν μπορεί να γνωρίσει αφ' εαυτού τίποτα. Το τυπικό σύστημα εμπεριέχει εξ αρχής, προσχηματισμένο, ολόκληρο το παραγωγικό δυναμικό του, δηλαδή όλες τις δυνατότητες συντακτικής ανάπτυξής του. Από την άλλη, το σύστημα αυτό είναι σε θέση να συσχετισθεί με τα «πράγματα», με τα αντικείμενα του εμπειρικού κόσμου, και έτσι να προικισθεί με νόημα και γνωσιακό περιεχόμενο, μόνον δευτερογενώς και κατά τρόπο εξωτερικό, δηλαδή με την *ερμηνεία* του, η οποία κατά κάποιον τρόπο «επισυνάπτεται» στη συστημικότητά του χωρίς να την επηρεάζει ή να την τροποποιεί καθόλου, αφήνοντάς την δηλαδή απολύτως αλώβητη -- εξ ου και η δυνατότητα πολλών ερμηνειών του *ίδιου* συστήματος. Με την ερμηνεία, το σύστημα αναφέρεται στον κόσμο των αντικειμένων, ενώ τα «στοιχεία» του, προικισμένα μέχρι τότε απλώς με συστημική αξία, αποκτούν νόημα και καθίστανται έννοιες. Συστημικότητα και ερμηνεία, έτσι, είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη: οι τυπικοί χειρισμοί, η συντακτική εγκυρότητα, η λογική παραγωγή, άρα και η απόδειξη, ισχύουν ανεξαρτήτως ερμηνείας.

Αντιθέτως, σύμφωνα με την αντίληψη περί επιστημονικής πρακτικής, δεν υφίσταται αυτός ο εξωτερικός, δευτερογενής και επουσιώδης συσχετισμός συστήματος και αντικειμένων: το σύστημα δεν αναφέρεται κατά τρόπο εξωτερικό σε αντικείμενα, αλλά, όπως έχουμε δει, το *εννοιολογικό σύστημα* της επιστήμης και το *επιστημονικό αντικείμενό της* συγκροτούνται αμοιβαίως και συστοιχούν στενά, έτσι ώστε να αποτελούν τις δύο όψεις της ίδιας πραγματικότητας. Το εννοιολογικό σύστημα δεν αναφέρεται εξωτερικώς, δευτερογενώς και επουσιωδώς σε αντικείμενα ή περιοχές αντικειμένων, αλλά, εσωτερικώς, πρωτογενώς και ουσιωδώς αναφέρεται *αποκλειστικά* στο επιστημονικό αντικείμενό του· η *συγκεκριμένη* ερμηνεία του συστήματος είναι αδιαχώριστη από το ίδιο το σύστημα, έτσι ώστε κάθε εναλλακτική ερμηνεία του να είναι αδύνατη. Το εννοιολογικό σύστημα της επιστήμης δεν συγκροτείται ως μία αφηρημένη και κενή περιεχομένου τυπική δομή, αλλά αντίθετα αυτό είναι *πάντοτε-ήδη ερμηνευμένο* --πράγμα που σημαίνει ότι η ερμηνεία και το εμπειρικό νόημα είναι παρόντα και δραστικά ήδη στην πρωταρχική *συγκρότηση* του εννοιολογικού συστήματος. Η *ερμηνεία* δεν είναι εξωγενής και αδιάφορη ως προς τη *συστημικότητα* του συστήματος: το εμπειρικό νόημα δεν επισυνάπτεται στα «στοιχεία» ενός ανεξαρτήτως συγκροτημένου συστήματος, έτσι ώστε να τα μετατρέψει σε έννοιες· αυτές είναι *αείποτε* έννοιες, ενώ το σύστημα χρωστά εν πολλοίς τη συστημικότητα και τη συνεκτικότητά του στην πάντοτε-ήδη ερμηνεία του. Στον βαθμό δε που η εν λόγω συστημικότητα του εννοιολογικού συστήματος συστοιχεί με την ίδια τη συγκρότηση, τη συνοχή και την ομοιοστασία του επιστημονικού αντικειμένου, μπορούμε να πούμε ότι η πρωταρχική παρουσία και δραστικότητα της ερμηνείας, το πάντοτε-ήδη ερμηνεύσιμο και ερμηνευμένο του εννοιολογικού συστήματος, αποτελεί τη συνθήκη ώστε το τελευταίο να συστοιχεί με το επιστημονικό αντικείμενό του. Ως εκ τούτου, το εννοιολογικό σύστημα της επιστήμης δεν εμπίπτει στο ιδεώδες της καθαρής συστημικότητας, θεωρημένης με την κυριολεκτική, τεχνική και τυπική έννοια. Το εννοιολογικό σύστημα δεν διέπεται από την αφηρημένη συστημικότητα που προσιδιάζει σε ένα τυπικό σύστημα· καμία «τυποποίηση» δεν είναι σε θέση να *εξαντλήσει* το εννοιολογικό σύστημα. Και για να κάνουμε ένα ακόμα βήμα προς τον στόχο αυτού του κειμένου, οι συστημικοί μετασχηματισμοί, οι επιστημονικές αποδείξεις, δεν είναι ανεξάρτητες από την ερμηνεία του εννοιολογικού συστήματος, η επιστημονική ορθολογικότητα δεν είναι απλώς μια μέθοδος, ανεξάρτητη του επιστημονικού αντικειμένου.

Αυτή η ουσιώδης διαπλοκή συστημικότητας και ερμηνείας, η εγγενής παρέμβαση της ερμηνείας στην πλέξη του εννοιολογικού συστήματος και στη συγκρότηση του επιστημονικού αντικειμένου, διέπεται από τον καθοριστικό ρόλο των *ιδεολογικών παραδοχών* ή *προ-καταλήψεων*. Χωρίς να μπορούμε να εξαντλήσουμε εδώ το θέμα,[17] ας πούμε ότι πρόκειται για παραδοχές ή προ-καταλήψεις που αφορούν το επιστημονικό αντικείμενο και οι οποίες, χωρίς να εκτίθενται στο ρητό και ελέγξιμο περιεχόμενο των συναφών εννοιών, δηλαδή παραμένοντας αδιατύπωτες και υπόρρητες, κατά το μάλλον ή ήττον *ανεπίγνωστες*, διέπουν, αφ' ενός, την εμπειρική νοηματοδότηση των εννοιών, και, αφ' ετέρου, τη συστημική «γραμματική» των εννοιών, καθορίζουν δηλαδή τους δυνατούς τρόπους συνάρθρωσής τους με τις άλλες έννοιες (και τις δικές τους ιδεολογικές παραδοχές), έτσι ώστε να διαμορφώνουν από κοινού ένα σύστημα, το *εννοιολογικό σύστημα*, ακριβώς, της

[17] Αναλυτικότερα για τις ιδεολογικές παραδοχές, βλ. Α.. Baltas. "Ideological 'Assumptions' in Physics: Social Determinations of Internal Structures". *PSA* 1986, v.1. (130-151) και Γ. Φουρτούνης, *Λουί Αλτουσέρ: το αναπόδραστο μιας αδύνατης θεωρίας*. Διδακτορική διατριβή (αδημοσ.), Αθήνα 1998.

επιστήμης. Οι ιδεολογικές παραδοχές επιτελούν τη συστημική *σύνθεση* των εννοιών και, ταυτόχρονα, διέπουν την από κοινού, εγγενή και ουσιώδη *αναφορά* τους στο επιστημονικό αντικείμενο: με δυο λόγια, οι εν λόγω υπόρρητες και ανεπίγνωστες παραδοχές αποτελούν τις, ιδεολογικού χαρακτήρα, «συνθήκες δυνατότητας» του εκάστοτε επιστημονικού αντικειμένου, καθιστούν δηλαδή το επιστημονικό αντικείμενο, ακριβώς, *αντικείμενο*, και το τοποθετούν στη σφαίρα της ιδεολογικώς δομημένης ανθρώπινης-κοινωνικής υποκειμενικότητας.

Αυτό δίδει και το μέτρο της δυσκολίας της αμφισβήτησης αυτών των ιδεολογικών παραδοχών, καθώς μια τέτοια αμφισβήτηση θα ισοδυναμούσε με τη διακύβευση της συνεκτικότητας του εννοιολογικού συστήματος και, κατ' επέκταση, της ομοιοστασίας του επιστημονικού αντικειμένου. Σε μια τέτοια περίπτωση, το επιστημονικό αντικείμενο, τραυματισμένο από την ακύρωση ενός ή περισσότερων από τους συγκροτητικούς αρμούς του, θα έπαυε να έχει «νόημα» (ή, πιο σωστά, θα έμοιαζε ως να μην είχε νόημα), θα φαινόταν ως να μην έχει θέση μέσα στον κόσμο των δυνατών αντικειμένων. Ως εκ τούτου, η αμφισβήτηση, η αψήφηση, των ιδεολογικών παραδοχών, ενόσω αυτές είναι ενεργές, είναι *αδιανόητη*. Η άρση μίας ιδεολογικής παραδοχής εμφανίζεται ως διάλυση της συνοχής του αντίστοιχου επιστημονικού αντικειμένου: ένα τέτοιο αντικείμενο θα έμοιαζε να μην συνιστά αντικείμενο. Οι ιδεολογικές παραδοχές, καθορίζοντας τους δυνατούς τρόπους συνάρθρωσης των εννοιών, καθιστούν όλους τους άλλους *αδύνατους*, δηλαδή αδιανόητους· μια απαγορευμένη συντακτική χρήση των εννοιών, μια διατύπωση που δεν σέβεται τη «γραμματική» των εννοιών όπως την καθορίζουν οι ιδεολογικές παραδοχές, εμφανίζεται ως λογικό σφάλμα, ως παραλογισμός. Οι απαγορευμένοι τρόποι συνάρθρωσης των εννοιών, οι εκ προοιμίου ακυρωμένες συντακτικές δυνατότητες, που θα ισοδυναμούσαν με την αμφισβήτηση ιδεολογικών παραδοχών, μοιάζουν να εξωθούνται στον χώρο του αδιανόητου. Αντιστρόφως, έχουμε εδώ να κάνουμε με την «εκτυφλωτική προφάνεια»[18] των ιδεολογικών παραδοχών, που συνυφαίνεται με τον υπόρρητο χαρακτήρα τους. Οι ιδεολογικές παραδοχές δεν εμφανίζονται ποτέ στο προσκήνιο· οφείλουν τη δραστικότητά τους, την *ισχύ* τους, στο γεγονός ότι παραμένουν

[18] Α. Μπαλτάς, «Ορθολογικότητα, αλλαγή θεωριών και ιδεολογία». *Θεωρία και Κοινωνία* 5, Αθήνα (1991)

προφανείς κατά τρόπο υπόρρητο ή υπονοούμενο, ανεπίγνωστες και, ως εκ τούτου, μη-επερωτήσιμες. Οι ιδεολογικές παραδοχές δεσμεύουν σιωπηλά τη σκέψη περί του επιστημονικού αντικειμένου, διέπουν τη συναφή λογική, υποβαστάζουν και διοχετεύουν, κατά τρόπο μη ελέγξιμο, την πραγμάτευσή του.

Οι ιδεολογικές παραδοχές, λοιπόν, προσδιορίζουν το αναπτυξιακό δυναμικό του συστήματος, καθορίζουν δηλαδή τις αποδεκτές συντακτικές δυνατότητές του, ενώ, παράλληλα, απαγορεύουν κάποιες άλλες. Οι δύο αυτές λειτουργίες των ιδεολογικών παραδοχών, η «θετική» και η «αρνητική», είναι αλληλένδετες: η υπόρρητη απαγόρευση αδιανόητων τρόπων συνάρθρωσης των εννοιών συστοιχεί με τον προσδιορισμό των αποδεκτών, επιτρεπτών, δυνατών τέτοιων τρόπων. Οι ιδεολογικές παραδοχές καθορίζουν και κατευθύνουν το αναπτυξιακό δυναμικό του εννοιολογικού συστήματος και, ταυτόχρονα, συνιστούν τα όρια αυτής της ανάπτυξης.

Εάν τώρα θεωρήσουμε το εννοιολογικό σύστημα στην ολότητά του, αυτός ο διττός ρόλος των ιδεολογικών παραδοχών συνεπάγεται ότι οι δυνατότητες ανάπτυξής του αντιστοιχούν, μια προς μια, με ισάριθμα *εμπόδια* στην ανάπτυξή του· οι συνθήκες συστημικής συνέχειας συμπίπτουν με συνθήκες (εν δυνάμει) ασυνέχειας του συστήματος. Είναι αυτό ακριβώς το γεγονός που καθιστά εφικτή τη δυνατότητα επισήμανσης, αποκάλυψης, θεματοποίησης και επερώτησης αυτών των ιδεολογικών παραδοχών: η πορεία ανάπτυξης μίας επιστήμης συνεπιφέρει αναγκαστικά την αποκάλυψη αυτών των ιδεολογικών παραδοχών υπό το πρίσμα του «αρνητικού» ρόλου τους, δηλαδή ως *επιστημολογικών εμποδίων*: η επιστήμη κατανοεί τις συγκροτητικές αυτές παραδοχές εφ’ όσον «σκοντάψει» επάνω τους ως εμπόδια. Η ανάπτυξη της επιστήμης συναντά τις προϋποθέσεις της ως ισάριθμα όριά της -- εμπόδια και όρια της επιστήμης *εσωτερικά* και *συγκροτητικά* για την επιστήμη. Με δυο λόγια, ανά πάσα στιγμή, το εννοιολογικό σύστημα της επιστήμης (και κατ' επέκταση το επιστημονικό αντικείμενο) βρίσκεται σε μία *εσωτερική ένταση με τον εαυτό του*, και είναι αυτή ακριβώς η στιγμή κατά την οποία η επιστήμη αναγνωρίζει, θεματοποιεί, θα λέγαμε «συνειδητοποιεί», κάποιες ιδεολογικές παραδοχές της ως επιστημολογικά εμπόδιά της. Ταυτόχρονα, εκεί και τότε, αναγνωρίζεται ένας ιδιότυπος χώρος μη-γνώσης, μία άλως άγνοιας, μία μη-γνωστή και προς-γνώση περιοχή μέσα στην καρδιά του ίδιου του επιστημονικού αντικειμένου, το μη-γνωστό «μέρος» του επιστημονικού αντικειμένου.

Η επιστημονική απόδειξη ως παραγωγή

Έχουμε ήδη επανέλθει στην πραγμάτευση της επιστημονικής πρακτικής, στην ίδια τη στιγμή της γνωσιακής αντιπαράθεσης του γνωστού και του μη-γνωστού «μέρους» του επιστημονικού αντικειμένου. Γνωρίζουμε πλέον ότι η αντιπαράθεση αυτή οργανώνεται γύρω από μια σημειακή ένταση του εννοιολογικού συστήματος με τον εαυτό του, μια αντίφαση ανάμεσα στη συνέχεια και την ασυνέχεια του συστήματος. Η συστημική αυτή ένταση σηματοδοτεί την ύπαρξη μιας συγκροτητικής ιδεολογικής παραδοχής, η οποία γίνεται αντιληπτή με τον μόνο δυνατό τρόπο, δηλαδή υπό το «αρνητικό» πρόσημό της, ως εμπόδιο. Πρόκειται για τον παράγοντα που καθορίζει τη σχετική θέση και λειτουργία των δύο μερών, ο παράγοντας που εμποδίζει το «μη-γνωστό» να ανήκει στο «γνωστό», να συνιστά δηλαδή και αυτό «γνωστό».

Η αντιπαράθεση αυτή διέπεται από τη διαλεκτική της επιστημολογικής τομής, την αναδρομική χρονικότητά της. Η αποκάλυψη μιας ιδεολογικής παραδοχής ως επιστημολογικού εμποδίου έχει ήδη δρομολογήσει τη διαδικασία μετασχηματισμού του μη-γνωστού σε γνωστό, αλλά και αποτελεί αποτέλεσμα αυτής της εκκίνησης: το επιστημολογικό εμπόδιο συνιστά, ταυτοχρόνως, προϋπόθεση και συνέπεια της επιστημολογικής τομής. Η επιστημολογική τομή, κατόπιν, μετασχηματίζει το μη γνωστό σε γνωστό, δια της άρσης του αντίστοιχου εμποδίου, την εκτόνωση της εντοπισμένης, πλέον, σημειακής έντασης του εννοιολογικού συτήματος και την αποκατάσταση της σχετικής συστημικής συνέχειας. Αυτό που χώριζε το μη γνωστό από το γνωστό αίρεται, το μη-γνωστό γίνεται γνωστό, το μέχρι πρότινος μη-γνωστό μετέχει πλέον του γνωστού: *ανασυγκροτείται η συστημική συνοχή, η συνέχεια του εννοιολογικού συστήματος και του επιστημονικού αντικειμένου*. Πράγμα που σημαίνει, βεβαίως, ότι και το ίδιο το αρχικώς γνωστό υφίσταται έναν κάποιο μετασχηματισμό, που ισοδυναμεί με την αποκατάσταση μίας νέας συστημικής συνέχειας με το μέρος του επιστημονικού αντικειμένου με το οποίο το χώριζε προηγουμένως η εν λόγω ένταση. Ο παράγοντας που καθόριζε την αμοιβαία σχέση μεταξύ γνωστού και μη-γνωστού εξουδετερώνεται, με αποτέλεσμα μία εσωτερική αναπροσαρμογή του επιστημονικού αντικειμένου, μία *προσωρινή διευθέτηση της σχέσης του επιστημονικού αντικειμένου με τον εαυτό του*. Προκύπτει έτσι ένα *νέο γνωστό*, από τον αμοιβαίο μετασχηματισμό και τη συστημική επανασυνάρθρωση των αρχικώς γνωστού και μη-γνωστού, το οποίο, βεβαίως, μπορεί να επιτελέσει τη λειτουργία του ως γνωστού μόνο σε σχέση με ένα νέο μη-γνωστό, το οποίο, με τη σειρά του, δεν μπορεί παρά να αντιπροσωπεύει μία νέα «διχοτόμηση», μία νέα εσωτερική ένταση του επιστημονικού αντικειμένου. Η αποκατάσταση της νέας «τάξης πραγμάτων» στο εσωτερικό του επιστημονικού αντικειμένου, η άρση της αρχικής έντασης, ισοδυναμεί με την κατάστρωση της «πρώτης στιγμής» του επόμενου βήματος της δυναμικής διαδικασίας της γνώσης, με την αντί-θεση ενός γνωστού και ενός μη-γνωστού «μέρους» του επιστημονικού αντικειμένου, με την ανάδυση μίας νέας συστημικής έντασης στο εσωτερικό του επιστημονικού αντικειμένου. Η αρχική ένταση ολοένα *μετατοπίζεται* στο εσωτερικό του επιστημονικού αντικειμένου στο μέτρο ακριβώς που αυτό είναι, κατά τρόπο ανεξάντλητο, συγκροτημένο από ιδεολογικές παραδοχές, δυνάμει επιστημολογικά εμπόδια.

Ωστόσο, αυτή η αέναη διαδικασία, που μοιάζει να επισημαίνει και ακυρώνει ιδεολογικές παραδοχές, συγκροτητικές του εννοιολογικού συστήματος, μόνο και μόνο για να ανα-παραγάγει το εν λόγω σύστημα ως συγκροτούμενο από ιδεολογικές παραδοχές, που διυλίζει το επιστημονικό αντικείμενο από επιστημολογικά εμπόδια μόνο και μόνο για να το αποκαταστήσει πάλι αποτελούμενο εξ ολοκλήρου από (εν δυνάμει) επιστημολογικά εμπόδια, που μοιάζει να εκτονώνει εντοπισμένες, σημειακές συστημικές εντάσεις μόνον και μόνο για να τις μετατοπίσει σε άλλα σημεία του συστήματος, που μοιάζει να παράγει «γνώσεις» μόνο και μόνο για να αποτελέσουν αργότερα τον θώκο νέων «αγνοιών», έχει *αντικειμενικό γνωσιακό κέρδος*: οι ιδεολογικές παραδοχές που ακυρώνονται, ακυρώνονται δια παντός: έχουν αποκαλυφθεί ως τέτοιες, έχουν πάψει να είναι ανεπίγνωστες, και ως εκ τούτου δεν μπορούν πλέον να παίξουν τον ιδιάζοντα ρόλο τους· τα επιστημολογικά εμπόδια που ξεπερνώνται, ξεπερνώνται δια παντός: δεν πρόκειται, αυτά τα ίδια, να εμποδίσουν ξανά την επιστημονική ανάπτυξη. *Η εκάστοτε επιστημολογική τομή συνιστά αμετάκλητη νίκη της αντικειμενικότητας και της ορθολογικότητας*: επισημαίνει και αχρηστεύει κρυψώνες της ιδεολογικής-κοινωνικής «σχετικότητας» και ανεπίγνωστους, μη-ελεγχόμενους, ανορθολογικούς μηχανισμούς δέσμευσης της σκέψης. Αυτοί αποτελούν πλέον κλειστούς δρόμους για τη σχετικότητα και την ανορθολογικότητα. Το αμετάκλητο αποτέλεσμα της επιστημολογικής τομής είναι η επισήμανση και η κατάδειξη μιας ιδεολογικής παραδοχής ως ψευδούς.

Η όλη διαδικασία συνιστά αυθεντικό μετασχηματισμό και αυθεντική παραγωγή: μετασχηματισμό που πράγματι μετασχηματίζει -- μετασχηματίζει το μη-γνωστό σε γνωστό ή, με άλλα λόγια, μετασχηματίζει αενάως το επιστημονικό αντικείμενο-- και παραγωγή που παράγει και αναπαράγει το εννοιολογικό σύστημα, που επεργάζεται αδιάκοπα και ανασυγκροτεί διαρκώς τη συστημική συνέχεια και συνέπεια, τη συστημικότητα του συστήματος. Παραγωγή και μετασχηματισμός που παράγουν το αληθές και, ταυτοχρόνως, το καταδεικνύουν και το επικυρώνουν *ως αληθές* ενώ, με την ίδια κίνηση, καταδεικνύουν και ακυρώνουν το ψευδές *ως ψευδές*. Υπό αυτήν την έννοια, η εν λόγω παραγωγή, *συνυφασμένη με το αντικειμενικό και αμετάκλητο γνωσιακό αποτέλεσμά της*, συνιστά πράγματι *απόδειξη*. Είναι εδώ που βρίσκει το νόημά της η υπαινικτική σημείωση του Αλτουσέρ, σύμφωνα με την οποία η εννοιολόγηση της επιστήμης ως παραγωγής, που φέρει την ηχώ του σπινοζικού *productio*, αξιοποιεί τη «διπλή σημασία της λέξης, που παραπέμπει συγχρόνως στην εργασία, την πρακτική, και στην έκθεση του αληθούς».[19] Είναι ακριβώς η σύμπτωση αυτών των δύο σημασιών της παραγωγής που επιφέρει η αντίληψη περί επιστημονικής πρακτικής: η παραγωγή του αληθούς ως *προϊόντος* ταυτίζεται με την παραγωγή του αληθούς ως *αληθούς*, δηλαδή με την απόδειξή του. Το προϊόν της επιστημονικής παραγωγής δεν χρειάζεται, αλλά ούτε και μπορεί, να αποδειχθεί ανεξαρτήτως της διαδικασίας που το παρήγαγε, ως προϊόν. Η γνωσιακή και η πρακτική όψη της επιστημονικής διαδικασίας συμπίπτουν.

Η αντίληψη αυτή, με άλλα λόγια, καταργεί τις βασικές διακρίσεις της κυρίαρχης αντίληψης περί απόδειξης και συστημικότητας και, κατ' επέκταση, περί επιστημονικής γνώσης και αλήθειας. Δεν έχουμε πλέον, από τη μια μεριά, μια αυθύπαρκτη και αφηρημένη τυπικότητα και λογική συνέπεια, ανεξάρτητη από κάθε αντικείμενο και εν δυνάμει εφαρμόσιμη σε όλα· έχουμε, *κάθε φορά*, μια συστημικότητα στενά

[19] L. Althusser, *Θέσεις*, ό.π.

συνυφασμένη με το *εκάστοτε* επιστημονικό αντικείμενο και μόνον με αυτό. Η συστημικότητα και η συνέπεια του εννοιολογικού συστήματος, η «λογική τάξη» του, *δεν* συνιστούν *αφ' εαυτών ιδιότητες*, αλλά συγκροτούνται ως τέτοιες στο πλαίσιο της ερμηνείας που τις συσχετίζει εγγενώς και αποκλειστικά με το εκάστοτε επιστημονικό αντικείμενο. Με δυο λόγια, οι ιδιότητες αυτές δεν είναι «διαπιστώσιμες» --και, άρα, δεν είναι λειτουργικές-- από μία *εξωτερική* θέση, αλλά μόνο από μία θέση *εσωτερική* στην όλη διαδικασία, δηλαδή από μια θέση που μετέχει της ερμηνείας που συνέχει και κινεί τη διαδικασία. Τα *κριτήρια αποδεικτικότητας* (το τι συνιστά απόδειξη, το τί είναι πράγματι αποδεδειγμένο) δεν είναι αυθυπόσπαστα, αυθύπαρκτα --και, άρα, δια παντός παγιωμένα και καθολικά· ο Αλτουσέρ θα κάνει λόγο για την εκάστοτε «*θεωρητική προβληματική* με την οποία συσχετίζονται όλα τα κριτήρια της υπάρχουσας θεωρητικής εγκυρότητας, και άρα οι *μορφές* που απαιτούνται για να δώσουν στη διάταξη ενός θεωρητικού λόγου *ισχύ και αξία απόδειξης*».[20] Πράγμα που σημαίνει ότι, μιλώντας κυριολεκτικά, *δεν* υπάρχουν καθολικά επιστημονικά κριτήρια, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια κωδικοποιημένη μέθοδος που θα ήταν σε θέση να «κρίνει» εκ των έξω τη συνεκτικότητα, την εννοιολογική συστημικότητα, την απόδειξη και, άρα, τη γνώση, κατά κάποιο τρόπο «αυτόματα», «αλγοριθμικά».

Δεν υφίσταται λοιπόν καμία καθολική και παγιωμένη «ουσία» της συστημικότητας, της αποδεικτικότητας και, εν τέλει, της ορθολογικότητας --όπως θα ήθελε η φορμαλιστική αντίληψη, στενά συνυφασμένη με την κυρίαρχη άποψη περί επιστήμης. Αυτό ωστόσο δεν σημαίνει ότι αποποιούμαστε την απόδειξη και την ορθολογικότητα, εξακολουθώντας να παραμένουμε δεσμευμένοι στην ίδια αυτή φορμαλιστική αντίληψη. Αντιθέτως, σημαίνει ότι η *εκάστοτε* επιστήμη συνεπιφέρει *τη δική της* συστημικότητα, αδιαχώριστη από το αντίστοιχο επιστημονικό αντικείμενο, δηλαδή από την εκάστοτε συγκεκριμένη ερμηνεία του συστήματος, *τη δική της* αποδεικτικότητα, *τη δική της* ορθολογικότητα. Αυτοί οι *τρόποι* αποδεικτικότητας και ορθολογικότητας αποτελούν *αποτελέσματα* των αντίστοιχων επιστημών· αντιθέτως, η κυρίαρχη φορμαλιστική άποψη θεωρεί ότι οι διαφορετικές εκφάνσεις της επιστήμης συνιστούν ισάριθμα αποτελέσματα *της* (μιας και μοναδικής, τυπικής, αφηρημένης,

---

[20] L. Althusser, *Lire le Capital*, Maspero, Paris (1970).

καθολικής, υπερβατικής) αποδεικτικότητας και ορθολογικότητας, εφαρμοσμένης στα αντίστοιχα ευρύτερα αντικείμενα, μέσω αντίστοιχων ερμηνειών. Για να δανεισθούμε μερικές διατυπώσεις του Ετιέν Μπαλιμπάρ, «*κάθε* επιστήμη, ως τέτοια, είναι αποδεικτική, *αλλά με τον τρόπο της*: αντίθετα από την ουτοπία του λογικού θετικισμού, δεν υπάρχει ένα μοναδικό μοντέλο, και η ιδέα μίας γενικής θεωρίας της απόδειξης αντιφάσκει με την πρακτική της απόδειξης [δηλαδή, διευκρινίζουμε εμείς, με την αποδεικτική πρακτική, την *επιστημονική πρακτική*], με την αποτελεσματικότητά της (για αυτόν τον λόγο η παραδοσιακή λογική απέτυχε ως *όργανον* της επιστήμης, πράγμα που δεν θα εμποδίσει εξ' άλλου τους φιλοσόφους να την επικαλούνται περιοδικώς)».[21]

[21] E. Balibar, *Lieux et noms de la verité*. Editions de l' aube, Paris (1994).

Καλειδοσκοπώντας την αποδειξη

Ευγένιου Αγγελόπουλου

Ε.Μ.Π. Αθήνας

Περίληψη

- Ομιλία βασισμένη στη (διδακτική κι ερευνητική) εμπειρία.
- Η εμπειρία μεταφέρεται; (τί σημαίνει διδασκαλία)
- Η απόδειξη ποιόν έχει αποδέκτη;
- Αντιθετικά δίπολα της απόδειξης:

Γλωσσική έννοια	- Μαθηματική έννοια
Διαδικασία	- Αποτύπωση
Με λέξεις	- Χωρίς λέξεις
Κατανόηση	- Επικοινωνία
Γραμμική ροή	- Λεπτά σημεία
Σύνταξη	- Νόημα

- Η (μαθηματική) απόδειξη παράγει γνώση;
- Η (μαθηματική) γνώση ανάμεσα στο γνωστό και το άγνωστο.
- Η ταυτολογία είναι αμφίδρομη;
- Επανάληψη μήτηρ πάσης μαθήσεως ή πάσης ανίας;
- Υπάρχουν Μαθηματικά χωρίς απόδειξη;

Επιπλέον παραδείγματα, καταστάσεις, προεκτάσεις, παρενθέσεις, ιστοριούλες.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Οι αντιλήψεις φοιτητριών του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών σχετικά με τον βαθμό αυστηρότητας στην προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στο Νηπιαγωγείο.

Κώστας Ζαχάρος

Πανεπιστήμιο Πατρών

Η παραγωγή των μαθηματικών και ο τρόπος παρουσίασής τους.

Πως οι άνθρωποι αποδεικνύουν την «αλήθεια»; Πως αποδεικνύουν την ορθότητα των συλλογισμών τους; Η εκπαιδευτική εμπειρία και τα περισσότερα βιβλία των μαθηματικών μας κάνουν να πιστεύουμε, πως οι μαθηματικοί κάνουν τυπικές και αυστηρές αποδείξεις και λογικές συνεπαγωγές βασισμένες σε αξιώματα [Battista & Clements 1995]. Όμως, η πορεία της μαθηματικής ανακάλυψης ακολουθεί έναν εντελώς διαφορετικό δρόμο. Η διαδικασία παραγωγής των νέων μαθηματικών είναι εντελώς διαφορετική από τον παραγωγικό τρόπο της παρουσίασής τους. Στην διαδικασία δημιουργίας των μαθηματικών, τίθενται προβλήματα, αναλύονται παραδείγματα, γίνονται υποθέσεις, προσφέρονται αντιπαραδείγματα και υποθέσεις αναθεωρούνται. Επειδή τα μαθηματικά εμφανίζονται από τους μαθηματικούς τυποποιημένα σε θεωρήματα και αποδείξεις, αυτή η αυστηρή πρακτική εμφανίζεται λανθασμένα σαν ο πυρήνας της μαθηματικής πρακτικής. Έτσι, η μάθηση των μαθηματικών, φαίνεται να είναι η ικανότητα αυτής της τυποποίησης και η παρουσίασή τους εξαφανίζει κάθε πνευματική δραστηριότητα.

Ενώ η τυπική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της μαθηματικής σκέψης υπό μορφή αυστηρών αποδείξεων έχει μεγάλη σημασία για τους μαθηματικούς σαν μέθοδος παρουσίασης της ισχύος κάποιων ιδεών, οι αποδείξεις αυτές πείθουν τους μαθητές και τις μαθήτριές μας; Αντιλαμβάνονται με αυτόν τον τρόπο παρουσίασης την σπουδαιότητα των μαθηματικών ή προσλαμβάνουν την διαδικασία αυτή ως ένα σύνολο τυπικών κανόνων που δεν σχετίζεται με την προσωπική τους μαθηματική δραστηριότητα;

Έρευνες σχετικές με το ερώτημα αυτό δείχνουν ότι η διαδικασία της απόδειξης δεν βοήθησε τους μαθητές στην οικειοποίηση μαθηματικών γνώσεων [Battista & Clements 1995]. Η γνώση που κατακτήθηκε μέσω των αποδείξεων παρέμεινε στεγανοποιημένη και δεν έγινε δυνατό να ενσωματωθεί λειτουργικά στην συνολική διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης.

Οι ανασκευές των αποδείξεων για διδακτική χρήση

Ας αναφερθούμε τώρα σε κάποιες προσεγγίσεις που αφορούν την απόδειξη στην διδασκαλία. Μια απόδειξη μπορεί να αναδομηθεί και να κάνει την γενική της δομή καθαρή, πριν μελετηθεί λεπτομερειακά, έτσι ώστε αυτή να αποκτήσει νόημα για τα παιδιά. Η διδασκαλία των μαθητών και μαθητριών στην κατανόηση και παραγωγή αποδείξεων μπορεί να γίνει με την χρήση μιας προ-τυπικής παρουσίασης (preformal presentation) [Hanna G. et. al., 1996] στην οποία ο εκπαιδευτικός παραβλέπει τις τυπικές λεπτομέρειες, ενώ εξηγεί την γενική δομή της απόδειξης. Οφείλουμε εδώ να διαχωριστούμε από μια διδακτικά παθητική στάση που υιοθετείται από ορισμένες κονστρουκτιβιστικές προσεγγίσεις, που στην προτροπή προς τους μαθητές και τις μαθήτριες να «μοιράζονται την γνώση τους», αυτό που συνήθως επιτυγχάνεται είναι να μοιράζονται την άγνοιάς τους.

Στο πλαίσιο των παραπάνω απόψεων γίνεται μια διάκριση μεταξύ της *απόδειξης που αποδεικνύει και της απόδειξης που εξηγεί* [Hanna, G. et. al. 1996, σ. 903]. Η απόδειξη που αποδεικνύει μας τονίζει με την χρήση της μαθηματικής τυπολογίας ότι ένα θεώρημα είναι αληθές. Η απόδειξη που εξηγεί, ενώ στο αποδεικτικό σκέλος δεν υστερεί της προηγούμενης, αντλεί τα επιχειρήματά της από τα στοιχεία που αναδύονται από το προς απόδειξη φαινόμενο. Ας παρακολουθήσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση απόδειξης του θεωρήματος για το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών:

$\Sigma(\nu)=1+2+3+\ldots+\nu=\nu(\nu+1)/2.$

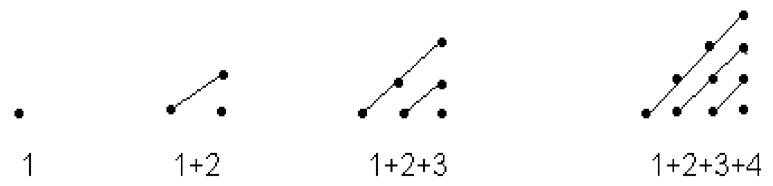
Γνωρίζουμε ότι η απόδειξη του θεωρήματος αυτού γίνεται με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Μια απόδειξη που *εξηγεί*, μπορεί να μας δείξει ότι το θεώρημα είναι αληθές όταν, για παράδειγμα, βασιστεί στην συμμετρική αναπαράσταση των αθροισμάτων που προστιθέμενα μας δίνουν:

$$\Sigma(\nu)=1+2+3+\ldots+\nu$$

$$\underline{\Sigma(\nu)=\nu+(\nu-1)+(\nu-2)+..+1}$$

$$2\Sigma(\nu)=(\nu+1)+(\nu+1)+(\nu+1)+\ldots+(\nu+1)=\nu(\nu+1)$$ [1]

Μπορούμε, επίσης, να παραστήσουμε το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών με την βοήθεια των τριγωνικών αριθμών.



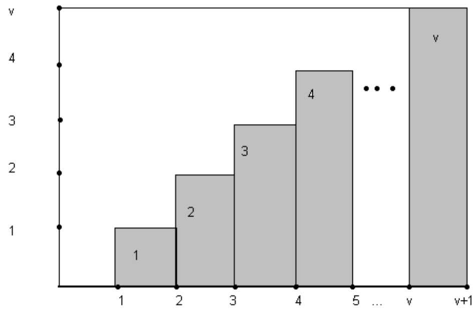
Το άθροισμα των τελειών των ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων περιέχουν $\Sigma(\nu)=1+2+3+\ldots+\nu$ τελείες. Τα δύο αθροίσματα, $\Sigma(\nu)+\Sigma(\nu)$ κατασκευάζουν ένα τετράγωνο πλευράς ν και αριθμού τελειών ν^2 με ν πρόσθετες τελείες γιατί η διαγώνιος υπολογίζεται δύο φορές. Έχουμε δηλαδή:

$$2\Sigma(\nu)=\nu^2+\nu,\ \text{που τελικά μας δίνει}\ \Sigma(\nu)=\nu(\nu+1)/2$$

Τέλος, ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του αθροίσματος μπορεί να γίνει με το άθροισμα των εμβαδών των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων του επόμενου σχήματος. Εδώ το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $\nu(\nu+1)$. Διαφορετικά, είναι δύο φορές το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων. Το άθροισμα των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων είναι: $\Sigma(\nu)=1+2+3+4+\ldots+\nu$. Συνεπώς,

$$2\Sigma(\nu)=\nu(\nu+1),\ \text{ή}\ \Sigma(\nu)=\nu(\nu+1)/2$$

[1] Αντίστοιχη με αυτή απόδειξη συναντάμε στο άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου.



«Απολυτοκρατισμός» και «διαψευσιμότητα»

Έχει διαπιστωθεί μια συσχέτιση μεταξύ των αντιλήψεων που έχουν οι εκπαιδευτικοί σχετικά με την φύση και τον χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και των απόψεών τους για τον τρόπο διδασκαλίας. Υπάρχει δηλαδή ένα σύνολο απόψεων σχετικά με την φιλοσοφία των μαθηματικών, την παραγωγή, την διάδοση, την διάρκεια και την καθολικότητα της εφαρμογής τους. Οι φιλοσοφικές αυτές αντιλήψεις βρίσκονται σε στενή συνάφεια με τις παιδαγωγικές αντιλήψεις και τις μορφές της εκπαιδευτικής πρακτικής που υλοποιούνται στην σχολική αίθουσα [Ernest 1996, Threlfall 1996].

Οι απόψεις σχετικά με την μαθηματική γνώση σχηματικά μπορεί να διακριθούν σε δύο ενότητες: Στην μια ενότητα οι απόψεις παραπέμπουν σε φιλοσοφικά ρεύματα όπως ο Πλατωνισμός και ο Φορμαλισμός. Σύμφωνα με την θεώρηση των πλατωνιστών τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πραγματικά και η ύπαρξή τους είναι ένα αντικειμενικό γεγονός, ανεξάρτητα από την γνώση μας γι' αυτά. Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν έχουν μια υλική υπόσταση, υπάρχουν έξω από τον χώρο και τον χρόνο της φυσικής ύπαρξης και ο σκοπός του μαθηματικού-ερευνητή είναι να τα ανακαλύψει. Για τους φορμαλιστές, από την άλλη, δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα. Το σώμα των μαθηματικών γνώσεων είναι ένα σύνολο από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα που δεν έχουν κανένα συγκεκριμένο περιεχόμενο. Τα μαθηματικά στην οπτική των φορμαλιστών είναι μια καθαρή σύνταξη. Παρά το γεγονός ότι οι πλατωνιστές και οι φορμαλιστές αντιμετωπίζουν από διαφορετικές οπτικές τα θέματα της ύπαρξης και της πραγματικότητας των μαθηματικών αντικειμένων, εν τούτοις τα μαθηματικά θεωρούνται ως ένα σώμα γνώσεων με αντικειμενική και απόλυτη ισχύ, μη επιδεχόμενο αμφισβητήσεις και διορθώσεις [Davis, P & Hersh, R. 1981]. Η θεώρηση των μαθηματικών ως μια καθαρή γνώση μη υποκείμενη σε ιστορικές και κοινωνικές επιδράσεις, θα χαρακτηριστεί ως *απολυτοκρατική* [Ernest 1996]. Η άποψη περί της καθολικότητας και αντικειμενικότητας των μαθηματικών, που χαρακτηρίζεται από έναν έντονο ευρωκεντρισμό σχετικά με την ανάπτυξη και διάδοση της μαθηματικής γνώσης [Ζαχάρος 2001, Joseph 1991], συμπίπτει με την κυρίαρχη εικόνα των σχολικών μαθηματικών και τους τρόπους διδασκαλία τους. Οι απολυταρχικές θεωρήσεις σχετικά με τη μαθηματική επιστήμη παρατηρείται ότι προκρίνουν διδακτικές πρακτικές που παραπέμπουν σε συμπεριφορικά μοντέλα μάθησης. Στο πλαίσιο των συμπεριφορικών προσεγγίσεων, η μάθηση είναι αποτέλεσμα αισθητηριακής προέλευσης και είναι το αποτέλεσμα εξαρτήσεων που δημιουργούνται από το περιβάλλον στο άτομο. Στην διδασκαλία η ύλη καθορίζεται εκ των προτέρων, αναλύεται σε μικρά και διακριτά βήματα και οικοδομείται με μια επαγωγική ακολουθία. Τα βήματα αυτά συνοδεύονται από ασκήσεις μαθηματικών με σκοπό την ενδυνάμωση, μέσω της εξάσκησης, στην επίλυσή τους. Η σωστή απάντησή τους ακολουθείται από ενίσχυση και η μετάβαση στο επόμενο στάδιο θα γίνει αφού έχει προηγηθεί επιτυχής απάντηση [Skinner 1958]. Στο πλαίσιο αυτής της διδακτικής προσέγγισης υπάρχει, γενικά, μια αποθάρρυνση των παιδιών για συμμετοχή σε διάλογο. Η δεύτερη φιλοσοφική θεώρηση, βασίζεται στις απόψεις της σύγχρονης ιστοριογραφίας σχετικά με την μαθηματική γνώση, καθώς και σε επιστημολογικές προσεγγίσεις που αναφέρονται στην ανάπτυξη και διάδοση της επιστημονικής γνώσης γενικά [πχ. Kuhn, Lakatos, Popper]. Εδώ η ανάπτυξη της επιστήμης καθώς και η διαχείριση των επιστημονικών γνώσεων εντάσσεται σε ένα κοινωνικο-ιστορικό πλαίσιο. Η θεώρηση αυτή εμπεριέχει ως δυνατότητα την διαρκή *διάψευση* των θεωρημάτων και των θεμελιωδών αρχών της μαθηματικής επιστήμης. Η φιλοσοφική θεώρηση της «*διαψευσιμότητας*» [Threlfall 1996] στο επίπεδο της διδασκαλίας των μαθηματικών θα υλοποιηθεί με διδακτικά μοντέλα όπως ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός ή προσεγγίσεις που τονίζουν την κοινωνική διάσταση της μάθησης, (πχ. η ανθρωπολογική προσέγγιση ή η προσέγγιση των εθνομαθηματικών). Στο πλαίσιο αυτών των ερμηνευτικών προτύπων η θεσμοθετημένη γνώση σχετίζεται με τις φυσικές και πνευματικές πρακτικές στις οποίες συμμετέχουν τα μέλη ειδικών κοινοτήτων [Cobb 1989] που βρίσκονται σε μια διαδικασία αλληλεπίδρασης. Αυτό αιτιολογεί και την σχετικότητα του μαθηματικού νοήματος που ξεπροβάλλει. Η σύγχρονη φιλοσοφία των μαθηματικών οριοθετείται, τόσο από την ιδέα μιας πνευματικά ανεξάρτητης μαθηματικής πραγματικότητας που παραπέμπει στον πλατωνισμό, όσο και από τον εμπειρισμό που αποδίδει την ανάπτυξη των μαθηματικών στην παρατήρηση των αντικειμένων. Τονίζει ότι κάποια πρότυπα γίνονται αντικείμενο μιας ιδιαίτερης προσοχής από τα μέλη μιας κοινότητας και φορτίζονται με μια ειδική βαρύτητα. Έτσι, «τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη κοινωνική δραστηριότητα - μια συλλογική δραστηριότητα» [Cobb 1989, σ. 36]. Δημιουργούνται και αναπτύσσονται από την διαλεκτική αλληλεπίδραση πολλών σκέψεων και είναι αυτή η κοινωνική διαδικασία που καθιστά ενδιαφέρουσα μια θεωρία και την νομιμοποιεί στην επιστημονική κοινότητα. Γι' αυτό και το συμπέρασμα ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης είναι αποτέλεσμα μιας σωρευτικής διαδικασίας αμφισβητείται ως στερούμενο μιας ιστορικής προοπτικής. Στην ίδια κατεύθυνση ο Lakatos (1996), στην επιστημολογική προσέγγιση της ανάπτυξης της επιστήμης που επιχειρεί, τονίζει πως στην πορεία ανάπτυξης των μαθηματικών γίνονται ριζικές εννοιολογικές και μεθοδολογικές αλλαγές που δείχνουν πως τα μαθηματικά είναι μια περιοχή της ανθρώπινης δραστηριότητας με σημαντικές θεμελιακές επαναστάσεις. Στην διδασκαλία των μαθηματικών δίνεται έμφαση στην αυτο-ανακάλυψη του περιεχομένου μέσα από πραγματικά παραδείγματα και προβλήματα. Εδώ δίνεται έμφαση στην διαδικασία της μαθηματικής δραστηριότητας και όχι στο περιεχόμενο των διδασκομένων θεμάτων και η αντίληψη που διέπει την διδασκαλία ευνοεί την ενθάρρυνση του διαλόγου [Threlfall 1996].

Κλείνοντας την σχηματική αυτή παρουσίαση των απόψεων σχετικά με τα μαθηματικά και την διδασκαλία τους, πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι, οι συσχετίσεις μεταξύ των φιλοσοφικών θεωρήσεων για την μαθηματική γνώση και την διδασκαλία τους που περιγράψαμε παραπάνω, δεν απαντώνται πάντα, αφού λόγοι που σχετίζονται με εξω-εκπαιδευτικές κοινωνικές και πολιτικές παραμέτρους, καθώς και το συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο υλοποίησης της εκπαιδευτικής πρακτικής, «στρεβλώνουν» την σχέση αυτή [Ernest 1996, Threlfall 1996].

Στην συνέχεια θα επιχειρήσουμε να ανιχνεύσουμε τις απόψεις φοιτητριών του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Πατρών σχετικά με την μαθηματική γνώση και την διδασκαλία των μαθηματικών. Θα προσπαθήσουμε επιπρόσθετα να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις τους πάνω στην έννοια της μαθηματικής απόδειξης καθώς και το επίπεδο αυστηρότητας που αυτή πρέπει να έχει στο επίπεδο του Νηπιαγωγείου.

Η μέθοδος

Το δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 φοιτήτριες του δευτέρου έτους του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Πατρών που είχαν επιλέξει το μάθημα που σχετιζόταν με την εμβάθυνση στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών.

Η διαδικασία συλλογής των δεδομένων

Για την συλλογή των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο που διανεμήθηκε στις φοιτήτριες (βλέπε στο παράρτημα). Φροντίσαμε με τις ερωτήσεις να συλλέξουμε απόψεις από τις φιλοσοφικές θεωρήσεις τους για την μαθηματική γνώση (ερώτηση 1), όσο και για τις αντίστοιχες διδακτικές προσεγγίσεις (ερωτήσεις 2-4). Τέλος, προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε τις απόψεις των φοιτητριών σχετικά με το επίπεδο της μαθηματικής αυστηρότητας που απαιτείται από μια συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα των νηπίων (ερώτηση 5).

Οι απαντήσεις και η αξιολόγησή τους

Οι απαντήσεις των φοιτητριών κατηγοριοποιήθηκαν με βάση τους εξής άξονες: Πρώτα διακρίνουμε τις απόψεις των φοιτητριών σχετικά με τα μαθηματικά και την διδασκαλία τους σε *απολυτοκρατικές* (Α) και *διαψευσιμότητας* (Δ), με βάση την σχηματοποίηση που έγινε στο θεωρητικό μας πλαίσιο (βλέπε τον πίνακα που ακολουθεί). Στη συνέχεια ανιχνεύουμε πιθανές συσχετίσεις μεταξύ των θεωρήσεων για την μαθηματική επιστήμη και τις αντιλήψεις για την διδασκαλία τους. Τέλος, μέσα από τις απαντήσεις των φοιτητριών προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε ποιοτικά στοιχεία των αντιλήψεων των υποψηφίων Νηπιαγωγών σχετικά με τα θέματα που μας απασχολούν εδώ.

Ερώτηση → / ↓ Φοιτήτρια	I	II	III	IV	V
1η	Δ	Α	Δ	Δ	Α
2η	Α	Α	Δ	Δ	Δ
3η	Α	Α	Α	Δ	Δ
4η	-	Α	Α	Δ	Α
5η	Α	Α	Α	Δ	Α
6η	Α	Α	Δ	Δ	Δ
7η	Δ	Α	Δ	Δ	Α
8η	Δ	Α	Δ	Δ	Α
9η	Α	Α	Α	Α	Δ
10η	Α	Α	Α	Α	Α
11η	Α	Α	Α	Δ	Α
12η	Α	Α	Α	Α	Δ
13η	- (Α+Δ)[1]	Α	Α	Δ	-[2]
14η	Δ	Α	Δ	Δ	Δ
Σύνολο	8Α/3Δ	14Α/0Δ	8Α/6Δ	3Α/11Δ	7Α/6Δ

1. Εδώ η απάντηση εμπεριέχει ταυτόχρονα στοιχεία διαψευσιμότητας και απολυτότητας.
2. Η απάντηση κρίνεται ως εκτός θέματος.

Οι απαντήσεις των φοιτητριών

1η Ερώτηση

Παρατηρούμε ότι στην πλειοψηφία των φοιτητριών (72.7%) είναι εδραιωμένη η άποψη ότι ο πυρήνας της μαθηματικής επιστήμης δεν υπόκειται σε πολιτισμικούς ή ιστορικούς περιορισμούς. Αντίθετα οι αλήθειες τους είναι διαχρονικές και απόλυτες. Έτσι, σύμφωνα με την άποψη μιας φοιτήτριας (5ο Υποκείμενο),

«… *Υπάρχουν στάνταρ διδακτικές πρακτικές, δηλαδή όπως μαθαίνουμε εμείς την πρόσθεση την έμαθαν και οι γονείς μας, ως ένωση δύο ποσοτήτων. Βέβαια ανάλογα με τις εποχές και τα μέσα μετρούμε με* *ξυλάκια, με αριθμητήριο, κλπ., πάντως οι βασικές πράξεις ήταν κοινές και παραμένουν κοινές για όλους τους ανθρώπους*».

Είναι ενδεικτική, επίσης, η διάκριση που γίνεται από φοιτήτρια της ομάδας αυτής μεταξύ των μαθηματικών και άλλων θετικών επιστημών σχετικά με την δυνατότητά τους για τροποποίηση και αναθεώρηση:

6ο Υποκείμενο: «*Δεν θεωρώ ότι η μαθηματική γνώση είναι διαρκώς ανοικτή σε αναθεωρήσεις όπως έννοιες άλλων επιστημών, για παράδειγμα, της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας ή της Ιατρικής, όπου γίνονται συνεχείς έρευνες και πειράματα με αποτέλεσμα να έρχονται στην επιφάνεια συνεχώς καινούργιες έννοιες και κάποιες άλλες να αναθεωρούνται*».

Από την άλλη, το 27.3% των φοιτητριών εμφορείται από τις αρχές της διαψευσιμότητας όπως, για παράδειγμα, η επόμενη:

1ο Υποκείμενο: «*Οι λεγόμενες 'αλήθειες' των μαθηματικών βρίσκονται υπό διαρκή ανίχνευση (δηλαδή δεν είναι αναλλοίωτες) και οποιαδήποτε ανακάλυψη μιας καινούργιας μαθηματικής αλήθειας (αποδεικνυόμενης) μπορεί να πάρει τη θέση της προϋπάρχουσας*».

Ερωτήσεις 2-4

Παρά το γεγονός ότι οι ερωτήσεις αυτές σχετίζονται με τον διδακτικό μετασχηματισμό της επιστημονικής γνώσης και της μετουσίωσής τους σε διδακτική πρακτική, εν τούτοις, κρίνεται επιβεβλημένη μια διάκριση που καθορίζεται από την σχετική «θέση» που καταλαμβάνουν οι συγκεκριμένες ερωτήσεις στο «χώρο» μεταξύ των φιλοσοφικών θεωρήσεων και της διδασκαλίας. Όσο αυτές απομακρύνονται από το επίπεδο της φιλοσοφικής θεώρησης και πλησιάζουν στο επίπεδο της διδακτικής πράξης, τόσο οι απαντήσεις φαίνεται να αντανακλούν επιρροές που έχουν να κάνουν με ορισμένες κοινωνικές αναπαραστάσεις[2] σχετικές με τον ρόλο του εκπαιδευτικού στην σύγχρονη κοινωνία, όπως επίσης και με κάποια κυρίαρχα διδακτικά πρότυπα που απαντώνται σήμερα στον τομέα της παιδαγωγικής θεωρίας και προβάλλουν την συνεισφορά κοινωνικο-ιστορικών παραμέτρων στη μάθηση.

---

[2] Στις κοινωνικές αναπαραστάσεις αναφερόμαστε σε «ορισμένες προκατασκευασμένες ιδέες, εκφράζουμε κάποιες προσδοκίες, ανάγομε τη σκέψη μας και την κρίση μας σε ορισμένα διανοητικά σχήματα, αναφερόμαστε στη «γνώση» που έχουμε για τη συγκεκριμένη ομάδα ή κοινωνική κατηγορία» [Παπαστάμου, Σ. 1989, σ. 416].

Δεύτερη ερώτηση

Σχολιάζοντας τις απαντήσεις των φοιτητριών στην δεύτερη ερώτηση διαπιστώνουμε ότι διατυπώνεται με τρόπο καθολικό (το 100% των απαντήσεων) το αίτημα της «κατοχής» εκ μέρους των Νηπιαγωγών ενός σώματος μαθηματικών γνώσεων. Ο τρόπος διατύπωσης του αιτήματος αυτού δεν αφήνει περιθώρια για μια σχετική, εκ μέρους των Νηπιαγωγών, κατανόηση κάποιων εννοιών ή τέλος, για προσέγγιση και εμβάθυνση σε κάποιες έννοιες στην διάρκεια διδακτικών καταστάσεων που δημιουργούνται κατά την διδασκαλία. Έτσι, η έλλειψη αυτοπεποίθησης εκ μέρους των εκπαιδευτικών και ο φόβος της μη ανταπόκρισης σε ένα ιδεατό επίπεδο πρόσκτησης των μαθηματικών γνώσεων μειώνει την διδακτική αποτελεσματικότητά τους και εκχωρεί υπευθυνότητες σε ειδικούς που συχνά δεν είναι σε θέση να δράσουν στην σχολική τάξη [Threlfall 1996]. Από τις απόψεις αυτές είναι επηρεασμένα και τα υποκείμενα που έχουν τοποθετηθεί μη απολυτοκρατικά στο θέμα της μαθηματικής γνώσης όπως, για παράδειγμα, το 1ο υποκείμενο που ισχυρίζεται ότι:

«*…ένας εκπαιδευτικός, όταν δεν κατέχει πλήρως μια μαθηματική έννοια είναι αδύνατο να μπορέσει να τη διδάξει. Πρώτον, δεν θα μπορούσε να την προσεγγίσει σωστά και δεύτερον θα την μετέδιδε-δίδασκε λανθασμένα*».

Την ίδια άποψη θα την συναντήσουμε να διατυπώνεται με περισσότερο τυπικούς όρους σε άλλη φοιτήτρια (2ο Υποκείμενο):

«*…είναι για μένα αδιανόητο να διδάξει κάποιος μια έννοια χωρίς να την κατέχει πλήρως*».

Τρίτη ερώτηση

Στην πραγμάτευση ενός μαθηματικού θέματος μπορεί να διατυπωθούν διαφορετικές απόψεις και διαφορετικές προσεγγίσεις να προκριθούν. Έτσι λοιπόν, στο πλαίσιο των αντιλήψεων της διαψευσιμότητας (43% του συνόλου των φοιτητριών)

«*…μια μαθηματική έννοια υπάρχει περίπτωση να έχει κατανοηθεί μεν αλλά να γεννιούνται απορίες και αμφιβολίες που σε κάνουν να αμφισβητείς αυτό που νομίζεις ότι έχεις καταλάβει*» (14ο Υποκείμενο).

Αντίθετα μια απολυτοκρατική θεώρηση προκρίνει μια ορισμένη προσέγγιση και λειτουργεί με τα χαρακτηριστικά των τυπικών εννοιών που αναζητούν την «σωστή» γνώση που κατακτάται βαθμιαία και γραμμικά από τα εύκολα στα δύσκολα (57% των φοιτητριών). Έτσι, τα μαθηματικά

«*θα πρέπει να μαθαίνονται σωστά! Μια μαθηματική έννοια, αν δεν υπάρχουν ενδιάμεσα στάδια μπορεί και να μην κατανοηθεί*» (4ο Υποκείμενο).

Τέταρτη ερώτηση

Στην τέταρτη ερώτηση μόνο το 21.4% των φοιτητριών υιοθέτησαν απολυτοκρατικές απόψεις. Ενδεικτική η άποψη της φοιτήτριας:

9ο Υποκείμενο: «*Τα παιδιά πρέπει να οικειοποιηθούν βασικές μαθηματικές έννοιες. Η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να είναι αποσπασμένη από κοινωνικά πλαίσια γιατί τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολα και αν συσχετιστούν με τα κοινωνικά πλαίσια η οικειοποίησή τους θα είναι πιο δύσκολη*».

Αντίθετα το 78.6% των φοιτητριών υιοθέτησαν απόψεις της διαψευσιμότητας. Για παράδειγμα το 1ο υποκείμενο ισχυρίζεται ότι:

«*Τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της καθημερινής μας ζωής και συσχετιζόμενα με αυτή μπορούν να γίνουν άμεσα αντιληπτά και κατανοητά. Συνεπώς η μαθηματική γνώση έχει σχέση με τα κοινωνικά πλαίσια*».

Εντοπίζουμε εδώ την επισήμανση που ήδη κάναμε προηγούμενα, ότι δηλαδή, όσο μετατοπίζεται το «φάσμα» των ερωτήσεων προς ερωτήσεις που σχετίζονται με την διδασκαλία, τόσο απαντώνται προσεγγίσεις που υπολογίζουν στην κοινωνικο-ιστορική φύση της μάθησης και της διδασκαλίας.

Πέμπτη ρώτηση

Με την ερώτηση αυτή προσπαθούμε να ξεφύγουμε από τις τοποθετήσεις που κινούνται σε ένα γενικό επίπεδο, είτε αυτό σχετίζεται με απόψεις για την φύση της μαθηματικής γνώσης, είτε με απόψεις για την διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών. Εδώ μέσα από την προτεινόμενη συγκεκριμένη δραστηριότητα επιχειρούμε να ανιχνεύσουμε τις απόψεις των φοιτητριών για τον βαθμό αυστηρότητας που απαιτούν στην εκτέλεσή της, ώστε να θεωρηθεί επιτυχής. Είναι ενδεικτικό ότι η πλειοψηφία αυτών που τοποθετήθηκαν (53.8%) διαπνέονται από μια απολυτοκρατική αντίληψη σχετικά με το μαθηματικά σωστό της απάντησης. Μερικές απαντήσεις που παραθέτουμε είναι ενδεικτικές:

7ο Υποκείμενο: «*Όχι διότι η μέτρηση θα πρέπει να έχει ακρίβεια*».

8ο Υποκείμενο: «*Όχι, γιατί το συγκεκριμένο 'μέτρο' δεν είναι αξιόλογο*(;), *αλλά ούτε διαθέτει εγκυρότητα και αξιοπιστία. Δεν δίνει με επιτυχία ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, αλλά τα αποτελέσματα θα είναι διαφορετικά από το κάθε άτομο*».

Τέλος, το 46.2% των φοιτητριών συνυπολογίζει στις απαντήσεις του την βαθμίδα της εκπαίδευσης στην οποία απευθυνόμαστε και προκρίνει την ορθότητα της διαδικασίας της μέτρησης, παρά το τελικό ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης όπως, για παράδειγμα, στην επόμενη περίπτωση:

«*Επειδή ακριβώς πρόκειται για Νηπιαγωγείο δεν έχει τόσο μεγάλη σημασία το αν θα έχουμε ακρίβεια στο αποτέλεσμα, αλλά το αν η μέτρηση πέρασε επιτυχώς ως μια νέα έννοια στα παιδιά*».

Συζήτηση

Στην παρουσίασή μας επιχειρήσαμε να παρουσιάσουμε το θέμα της παραγωγής της μαθηματικής γνώσης, καθώς και της απόδειξης στα μαθηματικά, μέσα από την σχηματική παρουσίαση δύο κυρίαρχων ρευμάτων της *απολυτοκρατίας* και της *διαψευσιμότητας* που διαπερνούν τόσο τις αντιλήψεις σχετικά με την φιλοσοφική και επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής επιστήμης, όσο και τις αντιλήψεις για την διδασκαλία τους. Επικαλεστήκαμε έρευνες που εντοπίζουν συσχετίσεις μεταξύ των φιλοσοφικών και επιστημολογικών αντιλήψεων και των ακολουθούμενων διδακτικών πρακτικών, πράγμα που σημαίνει ότι, μια ορισμένη οπτική για την γνώση ακολουθείται συνήθως από μια συγκεκριμένη οπτική για το φαινόμενο της μάθησης. Βέβαια, αρκετές φορές λόγω κύρια της παρεμβολής κοινωνικών παραμέτρων, παρατηρούνται «ασυνέπειες» στις συσχετίσεις αυτές, γεγονός που εντοπίζεται και στην περίπτωση των φοιτητριών του δείγματός μας. Ειδικότερα στην περίπτωση των φοιτητριών του δείγματός μας, διακρίνουμε ένα μεγάλο ποσοστό να εμφορείται από ιδέες απολυτοκρατικού τύπου για την μαθηματική γνώση και την μάθηση των μαθηματικών. Παρατηρήσαμε, επίσης, μια μετατόπιση των ιδεών τους σε ιδέες που συνάδουν περισσότερο με τις προσεγγίσεις της διαψευσιμότητας, όταν οι ερωτήσεις μετατοπίζονται από τις γενικές θεωρήσεις για την γνώση, σε ερωτήσεις που σχετίζονται με την διδασκαλία. Αποδώσαμε τις αλλαγές αυτές σε λόγους που έχουν να κάνουν με ορισμένες κοινωνικές αναπαραστάσεις που αναπτύσσονται στις υποψήφιες Νηπιαγωγούς, καθώς και στην ηγεμονία κάποιων διδακτικών προτύπων που ευνοούν μη απολυτοκρατικές προσεγγίσεις. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ένα πρόσθετο σημείο «ασυνέπειας» όταν υφίσταται μετατόπιση από το επίπεδο των γενικών διδακτικών απόψεων στο επίπεδο της συγκεκριμένης διδακτικής πρακτικής, όπως στην περίπτωση της διδακτικής προσέγγισης της μέτρησης του μήκους. Εδώ εντοπίζεται μια «παλινδρόμηση» από απόψεις μη απολυτοκρατικές, σε απόψεις απολυτοκρατικές. Όμως, συμπερασματικά οφείλουμε να υπογραμμίσουμε ότι, η ερευνητική προσέγγιση των θεμάτων που θίχτηκαν εδώ κάθε άλλο παρά εξαντλείται με τις προηγούμενες επισημάνσεις, που αποτελούν μάλλον ενδείξεις και εικασίες, παρά το αποτέλεσμα μιας ενδελεχούς ερευνητικής προσέγγισης.

Βιβλιογραφία

BATTISTA M. and CLEMENTS D. (1995). Geometry and Proof**.** *Mathematics Teacher*, v. 88, n.1, p. 48-54.

COBB, P. (1989). Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education. *For Learning Mathematics*, vol. 9, no. 2, pp. 32-42.

DEVIS, P., HERSH, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία.* Τροχαλία, Αθήνα.

ERNEST, P. (1996). The Nature of Mathematics and Teaching. *Philosophy of Mathematics Education*, Newsletter, 9.

HANNA, G., & JAHNKE, N. (1996). Proof and Proving. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, pp. 877-908.

JOSEPH, G. G. (1991). Foundatios of Eurocentrism in Mathematics. In Marry Harris (Ed.), *Schools, Mathematics and Work*, the Falmer Press, pp. 42 - 56.

KLINE MORRIS (1981). Λογική εναντίον Παιδαγωγικής**.** *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τεύχος 22, έκδοση της Ε.Μ.Ε., σελ. 3-34, Αθήνα.

LAKATOS, I. (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές. Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης.* Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

SKINNER, (1958). Teaching Machines. *Science,* 128.

THRELFALL, J (1996). Absolutism or Not Absolutism- What Difference Does it Make? *Philosophy of Mathematics Education*, Newsletter, 9 *Philosophy of Mathematics Education*, Newsletter, 9.

ΖΑΧΑΡΟΣ, Κ. (2000). Πολιτισμικές και κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής παιδείας. Εισήγηση στο *17ο ετήσιο συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας,* σ. 398-408 των πρακτικών του συνεδρίου.

ΠΑΠΑΣΤΑΜΟΥ, Σ. (1989). *Εγχειρίδιο Κοινωνικής Ψυχολογίας.* Οδυσσέας, Αθήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σκέψεις για τα μαθηματικά και την διδασκαλία τους

Να σχολιαστούν οι παρακάτω απόψεις. Αναλυτικότερα να αναφέρετε αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε (μερικά ή ολικά) με τις απόψεις αυτές. Στην περίπτωση που έχετε μια διαφορετική προσέγγιση των θεμάτων που θίγονται να αναφέρετε την δική σας άποψη.

1. Να σχολιαστούν οι παρακάτω απόψεις πουν αφορούν σε αντιλήψεις σχετικές με τα μαθηματικά:

    α) Η μαθηματική γνώση είναι α-χρονική και α-ιστορική με την έννοια ότι οι αλήθειες της έχουν μια διαχρονική ισχύ και η ανάπτυξή της δεν συναρτάται με πολιτισμικές και ηθικές αξίες. Είναι μια καθαρή γνώση που είναι χρήσιμη εξαιτίας της καθολικής εγκυρότητάς της.

    β) Τα μαθηματικά είναι προϊόν κοινωνικών διαδικασιών. Η μαθηματική γνώση θεωρείται ότι είναι διαρκώς ανοικτή σε αναθεωρήσεις των αποδείξεων των θεωρημάτων της και των θεμελιωδών εννοιών της.

2. Ο/η Νηπιαγωγός οφείλει να κατέχει με επάρκεια τα μαθηματικά που πρόκειται να διδάξει. Πως θα μπορούσε να διδάξει μια έννοια αν δεν την κατέχει πλήρως;

3. Τα μαθηματικά πρέπει να μαθαίνονται σωστά ήδη από τις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Μια μαθηματική έννοια ή έχει κατανοηθεί ή δεν έχει, χωρίς να υπάρχουν ενδιάμεσα στάδια.

4. Να σχολιαστούν οι παρακάτω απόψεις που σχετίζονται με την διδασκαλία των μαθηματικών:

    α) Η διδασκαλία των μαθηματικών οφείλει να είναι αποσπασμένη από κοινωνικά πλαίσια και αξίες. Το ενδιαφέρον της πρέπει να επικεντρωθεί στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και τους κανόνες που συγκροτούν το «σώμα» των σχολικών μαθηματικών, ώστε τα παιδιά να οικειοποιηθούν τις σωστές μαθηματικές γνώσεις.

β) Η διδασκαλία των μαθηματικών οφείλει να αντιμετωπίζεται από μια οπτική που την συναρτά με κοινωνικά πλαίσια. Τα μαθηματικά πρέπει να βιώνονται ανθρώπινα, προσωπικά, διαισθητικά, συνεργατικά, δημιουργικά, διερευνητικά, πολιτιστικά, ιστορικά ζωντανά, συναρτημένα με τις ανθρώπινες καταστάσεις, ευχάριστα, γεμάτα χαρά, περιέργεια και ομορφιά.

5. Στις απόπειρες προσέγγισης της έννοιας του μήκους στο Νηπιαγωγείο χρησιμοποιείται ως «μέτρο» μέτρησης του μήκους μιας ράβδου το μήκος συνδετήρων. Μπορεί να θεωρηθεί ως επιτυχής μέτρηση αυτή που δίνεται από απαντήσεις όπως για παράδειγμα: «το μήκος είναι περίπου πέντε», «είναι πέντε και κάτι», κλπ.;

Το ατελές επιχείρημα

Δυσκολίες των σημερινών φοιτητών-αυριανών δασκάλων των Μαθηματικών στη διατύπωση εξηγήσεων απέναντι σ' έναν υποθετικό μαθητή

Μαρία Μπεμπόνη & Τάσος Πατρώνης

Πανεπιστήμιο Πάτρας, Τμήμα Μαθηματικών

1.Εισαγωγή

Καθ'όλη τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους δραστηριότητας οι καθηγητές των Μαθηματικών, μεταξύ άλλων,αγωνίζονται και προσδοκούν οι μαθητές τους να καταστούν ικανοί να παρουσιάσουν μέσα στην τάξη σε προφορική ή γραπτή μορφή,ένα μαθηματικό επιχείρημα ή μια ολοκληρωμένη απόδειξη όσων ζητούνται ή ακόμα και όσων διατυπώνονται από τους ίδιους τους μαθητές.

Το επιχείρημα ή η απόδειξη μπορεί να αναφέρεται σε ένα θεώρημα-κάτι που ήδη έχει αποδειχτεί από άλλους-ή σε ένα πρόβλημα που αναζητά τη λύση του(«a problem to prove» κατά τον Polya,(1957).

Τις περισσότερες φορές το πρόβλημα προς λύση παρουσιάζεται με τη μορφή:"Να δειχθεί ότι........." -δηλαδή το πρόβλημα έχει ήδη λυθεί στο παρελθόν,άρα δεν είναι πρόβλημα ,απλά χρησιμεύει για εξάσκηση.

Κάποιες άλλες φορές δίνεται με τη μορφή ανοιχτού προβλήματος:"Να βρεθεί σημείο....." ή "Να κατασκευασθεί......" ή "να βρεθεί το άθροισμα ....", κατάσταση που απαιτεί εξερεύνηση,διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους,τη δικαιολόγησή ή την απόδειξή τους.

Πολύ συχνά ωστόσο οι καθηγητές των Μαθηματικών βρίσκονται αντιμέτωποι με τη δυσκολία των μαθητών να κατασκευάσουν μια απόδειξη των όσων ζητήθηκαν ή να εκθέσουν τα όποια επιχειρήματά τους έτσι ώστε να βασίζονται σε μια θεωρία ή σε σχέδια,μετρήσεις,επινοήσεις ή οτιδήποτε θα μπορούσε να αποτελέσει τεκμήριο.

Αυστηρή ή όχι,τυπική,λιγότερο τυπική ή εμπειρική η απόδειξη,τα τελευταία χρόνια έχει δεχτεί μια ολοένα και αυξανόμενη προσοχή των καθηγητών των Μαθηματικών,καθώς και των ερευνητών στο χώρο της Μαθηματικής Παιδείας.(Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εξής εργασίες:

Markel,1994; Moore,1994; Battista,1996; Reid,1999; Hanna,1989; Otte,1990; Hanna,1996; Balacheff,1987; Almeida,1996; Fischbein,1982; Knuth,2002; Yackel E. & Cobb P.,1996; Yackel,2001; Reid,2002; Douek,1999; Ancel Recio & Juan Godino,2001; Simon and Blume1996;).

Άλλη ένδειξη για το μεγάλο ενδιαφέρον επάνω στο πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι η ηλεκτρονική εφημερίδα που εκδόθηκε από την M:A:Mariotti(htpp//:www-didactique.imag.preuve)

Τα ερωτήματα είναι πολλά.Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε κάποια κοινά,πιθανόν σε όλους μας:

- Τι συνιστά *επιχειρηματολογία* στα Μαθηματικά και πως αυτή συνδέεται με την απόδειξη;
- Υπάρχουν επίπεδα απόδειξης στα Μαθηματικά;
- Κατά πόσο συνιστούν επιχειρηματολογία οι εξηγήσεις και οι αιτιολογήσεις των δασκάλων και των μαθητών στη τάξη,προκειμένου να πείσουν τους συνομιλητές τους;

Αυτά και άλλα ερωτήματα μας οδήγησαν να διεξαγάγουμε και εμείς μια έρευνα γύρω από τις δυσκολίες των φοιτητών-αυριανών δασκάλων των Μαθηματικών να αποδεικνύουν καθώς και να εξηγούν,να διευκρινίζουν «σκοτεινές» όψεις που αναδεικνύονται στα προβλήματα όντας αντιμέτωποι με έναν υποθετικό μαθητή,μια και όλα τα ανωτέρω θα αποτελέσουν στο μέλλον τους κύριους στόχους της διδασκαλίας τους.Επίσης προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε πόσο βοηθά στην εξήγηση ενός μαθηματικού ισχυρισμού η απομάκρυνση από το αρχικό πλαίσιο του προβλήματος και η *αναπλασίωση* του σε ένα νέο πλαίσιο(καθημερινή ζωή,γεωμετρικά μοντέλα,κλπ.). Για την ανάλυση -a posteriori-των ευρημάτων μας και την ταξινόμησή τους ως επιχειρήματα ή όχι χρησιμοποιήσαμε το σχήμα του επιστημολόγου Toulmin που εισάγεται κατά μοναδικό τρόπο στο βιβλίο του *The uses of argument*,1958.

Στο παρόν άρθρο θα αναλύσουμε ορισμένα είδη μαθηματικής επιχειρηματολογίας ως αλυσίδες επιχειρημάτων που έχουν την τριαδική δομή του σχήματος Toulmin:***Δεδομένα-Εγγύηση-Συμπέρασμα (Δ-Ε-Σ)***,και με βάση αυτό το θεωρητικό εργαλείο θα αναλύσουμε τις παραγωγές των φοιτητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα και θα καθορίσουμε τι συνιστά ένα ατελές επιχείρημα.

2.Έννοιες σχετικές με την Επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά

Η Αθηναϊκή Δημοκρατία του 5ου αιώνα π.Χ χαρακτηρίζεται ως ένα σημαντικό βαθμό από το *ρητορικό λόγο* και το *επιχείρημα,* καθώς η πειθώ και η απόσπαση της συναίνεσης αντικαθιστά την αυθαίρετη επιβολή της γνώμης του ενός πάνω στους άλλους. Στη "Ρητορική" του ,ο Αριστοτέλης περιέγραψε τη ρητορική τέχνη ως την «τέχνη του να ανακαλύπτεις αυτό που σε κάθε περίπτωση είναι κατάλληλο για να πείσει"(*Ρητορική Ι,*1355b,25) η οποία απευθύνεται σε ένα ακροατήριο μεγάλο και μάλλον χωρίς ικανότητα να απαντήσει στα επιχειρήματα. Η τεχνική της εδώ συνίσταται στο να φαίνεται κάτι αληθινό, όχι να είναι. Ο σκοπός είναι να βρεις τι είναι ικανό να πείσει χωρίς να ξεκινάς αναγκαία από αληθή σημεία ούτε να καταλήγεις σε αληθή συμπεράσματα..

Πέρα από τη Ρητορική, η Διαλεκτική (*Όργανου, Τοπικά*) απευθύνεται σε ένα συνομιλητή που μπορεί να αντιδράσει ή καλύτερα να αμφισβητήσει τα επιχειρήματα αυτού που επιχειρηματολογεί και που νομίζει ότι ξεκινά από αληθείς προτάσεις.

Η μέθοδος της ρητορικής ,ο τρόπος δηλ. απόδειξης-πραγματικής ή φαινομενικής-είναι όπως και της διαλεκτικής,η «επαγωγή» και ο «συλλογισμός».Την πρώτη ονομάζει «παράδειγμα» και το δεύτερο «ενθύμημα».Τα πρώτα αποτελούν γενική αλήθεια παραγόμενη από πολλά όμοια συμβάντα,τα δεύτερα είναι γενική κρίση παραγόμενη από άλλες κρίσεις.Μεταξύ των δύο σημαντικότερα είναι τα *ενθυμήματα* τα οποία προέρχονται *εξ εικότων και σημείων*(από πιθανότητες και ενδείξεις).

Το *εικός* –πιθανόν- αντιπροσωπεύει το «ως επί το πλείστον».Η *ένδειξη* είναι λιγότερο από απόδειξη και περισσότερο από εικασία,όταν δεν μπορεί να ανατραπεί ονομάζεται «τεκμήριο» και ισοδυναμεί με απόδειξη.

Εκτός από τη Ρητορική και τη Διαλεκτική,ο Αριστοτέλης ασχολείται και με την Αναλυτική-λογική επιχειρηματολογία-(*Οργανον,Αναλυτικά Ύστερα*),η οποία βασίζεται στον επιστημονικό ορθολογισμό που οφείλει να σχηματίζει ορθούς συλλογισμούς και δεν απευθύνεται κατ'ανάγκη σε κάποιο κοινό,είναι ένα "όργανον".

Στη σύγχρονη εποχή,τώρα,σύμφωνα με τον Toulmin(1958) η Επιχειρηματολογία συνδέται με τον συλλογισμό κι'έτσι με την επιστήμη που ασχολείται με αυτόν:τη λογική.Είναι μέρος της λογικής.Η θεωρία της επιχειρηματολογίας είναι ένα είδος ανανέωσης της λογικής.

Όπως θα δούμε πιο κάτω ο Toulmin προσδιορίζει τη δομή οποιουδήποτε επιχειρήματος.

Ακολουθώντας τον Perelman,κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι το επιχείρημα χαρακτηρίζεται λιγότερο από τη γνώση του αντικειμένου του και περισσότερο από τον ακροατή.

Η θεωρία της ρητορικής,των Perelman και Olbrechts-Tyteca, το πιο σπουδαίο έργο των οποίων είναι *La nouvelle rhétorique:traité de l'argumentation,*1958,είναι μια θεωρία επιχειρηματολογίας.Η επιχειρηματολογία για αυτούς είναι διαφορετική από την απόδειξη και την τυπική λογική.Η επιχειρηματολογία είναι «…προσωπικού χαρακτήρα γιατί ξεκινά με προτάσεις που το ακροατήριο δέχεται,είναι προσωποκεντρική δραστηριότητα» ενώ «η απόδειξη χρησιμοποιεί τη Μαθηματική γλώσσα και εμπλέκει υπολογισμούς σύμφωνα με κανόνες αποδεκτούς από την τυπική,παραγωγική λογική και είναι απρόσωπη» (σ.4)

Οι Perelman και Olbrechts-Tyteca εστιάζουν στη κεντρική έννοια του ακροατηρίου τη διάκριση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης.Ορίζουν ως ακροατήριο «το σύνολο εκείνων τους οποίους εύχεται ο ομιλητής να επηρεάσει με την επιχειρηματολογία του».(σ.19)

Το παγκόσμιο ακροατήριο αποτελείται από τους λογικούς και έχοντες τα προσόντα ανθρώπους (competent) είναι μια διανοητική σύλληψη που κατασκευάζει ο ομιλητής και δεν είναι απαραίτητη η φυσική του παρουσία.

Από την πλευρά του ο Balacheff(1987) θεωρεί ότι η *απόδειξη* είναι μια μορφή *τεκμηρίωσης (preuve)* ανάμεσα σε άλλες,όπου *τεκμηρίωση* είναι: «μια εξήγηση αποδεκτή από μια κοινότητα σε μια δοθείσα στιγμή:αυτή η απόφαση της αποδοχής της εξήγησης,μπορεί να είναι το αντικείμενο μιας συζήτησης,της οποίας η σημασία είναι η απαίτηση να καθοριστεί ένα σύστημα εγκυρότητας ανάμεσα στους συνομιλητές».Αλλά «στους κόλπους της μαθηματικής κοινότητας δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτές ως τεκμηριώσεις παρά εκείνες οι εξηγήσεις που θα υιοθετούν μια ειδική φόρμα,ήτοι,μια οργανωμένη σειρά από δηλώσεις που ακολουθούν καθορισμένους κανόνες:μια πρόταση ή δήλωση ή είναι γνωστή ότι είναι αληθής ή παράγεται από αυτές που προηγούνται μέσω ενός κανόνα παραγωγής ο οποίος έχει ληφθεί από ένα σύνολο κανόνων καλά ορισμένο δηλαδή στα πλαίσια ενός θεωρητικού συστήματος.Αυτές τις τεκμηριώσεις τις λέμε *αποδείξεις*».

Κατά τον Balacheff άλλες μορφές τεκμηρίωσης εκτός από τη μαθηματική απόδειξη είναι:α)*ο απλοϊκός εμπειρισμός(empirisme naïf)* όπου η βεβαιότητα για την αλήθεια έλκεται από μικρό αριθμό παρατηρήσεων) β)*το βασικό πείραμα (expérience cruciale)* που βασίζεται σε πρόκληση συμβάντος και στην επιβεβαίωση «αν αυτό ισχύει,θα ισχύει για κάθε περίπτωση»γ)*το γενεσιουργό παράδειγμα(exemple générique)*˙εδώ ο ισχυρισμός γίνεται έγκυρος μέσα από την προσκόλληση στον κύριο αντιπρόσωπο μιας οικογένειας,μιας κλάσης αντικειμένων ο οποίος δίνει όλες τις ιδιότητες και τη δομή όλης της οικογένειας) και δ*) το νοητικό πείραμα(expérience mentale)*κατά το οποίο η δράση εσωτερικοποιείται και αποσπάται από την πραγματοποίησή της πάνω σε έναν ειδικό αντιπρόσωπο.

Ο Ducrot(1984) τοποθετεί την επιχειρηματολογία στην καρδιά της γλωσσικής δραστηριότητας. Η ανάλυση των συνδέσμων έχει ιδιαίτερη σημασία για τον Ducrot γιατί,την πληροφορία που περιέχεται σε ένα θέμα την συνδέουν με τον συνολικό επιχειρηματολογικό σκοπό της. Η πολυφωνία των συνδέσμων κάνει δυνατόν να εμφανίζεται στο λόγο,όχι μόνο ο ομιλητής αλλά ο δυνητικός συνομιλητής. «Ρ αλλά Π» δείχνει ένα υποκείμενο που συντάσσεται με τον Ρ στο οποίο ο ομιλητής αντιτάσσει το Π. Για μια κριτική της άποψης του Ducrot βλ.Plantin(1990).

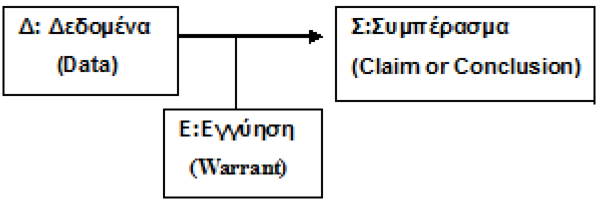
Πολλές φορές στη μαθηματική πρακτική,αλλά και στη τάξη των Μαθηματικών παρατηρούμε να διατυπώνεται μια μαθηματική επιχειρηματολογία διαφορετικού είδους από αυτή της μαθηματικής απόδειξης.Αυτή η επιχειρηματολογία βασίζεται σε αντιλήψεις του ομιλητή ή του συντάκτη ενός κειμένου.Οι αντιλήψεις αυτές μπορεί να είναι,(αλλά όχι απαραίτητα) θεωρία,διαγράμματα,σχήματα κλπ. Και να εδραιώνεται μέσα και από μια αποπλαισίωση του ισχυρισμού και επανατοποθέτησή του σ'ένα νέο πιο οικείο αντιληπτικά πλαίσιο.Οι τεκμηριωμένες προτάσεις θεωρούνται έγκυρες από αυτόν που τις κατασκευάζει,μια και κατασκευάζει τεκμήρια στηριζόμενος στις αντιλήψεις του,έως αυτές να τεθούν υπό αμφισβήτηση.Το προϊόν,όμως, της μαθηματικής επιχειρηματολογίας είναι ένας ισχυρισμός που θα μπορούσε να μετατραπεί σε αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα μόνο μέσω μιας *απόδειξης*.

3.Μαθηματική Επιχειρηματολογία και Κοινωνικά Συμφραζόμενα

Έρευνες όπως του Vygotsky(1978),της Donaltson(1978),της Walkerdine(1988),της Lave(1988),της Coquin-Viennot(1988) και πιο πρόσφατα των Yackel και Cobb(1996),έδειξαν ότι η επιχειρηματολογία και γενικότερα η ορθολογική σκέψη αναπτύσσεται μέσα σε ιδιαίτερα πλαίσια κοινωνικών συμφραζομένων(social contexts) και μπορεί να διαφέρει σε μορφή και σημασιολογικό περιεχόμενο ανάλογα με το πλαίσιο συμφραζομένων στο οποίο εντάσσεται.Ιδιαίτερα οι Voigt(1995),Yackel και Cobb(1996) εισήγαγαν την έννοια της *κοινωνιο-μαθηματικής νόρμας* (socio-mathematical norm),προκειμένου να χαρακτηρίσουν εκείνους τους κανόνες μιας ιδιότυπης κοινωνικής συμπεριφοράς στη τάξη,η οποία συνδέεται με το γεγονός ότι το αντικείμενο της διδασκαλίας είναι τα Μαθηματικά.Έτσι βρέθηκε π.χ ότι από τάξη σε τάξη (και όχι μόνο για σχολικές τάξεις αλλά και για πανεπιστημιακές τάξεις) διαφέρουν οι αντιλήψεις για το τι συνιστά μια *αποδεκτή εξήγηση* ή *απόδειξη* ή για το *πότε χρειάζεται να δοθεί* εξήγηση ή απόδειξη σε έναν ισχυρισμό ή σεμια μέθοδο που ακολουθεί ο καθηγητής ή οι σπουδαστές.Οι αντιλήψεις αυτές,όμως,που αποτελούν τη λεγόμενη «μαθηματική κουλτούρα της τάξης των Μαθηματικών» (Cobb και Yackel,1998)δεν έχουν τη σταθερότητα και το κοινωνικό «βάρος» που χαρακτηρίζει τη κουλτούρα ορισμένων κοινωνικών ομάδων και θεσμών,όπως τη περιγράφει η ανθρωπολογική και κοινωνιολογική έρευνα.Μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με τις πεποιθήσεις των δασκάλων ή τους περιορισμούς που επιβάλλει το αναλυτικό πρόγραμμα και το εκπαιδευτικό σύστημα,γι'αυτό συνδέονται ίσως περισσότερο με τα πολυδιάστατα και πολυσήμαντα εκείνα φαινόμενα που η Γαλλική Σχολή της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει περιγράψει με τη βοήθεια της πολυσυζητημένης έννοιας του διδακτικού συμβολαίου(βλ.μια «αιρετική»,σχετικά, αντίληψη αυτής της έννοιας στο:Πατρώνης,1990,καθώς και μια επανατοποθέτησή της σ'ένα θεωρητικό πλαίσιο του J.Habermas στο:Paulopoulou & Patronis,2002).

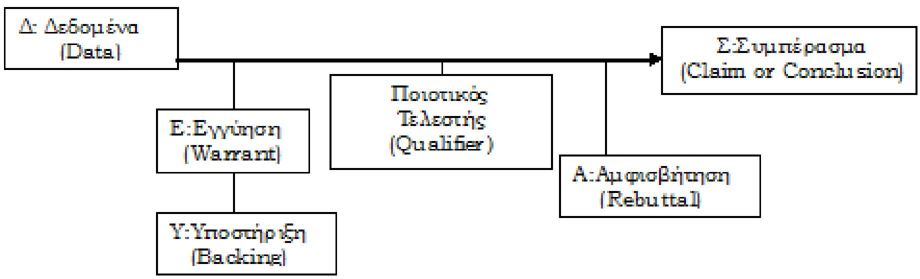
4.Ένα εργαλείο ανάλυσης: Το σχήμα Toulmin για το επιχείρημα

Θα λέγαμε ότι υποστηρίζουμε την άποψη ότι η επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά σημαίνει «πείθω τον συνομιλητή με προσφυγή στη λογική», «προσπαθώ να φέρω το συνομιλητή σε θέση να αναγνωρίσει την αλήθεια ενός ισχυρισμού,μιας διατύπωσης,όπου ο συνομιλητής είναι η Μαθηματική κοινότητα,η τάξη των Μαθηματικών,ή ακόμα και ο ίδιος ο εαυτός εκείνου που επιχειρηματολογεί».Θα πρόκειται όμως πάντα για ένα ακροατήριο λογικό,που μπορεί να συμφωνεί ή να διαφωνεί με εκείνον που επιχειρηματολογεί ,σε κάθε περίπτωση,όμως, θα μπορεί και θα είναι ελεύθερο να απαντήσει.Για μας, ο σκοπός της επιχειρηματολογίας είναι να ανακαλύψει την αλήθεια,μέσα σε ένα ακροατήριο όπου,έχει γίνει αποδεκτό τι θεωρείται λογικό και που οι γνώσεις έχουν αποκτηθεί από κοινού.
Έτσι απομακρυνόμαστε από την Yackel(2001),που αναφερόμενη στην *εξήγηση* και την *αιτιολόγηση*, τις ορίζει έτσι ώστε να αποσκοπούν στην αμοιβαία κατανόηση και συναίνεση χωρίς απαραίτητα να προσφεύγουν στη λογική.
Υιοθετούμε το σχήμα Toulmin για την επιχειρηματολογία,που λαμβάνει υπόψη μια δομή αποτελούμενη από τρία στοιχεία:το *Συμπέρασμα* ή *Ισχυρισμό(*Claim),τα *Δεδομένα* (Data) και την *Εγγύηση* (Warrant).Το σχήμα αναπαρίσταται ως εξής:



Το *Συμπέρασμα* βασίζεται σε έναν αριθμό *Δεδομένων* που παρήχθησαν για να το υποστηρίξουν και είναι το σημείο εκκίνησης κάθε επιχειρήματος.Με άλλα λόγια είναι τα συμβάντα που επικαλούμαστε για να στηρίξουμε το *Συμπέρασμα* Αλλά για να περάσουμε από τα

Δεδομένα στο *Συμπέρασμα*,αυτό το πέρασμα νομιμοποιείται από την *Εγγύηση*.Η *Εγγύηση* εξηγεί γιατί τα *Δεδομένα* υποστηρίζουν το *Συμπέρασμα,*παρ'όλο που αυτή μπορεί να είναι και υπονοούμενη.Είναι το μέρος του επιχειρήματος που εδραιώνει το λογικό σύνδεσμο ανάμεσα σε *Δεδομένα* και *Συμπέρασμα* και που μπορεί να αμφισβητηθεί.
Ο επιχειρηματικός λόγος όμως μπορεί να είναι πιο πολύπλοκος και να έχει ανάγκη τριών ακόμα στοιχείων:
Ο *Ποιοτικός Τελεστής* (Qualifier) είναι ένας προσδιορισμός (επίρρημα:όπως,«πιθανόν», «συχνά», «ενδεχομένως»), που μας δείχνει την δύναμη του *Συμπεράσματος*,μια και η *Εγγύηση* πολλές φορές δεν μας εξουσιοδοτεί να αποδεχτούμε ανεπιφύλακτα το *Συμπέρασμα*,αλλά είτε διστακτικά,είτε θέτοντάς το ως υποκείμενο σε συνθήκες, εξαιρέσεις, περιορισμούς .Το σχήμα του Toulmin προβλέπει μια θέση για τις συνθήκες *Αμφισβήτησης*(Rebuttal).Αν υπάρχουν εξαιρέσεις του *Ισχυρισμού–Συμπέρασμα*, η ισχύς της *Εγγύησης* αποδυναμώνεται.Οι συνθήκες μέσα στις οποίες ακυρώνεται η εξουσία της *Εγγύησης* λαμβάνονται υπόψη στην *Αμφισβήτηση*.Όταν η *Εγγύηση* δεν γίνεται κατανοητή ή αποδεκτή από το ακροατήριο,ο ομιλητής θα πρέπει να υπερασπιστεί την *Εγγύηση*.Η *Εγγύηση* χρειάζεται για να στηριχθεί,επιπλέον λόγους,διαβεβαιώσεις:την *Υποστήριξη(*Backing).Η Υποστήριξη διαφέρει από την Εγγύηση στο ότι η Εγγύηση είναι μια υποθετική γεφυροποιός δήλωση,μεταξύ δεδομένων και συμπεράσματος,ενώ η Υποστήριξη μπορεί να εκφρασθεί ως κατηγορηματική δήλωση κάποιου συμβάντος.
Έτσι έχουμε το πλήρες σχήμα του Toulmin:



Τα έξι αυτά στοιχεία Δ-Ε-Σ-Π.Τ.-Α-Υ(D-W-C-Q-R-B) είναι κοινά σε οποιοδήποτε πεδίο.Το επιχείρημα μπορεί να αλλάζει από πεδίο σε πεδίο(δίκαιο,πολιτικός λόγος,επιστημονικός λόγος..)αλλά η δομή του επιχειρήματος μένει η ίδια.

Πολλές φορές δεν είναι εύκολο να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα από τα δεδομένα δηλαδή να προσδιορίσουμε την εγγύηση ή υπάρχει αμφισβήτηση ή μη κατανόηση της εγγύησης και δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η υποστήριξη της εγγύησης.Έτσι μπορεί να δεχθεί ο ισχυρισμός μια *αναπλαισίωση,*έτσι ώστε να αποδυναμωθεί η εξαίρεση αν υπάρχει και η εγγύηση να είναι αληθής στο νέο πλαίσιο ή να βρεθεί μια νέα εγγύηση.Έτσι δίνεται μια νέα στήριξη στην εγγύηση ή οδηγούμαστε πιο εύκολα στο συμπέρασμα ενισχύοντάς το,π.χ, με τη βοήθεια μιας ερμηνείας σε γεωμετρικό πλαίσιο. Ωστόσο μπορεί να συμβεί και το αντίθετο.Η αλλαγή πλαισίου να φέρει μια νέα αμφισβήτηση στην εγγύηση οπότε να αποδυναμωθεί η υποστήριξή της και περαιτέρω ο ισχυρισμός.

Άλλες φορές πάλι η διατύπωση του ισχυρισμού μας οδηγεί κατ’ευθείαν σε *αναπλαισίωση*, χωρίς αναγκαία να διαπιστώσουμε τις προαναφερόμενες δυσκολίες ή αντιλογίες που τυχόν θα προέκυπταν στο αρχικό πλαίσιο.
Θα δούμε τώρα πώς μπορεί να αναπαρασταθούν,με τη βοήθεια του πιο πάνω σχήματος,τα βήματα διαφόρων ειδών μαθηματικής επιχειρηματολογίας.
Τα είδη που θα μας απασχολήσουν δεν περιλαμβάνουν την τυπική μαθηματική απόδειξη-παρ’όλο που είναι εύκολο να παρασταθεί με το σχήμα Toulmin,καθώς θεωρούμε ότι και αυτή είναι μια ειδική μορφή επιχειρηματολογίας.

4.1 (Ατελής) επαγωγή που γενικεύει κατ’ευθείαν από τα επιμέρους συμπεράσματα(«απλοϊκός εμπειρισμός» κατά τον N.Balacheff ή «παράδειγμα» κατά τον Αριστοτέλη)

Το τελευταίο (n-οστό) βήμα της επιχειρηματολογίας μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

Δ: $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\ldots,\Delta n\text{-}1$ → **Σ :**

Ε: Οι επιμέρους περιπτώσεις έχουν επιλεγεί τυχαία από το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων

Στην εμπειρική έρευνα τα Δi είναι τα δεδομένα μιας άμεσης εμπειρικής παρατήρησης

Παράδειγμα:

Δ:Παρατήρηση κύκνων σε διάφορες θέσεις (πάρκα,λίμνες,κ.λ.π.) στην Ευρώπη.

Ε:Γενίκευση από τα συμπεράσματα-οι επιμέρους περιπτώσεις έχουν επιλεγεί τυχαία από το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων

Σ:Όλοι οι κύκνοι είναι λευκοί ή υπόλευκοι.

Στα Μαθηματικά συνήθως τα Δi είναι τα συμπεράσματα Σi,των n-1 προηγουμένων επιχειρημάτων.

Παράδειγμα:

«Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με φυσικό αριθμό,το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

$Δ_1$: k=1,Ε:τύπος εμβαδού κύκλου($πρ^2$),$Σ_1$:εμβ1=$1^2.πρ^2$

$Δ_2$: k=2,Ε= τύπος εμβαδού κύκλου($πρ^2$),$Σ_2$:εμβ2= $π(2ρ)^2=4πρ^2= 2^2.πρ^2$

$Δ_3$: k=3,Ε= τύπος εμβαδού κύκλου($πρ^2$),$Σ_3$:εμβ3= $π(3ρ)^2=9πρ^2= 3^2.πρ^2$

Έτσι **Δ: $\mathbf{Σ_1,Σ_2,Σ_3} \longrightarrow$** **Σ**:«Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με φυσικό αριθμό,το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Τα $Σ_1,Σ_2,Σ_3$ είναι τα συμπεράσματα των βημάτων που προηγούνται και είναι τα δεδομένα του τελευταίου βήματος,που οδηγεί στην γενική περίπτωση.Η εγγύηση είναι η γενίκευση κατ'ευθείαν από τα επιμέρους συμπεράσματα,μια και οι επιμέρους περιπτώσεις έχουν επιλεγεί τυχαία από το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων.

4.2 *Επαγωγή που γενικεύει πάνω στη διαδικασία(γενεσιουργό παράδειγμα κατά N.Balacheff)*

Το τελευταίο (n-οστό) βήμα της επιχειρηματολογίας μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

Δ:Σ_1,$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$, $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4$,... $\longrightarrow$ **Σ:**

Ε:Η διαδικασία σύνδεσης μεταξύ των επιμέρους συμπερασμάτων είναι κοινή

Παράδειγμα: «Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με φυσικό αριθμό,το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Δ_1:k=1,Ε:τύπος εμβαδού κύκλου($\pi\rho^2$),Σ_1:εμβ$_1$=$1^2.\pi\rho^2$

Δ_2: k=2,Ε= τύπος εμβαδού κύκλου($\pi\rho^2$),Σ_2:εμβ2= $\pi(2\rho)^2$=$4\pi\rho^2$= $2^2.\pi\rho^2$

Δ_3: k=3,Ε= τύπος εμβαδού κύκλου($\pi\rho^2$),Σ_3:εμβ3= $\pi(3\rho)^2$=$9\pi\rho^2$= $3^2.\pi\rho^2$

Το επιχείρημα **$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$** αποτελείται από τα εξής τρία στοιχεία:

Σ_1:k=1,εμβ$_1$=$1^2.\pi\rho^2$ $\rightarrow$ **Σ_2**:εμβ$_2$=$2^2.\pi\rho^2$ με **Ε**:όταν η ακτίνα πολλαπλασιάζεται με το k+1,η ακτίνα ισούται με (k+1).ρ,η (ακτίνα)^2 =$[(k+1).\rho])^2$=$(k+1)^2\cdot\rho^2$

Το επιχείρημα **$\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$** αποτελείται από τα εξής τρία στοιχεία:

Σ_2:k=2,εμβ$_2$=$2^2.\pi\rho^2$$\rightarrow$ **Σ_3**:εμβ$_3$=$3^2.\pi\rho^2$ με **Ε**: όταν η ακτίνα πολλαπλασιάζεται με το k+1,η ακτίνα ισούται με(k+1).ρ,η (ακτίνα)^2 =$[(k+1).\rho])^2$=$(k+1)^2\cdot\rho^2$

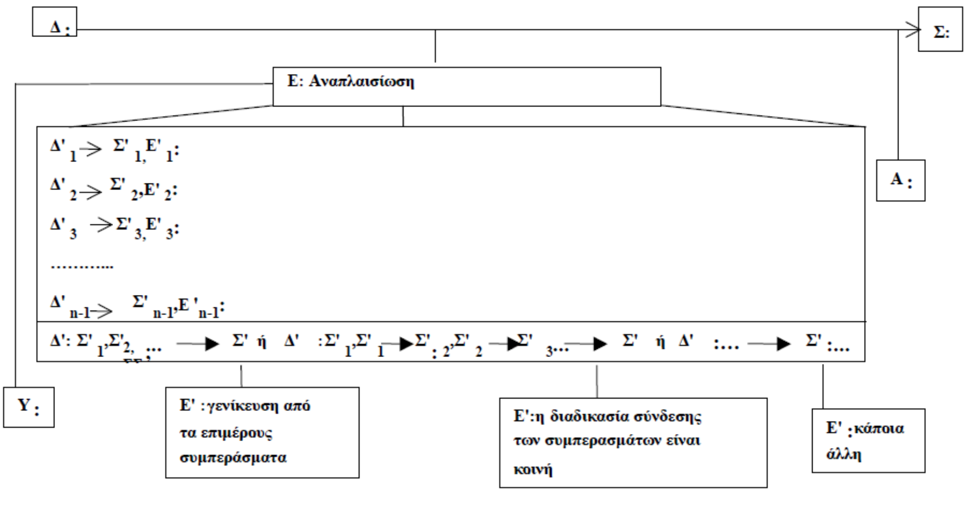
Έτσι το τελευταίο βήμα της επιχειρηματολογίας **Δ:Σ_1,$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$,$\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$,$\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4$,...,** **$\Sigma$** με **Ε:**γενίκευση στη διαδικασία σύνδεσης των συμπερασμάτων και **Σ**:«Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με ακέραιο φυσικό αριθμό,το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Τα δεδομένα Σ_1,$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$,$\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$,$\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4$,…είναι τα επιχειρήματα που συνδέουν τα συμπεράσματα και είναι τα δεδομένα του τελευταίου βήματος που οδηγεί στην γενική περίπτωση.Η εγγύηση είναι η γενίκευση που βασίζεται στη διαδικασία σύνδεσης των συμπερασμάτων.Οι επιμέρους περιπτώσεις δεν έχουν επιλεγεί τυχαία.Θα μπορούσαμε έτσι να πούμε ότι, αφού η γενίκευση βασίζεται στη διαδικασία που συνδέει τα συμπεράσματα,και όχι στα ίδια τα συμπεράσματα, αυτή η τεκμηρίωση είναι της μορφής του γενεσιουργού παραδείγματος.Και ένας μόνος αντιπρόσωπος αρκεί,π.χ, θα μπορούσε να πάρει κανείς ως Δεδομένα στο τελευταίο βήμα το επιχείρημα $Σ_1 \to Σ_2$ ή $Σ_2 \to Σ_3$ ως γενεσιουργό παράδειγμα της όλης διαδικασίας που αναφέρθηκε πιο πάνω.

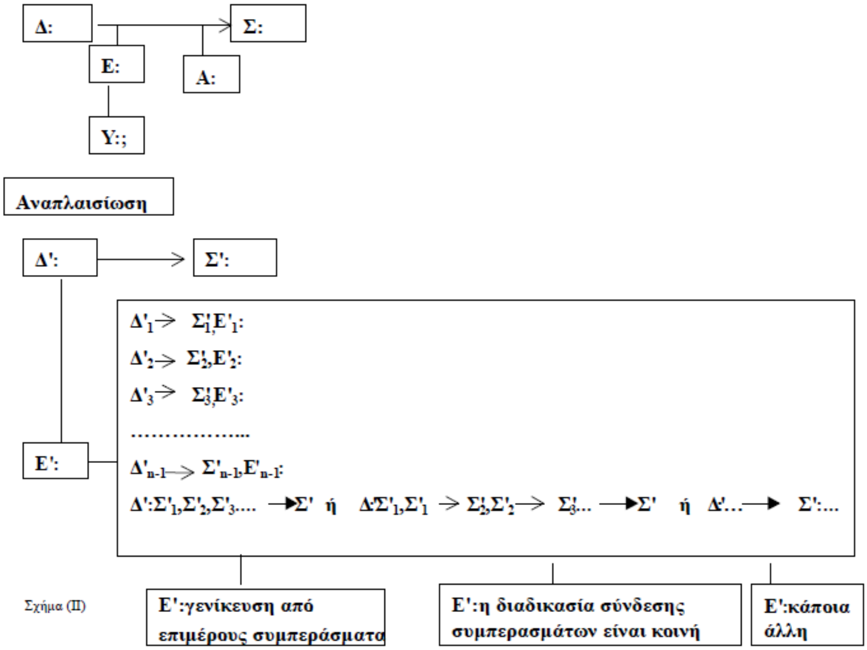
4.3 Αναλογικό επιχείρημα ή αναλογία

Σύμφωνα με τον Polya(1957): «Η επαγωγή είναι η διαδικασία της ανακάλυψης γενικών νόμων μέσω της παρατήρησης και του συνδιασμού ειδικών περιπτώσεων(παραδειγμάτων).Ψάχνει να βρεί κανονικότητα και συνοχή μέσα από τις παρατηρήσεις.Τα εμφανέστερα εργαλεία της είναι η γενίκευση,η ειδίκευση και η αναλογία.»

- Σε μερικές περιπτώσεις η εγγύηση βασίζεται κατ'ευθείαν σ'ένα αναλογικό επιχείρημα μέσα από μια αναπλαισίωση.Αν η εγγύηση αυτή δεν γίνει αποδεκτή ή αμφισβητηθεί μπορεί να δοθεί ως υποστήριξη ότι η ομοιότητα είναι ισομορφισμός δύο μαθηματικών δομών,ήτοι :(Δ,Σ)≈(Δ',Σ'),βλ.σχήμα (I).
- Άλλες πάλι φορές όταν η Εγγύηση δεν γίνεται κατανοητή ή αποδεκτή από το ακροατήριο και δεν είναι δυνατόν να βρεθεί και η υποστήριξη,ή δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί στο συγκεκριμένο πλαίσιο,να στηριχτεί,δηλαδή,δέχεται μια αναπλαισίωση μέσα από ένα αναλογικό επιχείρημα.Αν η νέα εγγύηση που βασίζεται σε αναλογικό επιχείρημα δεν γίνει απόδεκτή μπορεί να δοθεί ως υποστήριξη ότι η ομοιότητα είναι ισομορφισμός δομών,ήτοι :(Δ,Σ)≈(Δ',Σ'),βλ.σχήμα (II).



Σχήμα (I)



Σχήμα (ΙΙ)

5.Παρουσίαση της έρευνας

Ερευνητική Κατάσταση

Σε 59 φοιτητές, 2ου έτους και μεγαλυτέρων ετών, του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πάτρας που παρακολούθησαν το μάθημα: «Στρατηγικές Διδασκαλίας και Επίλυση προβλημάτων στα Μαθηματικά» προτάθηκε το ακόλουθο θέμα:

«Παρατηρώντας ένα πίνακα με τα τετράγωνα των αριθμών από το 1 έως το 100,που της είχε δώσει η δασκάλα της τελευταίας τάξης του Δημοτικού, η Χρυσούλα πρόσεξε ότι αφαιρώντας, κάθε φορά, δύο διαδοχικά τετράγωνα, το μικρότερο από το μεγαλύτερο, παίρνουμε με τη σειρά όλους τους μονούς αριθμούς:

$1^2-0^2=1, 2^2-1^2=3, 3^2-2^2=5, 4^2-3^2=7, 5^2-4^2=9, 6^2-5^2=11$,κ.ο.κ

……..Όλους τους μονούς αριθμούς; Η Χρυσούλα δεν ήταν τόσο σίγουρη………..

Το καλοκαίρι πέρασε και η Χρυσούλα μπήκε στο Γυμνάσιο. Εξακολουθεί να είναι περίεργη: μέχρι που φτάνει η «ανακάλυψή» της; και γιατί συμβαίνει αυτό το παράξενο φαινόμενο;

Αν ήσαστε η καθηγήτρια (ο καθηγητής) της Χρυσούλας στο ξεκίνημα της χρονιάς της Α' Γυμνασίου και σας ρωτούσε, τι εξήγηση θα της δίνατε;»

Όλοι σχεδόν οι φοιτητές επιχείρησαν να απαντήσουν στο θέμα αυτό. Από τα επιχειρήματα των φοιτητών που παρουσίαζαν ένα ενδιαφέρον ως εξηγήσεις απέναντι σ' έναν υποθετικό μαθητή, θα παρουσιάσουμε δείγματα από όλες τις κατηγορίες στις οποίες τα ταξινομήσαμε.

Μαθηματική επιχειρηματολογία που βασίζεται κατ' ευθείαν σε αναπλαισίωση (αναλογικό παράδειγμα)

Μαθηματική επιχειρηματολογία

Ο Κων/νος Κ. γράφει:

«Ανατρέχω στην εξήγηση του τι είναι τετράγωνος αριθμός σχηματικά, $1^2, 2^2, 3^2, .., n^2$ $n \in N$

$1^2=1$ (σχ.1)

$2^2=4$ (σχ.2) $3^2=9$ (σχ.3)

$4^2=16$ (σχ.4)

δηλαδή σχήμα ενός τετραγώνου.

Από το σχ.1 για να πάω στο σχ.2 προσθέτω 3 βούλες, άρα $1^2+3=2^2$, οπότε $2^2-1^2=3$

Από το σχ.2. για να πάω στο σχ.3 προσθέτω 5 βούλες, άρα $2^2+5=3^2$, οπότε $3^2-2^2=5$,

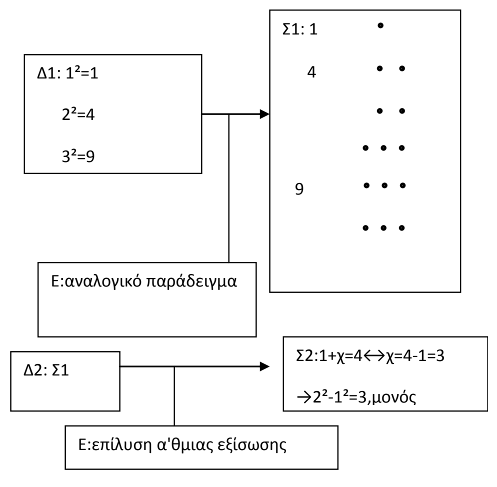
κ.ο.κ θα βρω όλους τους μονούς.»

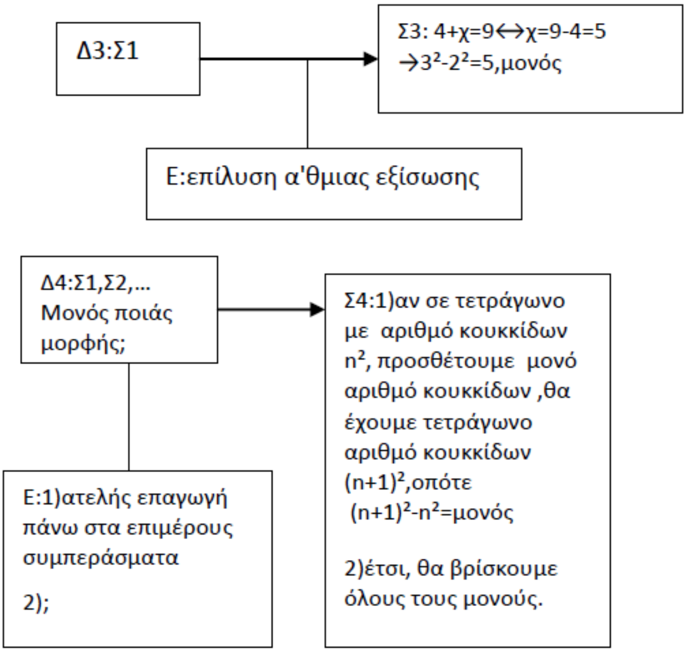
Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin

Δ: $1^2, 2^2, 3^2, .., n^2$ → Σ:Η διαφορά δύο Διαδοχικών τετραγώνων δίνει μονό αριθμό

Ε:

Απομακρύνεται προσωρινά από το αριθμητικό πλαίσιο και κάνει χρήση γεωμετρικού μοντέλου. Ετσι γίνεται κατ'ευθείαν αναπλαισίωση





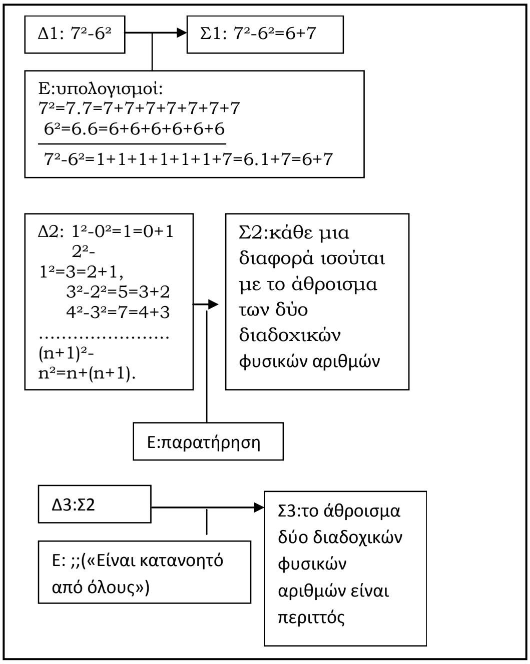
Επειδή στα επιμέρους συμπεράσματα δεν παρατηρεί ότι η μορφή του μονού κάθε φορά είναι της μορφής 2n-1,όταν στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιεί (ατελή) επαγωγή για να βγάλει το συμπέρασμα,δεν αντλεί από <u>τα δεδομένα</u> του τη γενική μορφή του μονού.Έτσι το τελικό συμπέρασμα («θα βρω όλους τους μονούς») φαίνεται μετέωρο,γι'αυτό το χαρακτηρίζουμε ως <u>ατελές</u> επιχείρημα.

Μαθηματική Επιχειρηματολογία που βασίζεται σε επαγωγή γενικεύοντας πάνω στη διαδικασία(γενεσιουργό παράδειγμα κατά N.Balacheff)

Μαθηματική επιχειρηματολογία	Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin

Ο Αναστάσιος Κ. γράφει:
«Θεωρούμε δύο τυχαίες διαφορές διαδοχικών τετραγώνων: 6^2-5^2 και 7^2-6^2
$7^2=7.7=7+7+7+7+7+7+7$
$6^2=6.6=6+6+6+6+6+6$
$7^2-6^2=1+1+1+1+1+1+7=6.1+7=6+7$
Εξηγούμε λοιπόν πως κάθε μια από τις διαφορές τετραγώνων διαδοχικών ακεραίων ισούται με το άθροισμά τους.
$1^2-0^2=1=0+1, 2^2-1^2=3=2+1, 3^2-2^2=5=3+2,$
$4^2-3^2=7=4+3,\ldots\ldots(n+1)^2-n^2=n+(n+1)$.
Είναι κατανοητό από όλους ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών είναι πάντα πεΣ1:$1^2-0^2=1+0=1$

ριττός.»



Ε… τολογίας θα μπορούσε να αποτελέσει γ… ης διαδικασίας,δηλαδή ότι κάθε μια δ… αριθμών ισούται με το άθροισμα των δ… μών,οπότε η επιχειρηματολογία να στραφεί στη στήριξη γιατί το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών είναι περιττός,το γενεσιουργό παράδειγμα που δημιούργησε αφήνεται στον «αέρα» και ξεκινά άλλη επιχειρηματολογία που βασίζεται στην ατελή επαγωγή με γενίκευση από τα επιμέρους συμπεράσματα.Ως εγγύηση του τελευταίου βήματος,όμως,δίνεται η έκφραση:«Είναι κατανοητό από όλους».Σε οποιαδήποτε τυχόν Αμφισβήτηση δεν υπάρχει Υποστήριξη.Έτσι το επιχείρημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως <u>ατελές</u>.

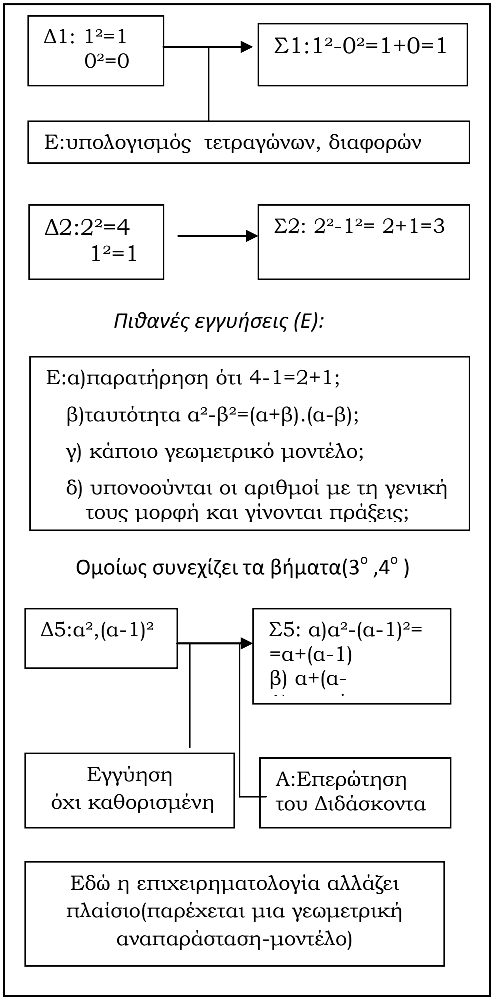
Γενεσιουργό παράδειγμα και αναπλαισίωση μετά από αμφισβήτηση του διδάσκοντα

Μαθηματική επιχειρηματολογία | Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin

Ο Ιωάννης Μ. γράφει:
«1^2-0^2=1 =1+0
2^2-1^2=3=2+1
3^2-2^2=5=3+2
4^2-3^2=7=4+3
Όταν αφαιρούμε τα τετράγωνα διαδοχικών αριθμών έχουμε πάντα ως αποτέλεσμα το άθροισμα των αριθμών αυτών,δηλαδή πάντα μονό αριθμό.
Μετά από επερώτηση-αμφισβήτηση του διδάσκοντα «γιατί ένας μονός και ένας ζυγός δίνουν άθροισμα μονό αριθμό» δίνει την εξήγηση:
3 πορτοκάλια +4 πορτοκάλια αναπαριστάνονται ως εξής:

ΟΟΟΟ+ΟΟΟ=Ο Ο Ο Ο
Ο Ο Ο =7

Δηλαδή αν τα πάρουμε ανά δύο,πάντα περισσεύει ένα,άρα μονός.»



Εδώ,εκτός από το πρώτο βήμα η εγγύηση δεν ορίζεται μονοσήμαντα,έτσι μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα βήματα της επιχειρηματολογίας ως <u>ατελή.</u>

Επαγωγή που γενικεύει κατ'ευθείαν πάνω στα επιμέρους συμπεράσματα («απλοϊκός εμπειρισμός» κατά Balacheff)

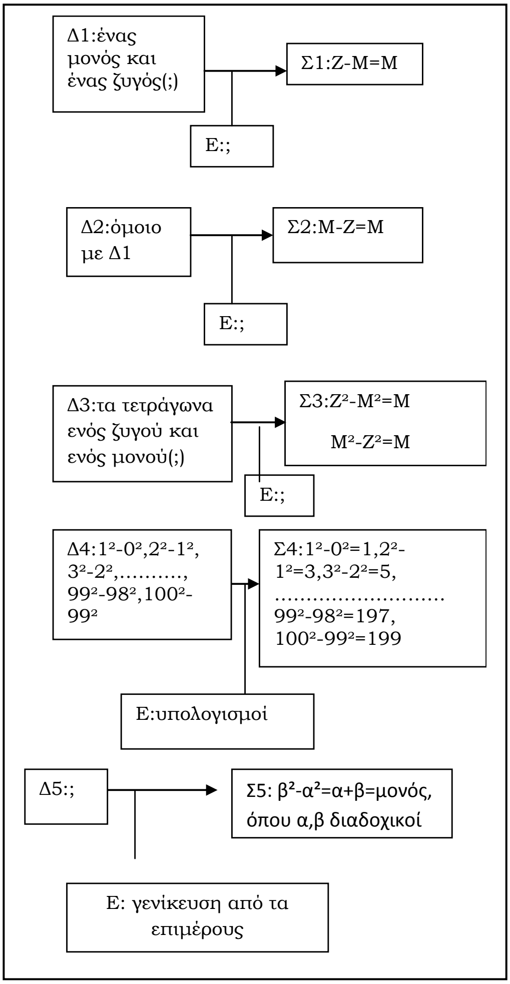
Μαθηματική επιχειρηματολογία

Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin

Ο Ιωάννης Β. γράφει:
«Οι αριθμοί που προκύπτουν είναι μονοί διότι διότι από κάθε διαφορά μονού και ζυγού αριθμού με όποια σειρά και να είναι προκύπτει μονός αριθμός,δηλαδή:

Z-M=M
M-Z=M
Z^2-M^2=M
M^2-Z^2=M

Θα της εξηγήσουμε τώρα γιατί είναι όλοι οι μονοί.
$1^2-0^2=1, 2^2-1^2=3, 3^2-2^2=5, \ldots\ldots, 99^2-98^2=197,$
$100^2-99^2=199$
και γενικά θα ισχύει $\beta^2-\alpha^2=\alpha+\beta=$μονός,
όπου α,β διαδοχικοί.»



Τα συμπεράσματα Σ1,Σ2,Σ3 «ανακοινώνονται»,χωρίς να προσδιορίζεται η εγγύηση.Ακόμη τα δεδομένα Δ5 υπονοούνται ή λείπουν!Έτσι τα επιχειρήματα χαρακτηρίζονται και εδώ ως <u>ατελή.</u>

6. Συμπεράσματα

Θέλοντας να μοιραστούμε με άλλους συναδέλφους,τους προβληματισμούς μας αναφορικά με ένα σημαντικό θέμα της διδακτικής πρακτικής στη τάξη των Μαθηματικών όπως η επιχειρηματολογία και οι εξηγήσεις του δασκάλου,αναλύσαμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα από τη Μαθηματική επιχειρηματολογία των φοιτητών των Μαθηματικών και πιθανών αυριανών δασκάλων των Μαθηματικών απέναντι σε έναν υποθετικό μαθητή.

Υιοθετώντας το σχήμα Toulmin,δείξαμε πώς γίνεται η κατάτμηση της επιχειρηματολογίας σε βήματα αποτελούμενα από επιχειρήματα και δώσαμε παραδείγματα από την έρευνά μας,στα οποία παρουσιάζονται ατελή επιχειρήματα.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να αποκαλούμε ένα επιχείρημα ως *ατελές,* όταν κάποια από τα βασικά

συστατικά στοιχεία του επιχειρήματος σύμφωνα με το σχήμα Toulmin (Δεδομένα, Εγγύηση, Συμπέρασμα),λείπουν ή υπονοούνται χωρίς να είναι δυνατόν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα.Στην έρευνάμας παρατηρήθηκαν οι επόμενες περιπτώσεις ατελούς επιχειρήματος:

α)Δεν υπάρχουν τα δεδομένα που στηρίζουν το συμπέρασμα β)Δεν μπορεί να βρεθεί ή να προσδιορισθεί μονοσήμαντα η εγγύηση γ)Η εγγύηση βασίζεται σε «μαντικές» ή άλλες ικανότητες («είναι κατανοητό..»,«είναι αυτονόητο…»,«είναι γνωστό….»,κλπ) δ)Η υποστήριξη δεν είναι δυνατόν να βρεθεί σε περίπτωση αμφισβήτησης.

Το ερώτημα που παραμένει είναι αν η επιχειρηματολογία δεν αναπτυσσόταν απέναντι σε έναν υποθετικό μαθητή,αλλά σε έναν πραγματικό συνομιλητή,κατά πόσο οι ενστάσεις, αμφισβητήσεις του,θα οδηγούσαν σε ανεύρεση μιας υποστήριξης της εγγύησης ή σε κάποιο άλλο επιχείρημα-στο ίδιο ή σε άλλο πλαίσιο-αποδεκτό από τον συνομιλητή.Μήπως η αλληλεπίδραση,η ανταλλαγή ιδεών,οι αμφισβητήσεις,οι ανασκευές,θα ήταν μια δυναμική πηγή προόδου σχετικά με τη μαθηματική επιχειρηματολογία των υποψήφιων δασκάλων;

Ελπίζουμε αυτή η συζήτηση να συνεχιστεί εντονότερη στο μέλλον και να συμβάλει με τον τρόπο της στην έρευνα της επιχειρηματολογίας στη Μαθηματική Παιδεία.

7.Βιβλιογραφία

Almeida(1996):Justifying and proving in the mathematics classroom,*Philosophy of Mathematics Education Newsletter 9;htpp://www.didactique.imag.fr/preuve*

Ancel Recio and Juan Godino(2001):Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, *Educational Studies in Mathematics*,Vol.48,83-99,2001

Αριστοτέλης:*Όργανον*, Εκδόσεις Κάκτος

Αριστοτέλης:*Ρητορική Ι*,Εκδόσεις Κάκτος

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, V.18,147-176, Ed:D.Reidel Publishing Company

Balacheff N.(1999):Is argumentation an obstacle?Invitation to a debate…….,*International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*,Mai/Juin 1999

Battista M.T,Clements D.H.(1996):Geometry and Proof,*Mathematics Teacher,*V.89,n5,386-388

Cobb P. & Yackel E.(1998):Aconstructivist perspective on the culture of the mathematics classroom.In:F.Seeger,J.Voigt & U.Waschescio (Eds),*The culture of the mathematics classroom*,pp.158-190,Cambridge University,Press

Coquin-Viennot D.:Les différentes formes du discours de la preuve en Mathématiques,*Proceedings of the Conference on the Theory of Mathematics Education,*ANVERS,1988

Donaldson M.:*Children's Minds*,Fontana Paperbooks, London,1984**,** Ελληνική Μετάφραση:*Η σκέψη των παιδιών,*Επιμέλεια Σ.Βοσνιάδου,Gutenberg,1991

Douek N.(1999):Argumentative aspects of proving:Analysis of some undergratuate Mathematics students' performances, *Proceedings of the 23rd Conference for the Psychology of Mathematics Education* ,PME-99,Haifa

Fischbein E.(1982): Intuition and Proof,*For the Learning of Mathematics*,V.3,9-24

Hanna G.(1996):The Ongoing Value of Proof,*Proceedings of the international Groop for the Psychology of Mathematics Education*,PME-96,Valencia

Hanna G.(1989):Proofs that Prove and Proofs that Explain,*Actes de la 13e Conférence Internationale for the Psychology of Mathematics Education* ,P.M.E-1989,Paris

Knuth E.J.(2002):Teachers'conceptions of proof in the context of secondary school mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education*,Vol.5,61-88,2002

Lave J.(1988):*Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life*.Cambridge, England:Cambridge University Press

M.A.Mariotti(htpp//:www.didactique.imag,preuve

Markel W.D.(1994):The role of proof in Mathematics Education, *School Science and Mathematics*, V.94,291-295.

Moore R.(1994):Making the transition to formal proof ,*Educational Studies in Mathematics*, V.27,249-266.

Otte M.(1990):Intuition and formalism in mathematical proof,*Interchange*,V.21,n1,59-64

Πατρώνης Τ.(1990): «Διδακτικό Συμβόλαιο»,ένα ζήτημα Ερμηνείας,*Τετράδια Διδακτικής Μαθηματικών,*τεύχος 4

Paulopoulou k.,Patronis T.(2000): Appropriation des écritures symboliques à propos d'un problème….,Προς δημοσίευση στα *Actes de Colloque "Argentoratum",*Strasburg,2000

Polya, G.(1957) *How to solve it*, Princeton University Press. Ελληνική μετάφραση Ψυακκή Ξανθή, επιμέλεια Τ.Πατρώνης, Εκδόσεις Καρδαμίτσα, 1998

Perelman C.,Olbrechts-Tyteca L.(1958):*La nouvelle rhétorique,Traité de l'argumentation,*(2 volumes)Paris:P.U.F

Plantin C.(1990):*Essais sur l'argumentation*,Paris:Editions Kime

Reid D.A.(1999) D.A:Needing to explain:The Mathematical Emotional Orientation, *Proceedings of the 23rd Conference for the Psychology of Mathematics Education* , V.4,PME-99,Haifa

Reid D.A. (2002): Elements in accepting an explanation, *Journal of Mathematical Behavior*,V.20,pp.527-547

Simon M.A. and Blume G.W.(1996):Justification in Mathematics classroom:A Study of Prospective Elementary Teachers,*Journal of Mathematical Behavior*,V.15,pp. 3-31

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of arguments*. Cambridge University Press,published,1997

Voigt J(1995):Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms.In:P.Cobb,& H.Bauersfeld (Eds),*Emergence of mathematical meaning:interaction in classroom cultures*(pp.163-201).Hillsdale,NJ:Erlbaum.

Vygotsky L.S.(1978):*Mind and Society.The development of Higher Psychological Process*,Harvard University Press,Ελληνική Μετάφραση:*Νους και Κοινωνία,* Επιμέλεια Σ.Βοσνιάδου, Gutenberg,1997

Walkerdine V.(1988):*The mastery of Reason;Cognitive Development and the Production of Rationality*,Routledge,London and New York

Yackel E.,Cobb P.(1996).:Sociomathematical norms,argumentation and autonomy in mathematics,*Journal for Research in Mathematics Education*,V.27, 458-477

Yackel E (2001):Explanation,Justification and Argumentation in Mathematics classroom, *Proceedings of the 25th Conference of the International Groop for the Psychology of Mathematics Education PME-25*,Vol.4,33-40,Utrecht,Holland

Μαθηματική απόδειξη και κριτική σκέψη στη διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας γεωμετρίας
Θεωρητικό πλαίσιο και περιεχόμενο μιας έρευνας στην Α΄ Λυκείου

Γιάννης Χ. Θωμαΐδης

Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας

Ο "εθισμός στην κριτική σκέψη" και η "διέγερση του κριτικού πνεύματος" αποτελούν δύο διαχρονικές συνιστώσες των σκοπών της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.[1] Στην εισαγωγή του προγράμματος σπουδών για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου και του Ενιαίου Λυκείου, ανάμεσα σε άλλες γενικές αρχές για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι:

- Η διδακτέα ύλη να προσφέρεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιδιώκεται πρώτα απ' όλα η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή.[2]

Αυτή η γενική αρχή εξειδικεύεται στη συνέχεια και συνδέεται με ορισμένες βασικές αρχές της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι η "αποδεικτική διαδικασία". Στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών αναφέρονται, μεταξύ άλλων, οι ακόλουθες επιδιώξεις:

---

[1] Για μια σχετική επισκόπηση, με αναφορές σε αναλυτικά προγράμματα και κείμενα σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, βλ. Θωμαΐδης, Γ. Κριτική σκέψη, Μαθηματικά και Κριτική Εκπαίδευση. *Πρακτικά 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας "Γλώσσα και Σκέψη στη Μαθηματική Παιδεία"*, σσ.333-350. Πάτρα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. 1993.

[2] Βλ. ΥΠ.Ε.Π.Θ. *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου*. Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας, Τεύχος Δεύτερο, Αρ. Φύλλου 1342 (30 Ιουνίου 1999), σ.17294 & 17363 (η έμφαση δική μου).

- Να εισαχθούν οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία και να συνειδητοποιήσουν ότι αυτή αποτελεί χρήσιμο και άμεσο τρόπο για την επαλήθευση γενικών νόμων.
- Να μυηθούν και να εξοικειωθούν οι μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να καλλιεργηθεί η "μαθηματική σκέψη".
- Να ασκηθούν οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή.[3]

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία, θεωρείται παραδοσιακά ως ο κατεξοχήν χώρος για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και τις υποτιθέμενες παιδαγωγικές συνέπειες της τελευταίας. Στο πρόγραμμα σπουδών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναφέρονται χαρακτηριστικά τα εξής:

- Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ιστορικά απετέλεσε το πρότυπο θεμελίωσης και ανάπτυξης για τις επιστημονικές θεωρίες. Ο ρόλος της στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι θεμελιακός και αναντικατάστατος, αφού έχει το πλεονέκτημα, τα αποτελέσματά να είναι άμεσα ορατά και υλοποιήσιμα στο χώρο της εποπτείας μας.

  Η ανάπτυξη της θεωρίας γίνεται παραγωγικά και έτσι δίνεται μια μοναδική ευκαιρία στον μαθητή να κατανοήσει την αποδεικτική διαδικασία και να ασκηθεί σε αυτή. Η φύση των προβλημάτων που διαπραγματεύεται απαντά στις σύγχρονες διδακτικές προκλήσεις, που απαιτούν δραστήριο ρόλο του μαθητή στην ανάπτυξη και κατάκτηση της γνώσης. Ειδικότερα, τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών (με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη), βοηθούν στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, όπως κριτικής διερευνητικής σκέψης, διατύπωσης εικασιών στην αναζήτηση της λύσης, διαδικασίες που μετατρέπουν το μαθητή σε ερευνητή.[4]

Τα προηγούμενα αποσπάσματα προέρχονται από επίσημα ελληνικά κείμενα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς ότι εκφράζουν διεθνώς – αν εξαιρέσουμε κάποια

---

[3] Βλ. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002 – 2003.* Τεύχος Β΄. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. 2002 (σ.10).
[4] Βλ. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. *Πρόγραμμα Σπουδών Ευκλείδειας Γεωμετρίας.* 1998, σ.3

μεγαλύτερη έμφαση στις "ρεαλιστικές" εφαρμογές των Μαθηματικών και μικρότερη στην παραδοσιακή Ευκλείδεια Γεωμετρία – την κυρίαρχη αντίληψη για το ρόλο της διδασκαλίας των Μαθηματικών, ιδιαίτερα στον ανώτερο κύκλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.[5]

Όλα τα παραπάνω συνθέτουν ένα πλέγμα ευγενών προθέσεων και φιλόδοξων επιδιώξεων, που αφορούν εξίσου την κατάκτηση ενός υψηλού επιπέδου μαθηματικής μόρφωσης όσο και την καλλιέργεια της γενικότερης νοητικής ανάπτυξης των μαθητών. Στην πραγματικότητα όμως, όπως έχουν αποκαλύψει τις τελευταίες δεκαετίες πολυάριθμες έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών, μόνο μια πολύ μικρή μειοψηφία μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιλαμβάνεται το νόημα της αποδεικτικής διαδικασίας στα Μαθηματικά. Η συντριπτική πλειοψηφία αντιμετωπίζει σημαντικότατες δυσκολίες, τις οποίες οι ερευνητές έχουν ταξινομήσει σε τρεις βασικές κατηγορίες: [6]

α. Οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη της απόδειξης.

β. Αδυνατούν να συλλάβουν το στοιχείο του "λογικά αναπόφευκτου" που είναι έμφυτο στην έννοια της απόδειξης.

γ. Δυσκολεύονται να διατυπώσουν μια απόδειξη.

Η κατάσταση εμφανίζεται ιδιαίτερα δύσκολη στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπου μια γραμμική και αυστηρά ιεραρχημένη παρουσίαση ορισμών, ιδιοτήτων και αποδείξεων επιχειρεί να οργανώσει σε ένα θεωρητικό σύστημα και να επιβεβαιώσει με λογική συνέπεια γεωμετρικές προτάσεις, για την αλήθεια των οποίων οι μαθητές δεν έχουν την παραμικρή αμφιβολία! Σε όλα τα προηγούμενα χρόνια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης ασκήθηκαν ιδιαίτερα στην

---

[5] Για τις τάσεις που επικρατούν διεθνώς σε ότι αφορά το κεντρικό σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων, τους σκοπούς και την οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών, βλ.: Howson, G. *National Curricula in Mathematics*. Leicester: The Mathematical Association. 1991⊙ Niss, M. Goals of Mathematics Teaching. Στο A. Bishop et al (eds), *International Handbook of Mathematics Education.*, σσ.11-47. Dordrecht: Kluwer. 1996 ⊙ *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2000. Ειδικότερα για τη Γεωμετρία, βλ. Mammana, C. & Villani, V. (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer. 1998.

[6] Βλ. Dreyfus, T. *et al.* Advanced Mathematical Thinking. Στο P. Nesher & J. Kilpatrick (eds), *Mathematics and Cognition*, σσ.113-134. Cambridge: Cambridge University Press. 1990 (σ.129).

επαλήθευση αυτών των προτάσεων, μέσα από εμπειρικές δραστηριότητες σχεδίασης και μετρήσεων. Ο κλειστός χαρακτήρας του μαθήματος στο Λύκειο (μαζί με ορισμένες άλλες “παθογένειες” της διδασκαλίας, όπως η έμφαση στην ασκησιολογία), επιβάλλει σήμερα τις γεωμετρικές έννοιες και προτάσεις ως απόλυτες και αμετάβλητες αλήθειες για το χώρο, και την έννοια της απόδειξης ως μια “τελετουργική” διαδικασία χωρίς κάποιο εξωμαθηματικό κίνητρο, που αναπαράγεται μηχανικά. Έρευνες μεγάλης κλίμακας που πραγματοποιήθηκαν στις Η.Π.Α. έδειξαν ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό μαθητών μπορεί, για παράδειγμα, να αποδείξει με ικανοποιητικό τρόπο ότι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες. [7]

Αυτή η διαπιστωμένη αδυναμία κατανόησης και χρήσης της αποδεικτικής διαδικασίας στα ίδια τα Μαθηματικά, δημιουργεί εύλογα ερωτηματικά για το άλλο σκέλος των σκοπών της διδασκαλίας, δηλαδή την καλλιέργεια γενικότερων νοητικών δεξιοτήτων. Η λεγόμενη “παιδαγωγική αξία” των Μαθηματικών είναι ένα “άρθρο πίστης” το οποίο στηρίζεται περισσότερο στην παράδοση και λιγότερο σε τεκμηριωμένη έρευνα. Κάθε ανάλυση της έννοιας “κριτική σκέψη”, για παράδειγμα, μπορεί να δείξει ότι αυτή σχετίζεται με πολυσύνθετες διανοητικές και κοινωνικές δραστηριότητες και επομένως δεν μπορεί να ενταχθεί οργανικά και αποτελεσματικά (δηλαδή όχι αόριστα και γενικόλογα) στους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας και μάθησης ειδικών επιστημονικών γνώσεων, όπως είναι τα Μαθηματικά.[8]

Οι δυσκολίες με την απόδειξη μέσα στο παραδοσιακό πλαίσιο διδασκαλίας των Μαθηματικών έχουν οδηγήσει σε νέες διδακτικές προσεγγίσεις, τις οποίες θα μπορούσαμε, σε γενικές γραμμές, να ταξινομήσουμε σε δύο κατηγορίες: [9]

---

[7] Για μια επισκόπηση σχετικών ερευνών που αφορούν την περίπτωση της Γεωμετρίας, βλ. Schoenfeld, A. On Having and Using Geometric Knowledge. Στο J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, σσ.225-264. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1986⊙ Hershkowitz, R. *et al.* Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της Γεωμετρίας. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 1, σσ.93-135. 1996⊙ Hoyles, C. & Jones, K. Proof in Dynamic Geometry Contexts. Στο Mammana, C. & Villani, V. (eds.), *Perspectives on …*, ο.π. υποσημ. 5, σσ.121-128. Ερευνητικά δεδομένα για την κατάσταση στην Ελλάδα αναφέρονται στο Θωμαΐδης, Γ. & Πούλος, Α. *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη. 2000 (σσ.14-23).

[8] Για μια τέτοια ανάλυση βλ. Θωμαΐδης, Γ. Κριτική σκέψη, …, ο.π. υποσημ. 1.

[9] Για μια γενική περιγραφή αυτών των διδακτικών προσεγγίσεων και αντίστοιχες βιβλιογραφικές παραπομπές, βλ. Dreyfus, T. *et al* Advanced Mathematical …, ο.π.

α. Εκείνες οι οποίες, χωρίς να αμφισβητούν το παραδοσιακό πλαίσιο διδασκαλίας, προτείνουν μια ριζική αναθεώρηση της δομής των μαθηματικών αποδείξεων που παρουσιάζονται στους μαθητές.

β. Εκείνες οι οποίες προτείνουν το μετασχηματισμό της παραδοσιακής διδασκαλίας σε μια “επιστημονική αντιπαράθεση”, στην οποία η απόδειξη εμφανίζεται ως το ανώτερο στάδιο μιας συλλογικής δραστηριότητας με αντικείμενο τη διατύπωση και επαλήθευση ή απόρριψη μαθηματικών εικασιών.

Η δεύτερη προσέγγιση εντάσσεται μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο των αναζητήσεων της Διδακτικής των Μαθηματικών, οι οποίες χαρακτηρίζονται από την προσπάθεια δημιουργίας διδακτικών καταστάσεων που προωθούν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία κατασκευής των νέων γνώσεων. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι αναζητήσεις αυτές έχουν ήδη αρχίσει να επηρεάζουν τα νέα προγράμματα σπουδών, όπως γίνεται φανερό από το επόμενο απόσπασμα:

Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται κυρίως στη διαπραγμάτευση του νοήματος μέσω μιας κοινωνικής διαδικασίας παρά στην εφαρμογή τυπικών κριτηρίων εκ των έξωθεν. Συνήθως, κατά τη διάρκεια των Μαθηματικών παρουσιάζεται η θεωρία που θέλουμε να διδάξουμε στην τελική της μορφή, ενώ θα έπρεπε να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να συμμετάσχουν σε όλες τις φάσεις του δημιουργικού κύκλου της μαθηματικής έρευνας. Οι συνήθεις διδακτικές προσεγγίσεις τείνουν να προσφέρουν στους μαθητές το προϊόν της μαθηματικής σκέψης, παρά τη διαδικασία του μαθηματικού συλλογισμού, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων.[10]

Οι συντάκτες του νέου προγράμματος σπουδών υποστηρίζουν ότι ο καταλληλότερος τρόπος για να αντιληφθούν οι μαθητές το νόημα της τυπικής μαθηματικής απόδειξης που θα συναντήσουν στο Λύκειο, είναι η διάρθρωση του μαθήματος των Μαθηματικών γύρω από ερευνητικές δραστηριότητες. Η αναζήτηση της γνώσης από τους

υποσημ. 6 (σσ.127-129)◌ Tall, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Στο D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, σσ.3-21. Dordrecht: Kluwer. 1991 (σσ.19-20)◌ Hanna, G. & Jahnke, H.N. Proof and Proving. Στο A. Bishop *et al* (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, σσ.877-908. Dordrecht: Kluwer. 1996 (σσ. 885-886).

[10] Βλ. ΥΠ.Ε.Π.Θ. *Πρόγραμμα Σπουδών* …, ο.π. υποσημ. 2 (σ.17294)

μαθητές στο πλαίσιο αυτών των δραστηριοτήτων πρέπει να χαρακτηρίζεται από τη δυνατότητα πολλαπλών προσεγγίσεων μιας μαθηματικής έννοιας ή μεθόδου. Για την παροχή αυτής της δυνατότητας επισημαίνεται ιδιαίτερα ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών, η οποία χαρακτηρίζεται ως ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας μαθηματικής έννοιας.

Αυτή η επισήμανση αντανακλά την ιδιαίτερη δυναμική και πολυμορφία που έχει αποκτήσει τα τελευταία χρόνια η σχέση ανάμεσα στην Ιστορία και τη Διδακτική των Μαθηματικών. Σε μια πρόσφατη ειδική μελέτη της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, οι σκοποί και τα αποτελέσματα που επιδιώκονται με την εισαγωγή ιστορικών δραστηριοτήτων στη μάθηση των Μαθηματικών συνοψίζονται στις ακόλουθες γενικές ιδέες:

α. *Η ιδέα της αντικατάστασης*. Η εισαγωγή της Ιστορίας στα Μαθηματικά αντικαθιστά το συνηθισμένο με κάτι διαφορετικό: παρουσιάζει τα Μαθηματικά ως μια διανοητική δραστηριότητα, παρά ως ένα σώμα γνώσεων ή ένα σύνολο τεχνικών

β. *Η ιδέα του αναπροσανατολισμού*. Η εισαγωγή της Ιστορίας στα Μαθηματικά αποτελεί μια πρόκληση για τη νόηση, επειδή αποσταθεροποιεί το οικείο και καθιερωμένο. Η ενασχόληση με ένα ιστορικό κείμενο μπορεί να προκαλέσει έναν αναπροσανατολισμό των αντιλήψεων μας. Η Ιστορία των Μαθηματικών έχει το πλεονέκτημα να εκπλήσσει με αυτά που αποκαλύπτει. Στη διδασκαλία οι έννοιες παρουσιάζονται σαν να υπήρχαν πάντοτε. Αυτό συμβαίνει, π.χ. με την έννοια του συνόλου, αλλά συμβαίνει εξίσου και με τις έννοιες του τριγώνου ή της συνάρτησης. Η διαπραγμάτευση των εννοιών γίνεται χωρίς καμιά αναφορά στη δημιουργία τους. Η Ιστορία μας υπενθυμίζει ότι αυτές οι έννοιες επινοήθηκαν και αυτό δεν έγινε από μόνο του.

γ. *Η ιδέα της πολιτισμικής κατανόησης*. Η εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών μας καλεί να τοποθετήσουμε την ανάπτυξη των Μαθηματικών μέσα στο επιστημονικό και τεχνολογικό πλαίσιο μιας συγκεκριμένης εποχής, στην ιστορία των ιδεών και των κοινωνιών, και ακόμη να θεωρήσουμε την ιστορία της διδασκαλίας των

Μαθηματικών από οπτικές γωνίες που βρίσκονται έξω από τα καθιερωμένα διαχωριστικά όρια των επιστημών.[11]

Το περιεχόμενο και η μεθοδολογία της έρευνας

Οι νέες προοπτικές που διαγράφονται από τις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών για την έννοια της απόδειξης και ιδιαίτερα για το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών, μας οδήγησαν στην ιδέα μιας ερευνητικής διαθεματικής προσέγγισης στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ή έρευνα αυτή, η οποία εγκρίθηκε πρόσφατα από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, αφορά τη χρήση κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου πρωτότυπων ιστορικών κειμένων με τη συνεργασία των καθηγητών Μαθηματικών, Αρχαίων Ελληνικών και Ιστορίας.[12] Ο σκοπός της διαθεματικής προσέγγισης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της απόδειξης όχι μόνο ως ένα εσωτερικό και τεχνικό μαθηματικό ζήτημα, αλλά ως μια ευρύτερη επιστημονική δραστηριότητα που είναι ανοικτή στο διάλογο, την κριτική και την αμφισβήτηση. Το περιεχόμενο και η μεθοδολογία αυτής της προσέγγισης μπορεί να γίνει κατανοητός μέσα από την παράθεση μερικών παραδειγμάτων.

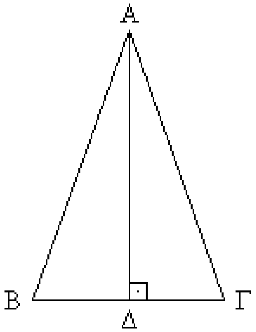
Μια από τις πρώτες αποδείξεις που συναντούν οι μαθητές στα σχολικά Μαθηματικά αφορά την ισότητα των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου. Στο Γυμνάσιο, όπου το βάρος δίνεται στην εμπειρική επαλήθευση, η ισότητα αυτή προκύπτει από την προφανή συμμετρία του σχήματος:

Κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχει άξονα συμμετρίας την κάθετη ΑΔ που άγεται από την κορυφή Α προς τη βάση ΒΓ (αυτό διαπιστώνεται π.χ. με δίπλωση του σχήματος κατά μήκος της ΑΔ). Άρα οι γωνίες Β και Γ της βάσης είναι ίσες μεταξύ τους, ως συμμετρικές προς την ΑΔ.

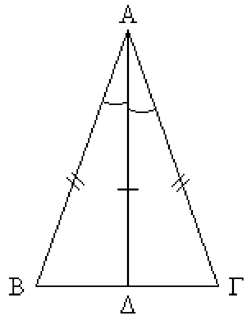
---

[11] Βλ. Jahnke, H.N. *et al.* The use of original sources in the mathematics classroom. Στο J. Fauvel & J. van Maanen. (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, σσ.291-328. Dordrecht: Kluwer. 2000 (σ.292). Μια άλλη ενδιαφέρουσα συλλογή κειμένων για το ρόλο και τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους περιέχεται στο Δ. Χασάπης (επιμ.), *Η Ιστορία των Μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο και στο Γυμνάσιο.* Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Τμήμα Δ. Ε. Α.Π.Θ. 2002.

[12] Η έρευνα θα διεξαχθεί κατά τη διάρκεια του 2003 στο Πειραματικό Σχολείο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας και το 2ο Ενιαίο Λύκειο Νεάπολης.



Η προηγούμενη εμπειρική επαλήθευση μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη, αν στηρίξουμε τη θεωρητική ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην έννοια του μετασχηματισμού. Στο Λύκειο όμως, όπου υιοθετείται μια πιο συντηρητική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η ιδιότητα αυτή του ισοσκελούς τριγώνου αποδεικνύεται συνήθως ως μια άμεση συνέπεια του πρώτου κριτηρίου ισότητας των τριγώνων:



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ. Αυτά έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή, τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ ίσες, και τις περιεχόμενες σ’ αυτές γωνίες ΒΑΔ, ΓΑΔ ίσες. Σύμφωνα λοιπόν με το 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων είναι ίσα και επομένως οι γωνίες Β, Γ είναι ίσες ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές δύο ίσων τριγώνων.

Η προηγούμενη απόδειξη του σχολικού βιβλίου υποτίθεται ότι διαθέτει το διδακτικό πλεονέκτημα της απλότητας, αλλά ταυτόχρονα διαθέτει και το μαθηματικό μειονέκτημα να είναι ασυμβίβαστη τόσο με τις αρχαίες κατασκευαστικές απαιτήσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όσο και με τις σύγχρονες απαιτήσεις αυστηρότητας των *Θεμελίων της Γεωμετρίας* του D. Hilbert. Τα δύο κρίσιμα ερωτήματα που θα έθεταν οι μεγάλοι αυτοί μαθηματικοί, τινάζοντας στον αέρα την προηγούμενη απόδειξη, είναι τα εξής:

Ευκλείδης: Μπορείτε να κατασκευάσετε γεωμετρικά τη διχοτόμο ΑΔ;

Hilbert: Μπορείτε να αποδείξετε λογικά ότι η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ;

Σύμφωνα με όσα έχουν προηγηθεί στο σχολικό βιβλίο, ούτε η μία ούτε η άλλη ερώτηση μπορούν να απαντηθούν καταφατικά και φυσικά, τόσο ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* (300 π.Χ.) όσο και ο Hilbert στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* (1900 μ.Χ). χρησιμοποιούν τελείως διαφορετικές αποδείξεις. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι η απόδειξη του Hilbert οφείλεται στον Πάππο και είχε δοθεί κατά την αρχαιότητα, μάλλον ως εναλλακτική λύση στη μακροσκελή απόδειξη του Ευκλείδη. [13]

Τα προηγούμενα ερωτήματα δεν τα συνδέουμε φυσικά με ζήτημα της "αυστηρότητας" της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται στο Λύκειο, αλλά με το γεγονός ότι η διδασκαλία εξαντλείται σε μια παράθεση αλλεπάλληλων αποδείξεων, χωρίς ποτέ να γίνεται αντικείμενο συζήτησης και κριτικής η ίδια η αποδεικτική διαδικασία. Ποιος είναι ο ρόλος της συγκεκριμένης απόδειξης για την ιδιότητα του ισοσκελούς τριγώνου; Παρακάμπτοντας, στο πλαίσιο μιας τυπικής διδακτικής απλούστευσης, ουσιώδη μαθηματικά ερωτήματα, η συγκεκριμένη απόδειξη επιχειρεί να πείσει τους μαθητές ότι αληθεύει μια ιδιότητα για την οποία αυτοί δεν έχουν την παραμικρή αμφιβολία! Οι μαθητές δεν θα θέσουν ίσως τα ερωτήματα του Ευκλείδη και του Hilbert, αλλά συχνά ρωτούν για ποιο λόγο αποδεικνύουμε μια ιδιότητα που είναι ολοφάνερη, ή επινοούν με δημιουργικό τρόπο εναλλακτικές αποδείξεις τις οποίες απορρίπτουμε επειδή συνιστούν λογικές ανακολουθίες μέσα στη συγκεκριμένη διάταξη της σχολικής γεωμετρίας.[14]

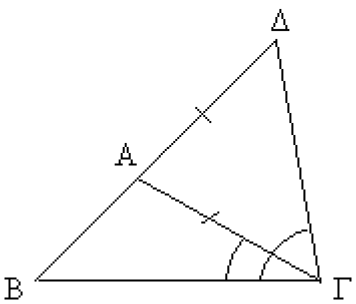
Ένα παράδειγμα γεωμετρικής ιδιότητας της οποίας η προφάνεια είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τον εξεζητημένο τρόπο απόδειξης, αποτελεί η λεγόμενη "τριγωνική ανισότητα", δηλαδή η ιδιότητα κάθε πλευράς ενός τριγώνου να είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας, η οποία επιστρατεύει ένα γεωμετρικό οπλοστάσιο προκειμένου να πείσει για το αυτονόητο γεγονός ότι "ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία", εμφανίζεται σήμερα στο σχολείο ως ένας απλός κρίκος της αλυσίδας των αποδείξεων που συγκροτούν το θεωρητικό σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, χωρίς ποτέ να τίθεται υπό αμφισβήτηση. Αντίθετα, κατά την αρχαιότητα είχε προκαλέσει την δριμεία κριτική των Επικούρειων φιλοσόφων που υιοθετούσαν μια διαφορετική

---

[13] Βλ. σχετικά Σπανδάγος, Ε.. *Τα Σχόλια του Πρόκλου στο α΄ βιβλίο των "Στοιχείων" του Ευκλείδου.* Τόμος Β΄. Αθήνα: Αίθρα.2002 (σσ.43, 206)

[14] Για ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων που κατασκευάστηκαν από μαθητές, βλ. Θωμαΐδης, Γ. Η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας. *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σσ.127-136. Ρέθυμνο: Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης. 2000.

προσέγγιση της επιστημονικής γνώσης από εκείνη του Ευκλείδη και της Πλατωνικής σχολής. Η κριτική αυτή των Επικούρειων, που άγγιξε τα όρια γελοιοποίησης της Ευκλείδειας απόδειξης, προκάλεσε με τη σειρά της την απάντηση των υποστηρικτών του Ευκλείδη, η οποία έφερε στο προσκήνιο θεμελιώδη επιστημολογικά ζητήματα που συνδέονται με το νόημα της αποδεικτικής διαδικασίας. [15]



Στην απόδειξη του σχολικού βιβλίου, η οποία είναι ίδια με αυτήν που υπάρχει στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, προεκτείνεται η πλευρά ΑΒ κατά μήκος ΑΔ = ΑΓ και σχηματίζεται το τρίγωνο ΔΒΓ με πλευρά ΒΔ = ΑΒ + ΑΓ. Επειδή η γωνία ΑΓΔ (φαίνεται ότι) είναι μικρότερη από τη γωνία ΒΓΔ και (λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΔ) ίση με τη γωνία ΑΔΓ συμπεραίνουμε ότι η τελευταία είναι μικρότερη από τη γωνία ΒΓΔ. Άρα, σύμφωνα με γνωστή πρόταση, στο τρίγωνο ΔΒΓ ισχύει ΒΓ < ΒΔ, δηλαδή ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ.

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ότι η μύηση στην αποδεικτική διαδικασία και η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης είναι δυνατό να υπερβεί τα στενά πλαίσια που επιβάλλει η μελέτη μιας “θεωρίας” για σχολική χρήση και η προσπάθεια αναπαραγωγής αυτής της θεωρίας για την επίλυση ασκήσεων. Οι ειδικότερες επισημάνσεις που συνδέονται με την επινόηση και αποδοχή των αποδείξεων των συγκεκριμένων γεωμετρικών προτάσεων, δείχνουν ότι η εισαγωγή μιας ιστορικής προοπτικής στη διδασκαλία τους θα μπορούσε να συμβάλλει στον ουσιαστικό εμπλουτισμό της τελευταίας και την ανάπτυξη μεταγνωστικών κριτηρίων για την έννοια της απόδειξης.

Η ερευνητική διαθεματική προσέγγιση στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας θα χρησιμοποιήσει πρωτότυπα ιστορικά κείμενα από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και τα σχόλια του Πρόκλου στο 1ο βιβλίο των *Στοιχείων*, με στόχο να αναδείξει ορισμένες διαχρονικές και διεπιστημονικές πτυχές της αποδεικτικής διαδικασίας. Η

---

[15] Βλ. σχετικά Σπανδάγος, Ε.. *Τα Σχόλια του Πρόκλου …*, ο.π. υποσημ. 13 (σσ. 88-89,

διαπραγμάτευση αυτών των κειμένων στην τάξη με τη συνεργασία μαθηματικού, ιστορικού και φιλόλογου θα επιχειρήσει να συνδέσει τις αποδείξεις ορισμένων γεωμετρικών προτάσεων του σχολικού βιβλίου με το ευρύτερο μαθηματικό, φιλοσοφικό και ιστορικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύχθηκαν, αμφισβητήθηκαν και τελικά καθιερώθηκαν. Στους μαθητές θα δοθούν φύλλα εργασίας με το αρχαίο κείμενο των προτάσεων του Ευκλείδη και των σχολίων του Πρόκλου, το οποίο θα συγκρίνουν με τις αντίστοιχες προτάσεις του σχολικού βιβλίου και θα επεξεργαστούν από γλωσσική, ιστορική και μαθηματική άποψη. Η μαθηματική επεξεργασία, ιδιαίτερα των σχολίων του Πρόκλου, αναδεικνύει ζητήματα που συνδέονται στενά με την απόκτηση μια σφαιρικής θεώρησης για την έννοια της απόδειξης και την υιοθέτηση κριτικής στάσης απέναντι στη θεωρητική μαθηματική γνώση. Ο τρόπος με τον οποίο θα προσεγγίσουν αυτά τα ζητήματα οι μαθητές αποτελεί το βασικό αντικείμενο της έρευνας από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Η πρώτη φάση της έρευνας περιλαμβάνει την ενημέρωση και προετοιμασία των καθηγητών που θα διδάξουν στα τμήματα της Α΄ Λυκείου. Στη φάση αυτή θα επιλεγούν και οι συγκεκριμένες ενότητες της ύλης των αντίστοιχων μαθημάτων (Ευκλείδεια Γεωμετρία, Αρχαία Ελληνικά, Ιστορία) στις οποίες θα γίνει η διαθεματική προσέγγιση. Προβλέπεται ότι σε κάθε τμήμα θα διεξαχθούν περίπου πέντε διαθεματικές διδασκαλίες στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς.

Στη δεύτερη φάση θα πραγματοποιηθούν οι προγραμματισμένες διαθεματικές διδασκαλίες με τη χρησιμοποίηση των προαναφερθέντων φύλλων εργασίας. Από μεθοδολογική άποψη, οι διδασκαλίες θα έχουν τη μορφή μιας "εθνογραφικής συμμετοχικής παρατήρησης" μέσα στη σχολική τάξη, στην οποία ο ερευνητής παίρνει μέρος ως "πλήρως συμμετέχων", δηλαδή έχοντας ταυτόχρονα το ρόλο του δασκάλου και του παρατηρητή – ερευνητή.

Η τρίτη φάση της έρευνας, η οποία θα διεξάγεται παράλληλα με τη δεύτερη, περιλαμβάνει την καταγραφή των φαινομένων που παρατηρούνται στη διάρκεια των διδασκαλιών και τη συζήτηση–αξιολόγηση των ευρημάτων σε τακτικές συναντήσεις όλων των

268-269)

συμμετεχόντων. Στη φάση αυτή θα πραγματοποιείται και ο αναγκαίος απολογισμός και η ανατροφοδότηση για τη συνέχεια της έρευνας.

Τέλος, στην τέταρτη φάση της έρευνας θα γίνει ο τελικός απολογισμός και η συγγραφή της αναφοράς των αποτελεσμάτων της έρευνας προς το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και τους λοιπούς εκπαιδευτικούς φορείς. Στη φάση αυτή, η οποία προβλέπεται να ολοκληρωθεί στα τέλη του 2003, προγραμματίζεται επίσης η διοργάνωση ημερίδων για την ενημέρωση των εκπαιδευτικών που εργάζονται στην ευρύτερη περιοχή των σχολείων που συμμετέχουν στην έρευνα.

Επιχειρηματολογία και παιδιά Ρομά – το πέρασμα από τα προσωπικά βιώματα στην μαθηματική σκέψη

Άννα Χρονάκη

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

1. Η επιχειρηματολογία ως *λόγος* μαθηματικός

Ως επιχειρηματολογία γνωρίζουμε το μέρος εκείνο της ρητορικής που σχετίζεται με την προσπάθεια ενός ατόμου να πείσει ένα ακροατήριο χρησιμοποιώντας τον *λόγο* ως κύριο εργαλείο. Η επιχειρηματολογία στον χώρο των μαθηματικών συνδέεται στενά με την απόδειξη και την επίσημη ή την τυπική λογική. Η *αναλυτική επιχειρηματολογία*, όπως την ονομάζει ο Toulmin (1969) αποτελεί μια λογικά σωστή επαγωγή η οποία δεν περιέχει στην περίληψη της ή στο σύνολό της κάτι ξεχωριστό από τα ίδια τα συστατικά της. Στην ουσία γνωστοποιεί στοιχεία της σημασίας των προτάσεων και των συλλογισμών κάνοντας χρήση της επαγωγής. Έτσι, η αναλυτική επιχειρηματολογία αποτελεί ταυτολογία, με την έννοια ότι αποσκοπεί στην διασαφήνιση λανθανόντων σημείων μιας πρότασης. Όμως, αν αυτά τα τυπικά λογικά συμπεράσματα αποτελούν τον μόνο νομοθετικό τύπο επιχειρηματολογίας, τότε ο χώρος της ορθολογιστικής επικοινωνίας θα ήταν τελείως φτωχός και συρρικνωμένος σε μερικούς κανόνες λογικής, και ταυτόχρονα η επιχειρηματολογία σαν ένας πιθανός τρόπος επικοινωνίας βασισμένος στον ορθολογισμό δεν θα αφορούσε την διδακτική των μαθηματικών.

Σε αντίθεση, η *ουσιώδης επιχειρηματολογία,* όπως περιγράφεται από τον Toulmin (1969), διευρύνει την σημασία των προτάσεων και των συλλογισμών, εφόσον συσχετίζουν καθαρά μια συγκεκριμένη θέση με κάποια πράξη, αλλαγή ή εφαρμογή. Έτσι, η ουσιώδης επιχειρηματολογία έχει και ένα πληροφοριακό χαρακτήρα με την έννοια ότι η σημασία των προτάσεων ενισχύεται ή διαφοροποιείται με την εφαρμογή μιας νέας περίπτωσης.

Με την ουσιαστική επιχειρηματολογία μια δήλωση ή μια απόφαση υποστηρίζεται σταδιακά. Αυτή η υποστήριξη δεν γίνεται μέσω μιας τυπικής λογικής διαδικασίας, όπως την γνωρίζουμε στα μαθηματικά, αλλά κινητοποιείται κυρίως από την πραγματοποίηση μιας πειστικής παρουσίασης του υπόβαθρου, των σχέσεων, των επεξηγήσεων, ή των δικαιολογήσεων μιας πράξης, δήλωσης ή συλλογισμού.

Πρόσφατες προσεγγίσεις μιας θεωρίας της επιχειρηματολογίας συμφωνούν με τα παραπάνω, ξεφεύγουν από την μονοσήμαντη πορεία στην διαδικασία της αναλυτικής επιχειρηματολογίας και δίνουν έμφαση στον επικοινωνιακό χαρακτήρα της ουσιώδης. Για παράδειγμα, η εθνομεθοδολογική προσέγγιση στον χώρο της μαθηματικής παιδείας (Krummheuer, 1996) τονίζει την σύζευξη της πράξης και της διασαφήνισης της λογικής που διέπει αυτήν την πράξη υποστηρίζοντας ότι και τα δύο θα έπρεπε να μελετώνται ως αναπόσπαστα μέρη. Έτσι, στο πλαίσιο αυτό, η επιχειρηματολογία είναι βασικά ένα κοινωνικό φαινόμενο κατά το οποίο συνεργαζόμενα άτομα προσπαθούν να προσαρμόσουν τις προθέσεις και τις ερμηνείες τους παρουσιάζοντας διαμέσω του *λόγου* την λογική των πράξεων τους. Αυτό ακριβώς το σημείο της διαπραγμάτευσης έχει ένα σημαντικό αντίχτυπο στην διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών. Συγκεκριμένα σε καταστάσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ ατόμων (π.χ. μεταξύ μαθητών, ή μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητευόμενων) παρατηρείται η ανάπτυξη της εκ προθέσεως ανάλυσης των επεξηγήσεων που διέπουν συγκεκριμένες πράξεις και αποτελέσματα όχι μόνο μετά αλλά και κατά την διάρκεια της γένεσης τους.

Άρα η ουσιώδης επιχειρηματολογία ως *λόγος* μαθηματικός (και λόγος χρήσιμος στην μαθηματική παιδεία) χαρακτηρίζεται από την χρήση τεχνικών και μεθόδων εγκαθίδρυσης της υποστήριξης μιας δήλωσης οι οποίες την επαναπροσδιορίζουν με τέτοιο τρόπο που δεν μπορεί να αμφισβητηθεί από άλλους. Αυτές οι τεχνικές και οι μέθοδοι αποτελούν τα επιχειρήματα τα οποία δεν απαρτίζονται μόνο από λεκτικές ανταλλαγές αλλά και από μαθηματικούς συμβολισμούς, εννοιολογικά μοντέλα, οπτικές ή φυσικές αναπαραστάσεις καθώς και των μεταξύ τους συνεργιών.

2. Μαθηματική παιδεία και παιδιά μειονοτικών ομάδων

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη μια στάση για την επιχειρηματολογία όπως την περιγράψαμε παραπάνω, η διερεύνηση της φύσης της επιχειρηματολογίας σε παιδιά μικρής ηλικίας και ακόμη περισσότερο σε παιδιά που ανήκουν πολιτισμικά σε μειονοτικές ομάδες, όπως τα παιδιά Ρομά, έχει όχι μόνο νόημα αλλά αποτελεί και αναγκαιότητα αν και εφόσον αν ο στόχος μας είναι η ουσιαστική και πραγματική βελτίωση της μαθηματικής τους παιδείας. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι αυτά τα παιδιά βρίσκονται σε πολύ μειονεκτική θέση όσον αφορά στην αντίληψή τους για το τι αξίες πρεσβεύει το εκπαιδευτικό σύστημα το οποίο παρακολουθούν και τι είδους τεχνική ή επιστημονική γνώση προάγει. Είναι γεγονός ότι σε πολλά και διαφορετικά επίπεδα παρουσιάζονται ηχηρές διαφορές σε σχέση με την δική τους κουλτούρα. Τα παιδιά αυτά δεν έχουν μόνο ανάγκη να ενταχθούν αλλά κυρίως να αποκτήσουν τα εφόδια αυτά που θα τα βοηθήσουν να είναι ενεργή πολίτες. Προς αυτή την κατεύθυνση, μπορεί κανείς να ισχυριστεί ως ένα βαθμό, ότι τα μαθηματικά και ιδιαίτερα η δεξιότητα επιχειρηματολογίας σε πλαίσια καθημερινών προβλημάτων αποτελούν ένα σημαντικό μετα-εργαλείο και εφόδιο.

Συνεπώς, υιοθετώντας μια προσέγγιση της επιχειρηματολογίας ως ουσιώδη -δηλαδή ως έκφραση της μαθηματικής σκέψης και ως εργαλείο επικοινωνίας- έχει νόημα να θεωρήσουμε ότι τα παιδιά Ρομά, όπως και κάθε παιδί, έχουν την δυνατότητα να επιχειρηματολογούν και επιπροσθέτως έχουν το δικαίωμα και το απαιτούμενο δυναμικό να βελτιώσουν και να αναπτύξουν αυτή τη δεξιότητα.

3. Μεθοδολογία: εθνογραφία και κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία

Ενώ τα τελευταία χρόνια έχουν οργανωθεί συγκεκριμένα προγράμματα για την εκπαίδευση των τσιγγανοπαίδων, τα αποτελέσματα ουσιαστικής τους ένταξης στο ελληνικό σχολείο δεν είναι πάντα θετικά. Όπως αναφέρει ο Γκότοβος (2002) ενώ το 1977 μόνο ένα 25% παιδιών ηλικίας 6-12 ετών παρακολουθούσαν το δημοτικό σχολείο, σήμερα το ποσοστό αυτό έχει αυξηθεί σε 74% (στοιχεία Δεκέμβρη 2000). Όμως παρόλη την αναμφισβήτητη αύξηση, η παρακολούθηση τους δεν είναι συστηματική και είτε λόγω της ημι-νομαδικής ζωής της οικογένειας είτε λόγω τραυματικών εμπειριών τα παιδιά αναγκάζονται να εγκαταλείπουν το σχολείο.

Η ζωή των παιδιών αυτών είναι οργανωμένη γύρω από τον πυρήνα της οικογένειας και οι καθημερινές συνθήκες διαβίωσης είναι συνήθως κακές. Αλλάζουν συχνά τόπο κατοικίας λόγω του ότι οι γονείς χρειάζεται να ταξιδεύουν συχνά για την εργασία τους. Έρχονται από πολύ νωρίς σε επαφή με την εργασία των πατεράδων τους – κυρίως εμπόριο μικρής κλίμακας και τα κορίτσια παντρεύονται συνήθως στην εφηβεία. Οι γονείς δεν έχουν μεγάλες προσδοκίες από την εκπαίδευση των παιδιών τους. Σε αντίθεση με άλλες μειονοτικές ομάδες, αρκούνται στην εκμάθηση βασικών αρχών γραφής, ανάγνωσης και αριθμητικής. Έχουν την δική τους γλώσσα, ήθη και έθιμα. Χρησιμοποιούν βασικά ελληνικά στον προφορικό λόγο, αλλά σπάνια γνωρίζουν γραφή και ανάγνωση (Τσιάκαλος, 1998).

Με τέτοιες περίπλοκες συνθήκες έρευνας, η μεθοδολογία που επιλέχθηκε ως καταλληλότερη έχει εθνογραφικό χαρακτήρα με την έννοια ότι έχει ληφθεί υπόψη το πλαίσιο της κοινότητας στο οποίο ένα παιδί Ρομά, και συγκεκριμένα η Γιαννούλα, ζει και λειτουργεί (Goetz and LeCompte, 1984, Chronaki, in press). Οι επαφές μαζί της δεν έχουν στόχο τόσο την διαγνωστική διερεύνηση αλλά την κατανόηση των γνωσιακών λειτουργιών της όπως αυτές εμφανίζονται και αναπτύσσονται στο δικό της χώρο. Ακόμη η εθνογραφική προσέγγιση συντέλεσε στην δημιουργία σχέσεων εμπιστοσύνης και στην συσχέτιση των επιμέρους ερμηνειών με το όλο, αυξάνοντας έτσι την αξιοπιστία των παρατηρήσεων. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν είναι η μη συμμετοχική παρατήρηση, οι συνεντεύξεις και οι συνομιλίες με πρόσωπα του χώρου της Γιαννούλας, η συλλογή υλικού και η καταγραφή εντυπώσεων, ερμηνειών και συναισθημάτων σε μορφή ημερολογίου.

Παράλληλα με την εθνογραφική μεθοδολογία, η κοινωνικο-πολιτισμική θεώρηση (Vygotsky, 1978, Lave and Wegner, 1991) επέτρεψε την οργανωμένη διερεύνηση γνωσιακών λειτουργιών σε σχέση με την επιχειρηματολογία. Θεωρώντας την επιχειρηματολογία ως αποτέλεσμα κοινωνικών συναλλαγών, βασικές μονάδες ανάλυσης αποτέλεσαν: πρώτον, οι *αλληλεπιδράσεις* της Γιαννούλας με την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό και, σε ορισμένα σημεία, με την μικρότερη αδερφή της την Μαρία, και δεύτερον η εργασία της σε *εστιασμένες* *δραστηριότητες* όπου οι μαθηματικές δεξιότητες μπορούν να διαγραφούν. Η ανάλυση είναι κυρίως ανάλυση λόγου (διαλόγων) βασισμένη σε απομαγνητοφωνημένα κείμενα της συνολικής αλληλεπίδρασης της ερευνήτριας με την Γιαννούλα. Ακολουθήθηκαν κάποια στάδια όπως: α) εστίαση σε συγκεκριμένα επεισόδια αλληλεπίδρασης, β) εστίαση σε σημεία που χαρακτηρίζουν την επιχειρηματολογία και γ) εστίαση σε σημεία που διαγράφουν το πλαίσιο στο οποίο κινούνται οι εν λόγω αλληλεπιδράσεις.

4. Η Γιαννούλα, οι αλληλεπιδράσεις και οι δραστηριότητες

Η Γιαννούλα είναι ένα κορίτσι Ρομά, 9 ½ χρονών και η οικογένεια της αποτελεί μια τυπική οικογένεια τσιγγάνων. Ο πατέρας είναι έμπορος και ταξιδεύει συχνά, η μητέρα φροντίζει τα παιδιά και όλοι μαζί ταξιδεύουν συχνά σε άλλες πόλεις προκειμένου να πουλήσουν την πραμάτεια τους. Έχουν δικό τους σπίτι με τις βασικές λειτουργίες στο οποίο η κουζίνα και η τηλεόραση παίζουν πρωτεύοντα ρόλο. Η Γιαννούλα έχει παρακολουθήσει την πρώτη και την δευτέρα δημοτικού, αλλά δεν θέλει πια να επιστρέψει στο σχολείο. Συνολικά η εμπειρία της στο σχολείο ήταν τραυματική και δεν βλέπει τι θετικά κίνητρα θα μπορούσε να επιφέρει. Για τους παραπάνω λόγους, το συγκεκριμένο κορίτσι, αντιπροσωπευτικά, αποτελεί χρήσιμη περίπτωση μελέτης.

Οι *αλληλεπιδράσεις* μεταξύ ερευνήτριας, Γιαννούλας και της αδερφής της Μαρίας χαρακτηρίζονται από σχέσεις φιλίας. Ταυτόχρονα υπάρχουν και άλλες διαστάσεις όπως για παράδειγμα η εξερεύνηση του ‘άλλου’. Τα κορίτσια ξέρουν ότι η ερευνήτρια ανήκει σε μια άλλη πολιτισμική ομάδα με διαφορετικές συνήθειες και τρόπο ζωής, την οποία έχουν περιέργεια να περιεργαστούν και να κατανοήσουν, πράγμα που αποτελεί αυτοσκοπό και για την ερευνήτρια. Ακόμη, πέρα από την φιλία, οι αλληλεπιδράσεις τους χαρακτηρίζονται και από την σχέση εκπαιδευτικού – μαθητευόμενου. Κατανοούν ότι οι ρόλοι τους δεν είναι μόνο φιλικοί αλλά εμμέσως εμπεριέχεται το ενδιαφέρον από την μεριά της ερευνήτριας να τις κατανοήσει αλλά και να τις εκπαιδεύσει σε κάποιες αρχές πολιτισμικές που αυτή θεωρεί σωστές. Αυτή η 'σύγκρουση’ γίνεται ορατή μέσα από την αλληλεπίδραση σε συγκεκριμένες δραστηριότητες (δες παρακάτω). Η ερευνήτρια σε κάθε ευκαιρία εισάγει ‘εργαλεία’ για νέους τρόπους σκέψεις τους οποίους τα κορίτσια άλλοτε προσπαθούν να αποδεχτούν και να υιοθετήσουν και άλλοτε όχι. Ο ρόλος της είναι δηλαδή διδακτικός και παιδαγωγικός.

Έχοντας στόχο την εστίαση σε αλληλεπιδράσεις που θα βοηθήσουν την παρατήρηση μαθηματικών διεργασιών, μια σειρά από *δραστηριότητες* αναπτύχθηκαν, που είχαν να κάνουν με την διαχείριση βασικών λογικο-μαθηματικών εννοιών όπως η μέτρηση και οι πράξεις σχετικά με το χρήμα και τον χρόνο. Και τα δύο, χρήμα-χρόνος, αποτελούν βασικές διαστάσεις στην καθημερινή τους ζωή και μπορούμε εύλογα να υποθέσουμε ότι η Γιαννούλα έχει προσωπικά βιώματα τα οποία να μπορούν να αποτελέσουν την αρχική βάση των συλλογισμών της. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μόνο οι δραστηριότητες σχετικά με την διαχείριση χρημάτων θα αναλυθούν και συγκεκριμένα δύο επεισόδια που αφορούν το πρώτο στην εύρεση ισοδυναμιών σε κέρματα μικρότερης αξίας, και το δεύτερο στην χρήση απλών αριθμητικών πράξεων για την επίλυση ενός απλού καθημερινού προβλήματος αγοράς.

5. Το πενηντάλεπτο: ισοδυναμίες κερμάτων μικρότερης αξίας

Ο στόχος σε αυτό το συγκεκριμένο επεισόδιο έχει να κάνει από την μια μεριά με την γνωριμία με το ευρώ και τις υποδιαιρέσεις του, και από την άλλη με την εύρεση ισοδυναμιών του πενηντάλεπτου σε άλλα κέρματα μικρότερης αξίας όπως τα λεπτά, τα δίλεπτα, τα πεντάλεπτα, τα δεκάλεπτα ή/και τα εικοσάλεπτα. Η ερώτηση της ερευνήτριας στον παρακάτω διάλογο είναι έμμεση: ‘Τι θες για τα πενήντα λεπτά’, εννοώντας τι πιθανούς συνδυασμούς με κέρματα μικρότερης αξίας μπορείς να δημιουργήσεις. Κι αυτό γιατί έχουν προηγηθεί κι άλλα παραδείγματα με μικρότερα ποσά (π.χ, τα 0,15 λεπτά). Η Γιαννούλα, κατανοώντας, απαντάει με αυτοπεποίθηση ότι θα χρησιμοποιήσει τα πεντάλεπτα εξηγώντας ότι κάτι τέτοιο θα είναι πιο εύκολο.

124	**Ερευν.**	**[Τώρα]…μετά είναι αυτό! (της δείχνω κέρμα €0,50)**
125	**Γιαν.**	Πενήντα λεφτά.
126	**Ερευν.**	**Πενήντα λεπτά. Για κάντο! Τι θες για πενήντα λεπτά;**
127	**Γιαν.**	Απ’ αυτά θα πάρω. (μου δείχνει κέρματα €0,05)
128	**Ερευν.**	**Απ’ αυτά θα πάρεις; Είναι πιο εύκολο;**
129	**Γιαν.**	Πιο εύκολο.

Στην πράξη, όμως, χρησιμοποιεί τα λεπτά και τα δίλεπτα, των οποίων η μέτρηση είναι, γι' αυτήν, περισσότερο γνώριμη και ασφαλής, σε σχέση με τα άγνωστα πεντάλεπτα, τα οποία φαίνεται ότι δεν ξέρει ακόμη καλά-καλά να ξεχωρίζει και να ονομάζει (στίχοι 131-136).

130	**Ερευν.**	**Ποια είναι αυτά που πήρες τώρα;**
131	**Γιαν.**	Πε…Πενήντα λεφτά.
132	**Ερευν.**	**Πενήντα λεπτά είναι εκείνο;**
133	**Γιαν.**	Όχι! Πενήντα…
134	**Ερευν.**	**Ποιος αριθμός είναι επάνω;**
135	**Γιαν.**	Το πέντε. Πέντε…Πέντε λεφτά είναι.
136	**Ερευν.**	**Πέντε λεπτά είναι. Ωραία!**
137 **138** **139** **140**	**Γιαν.**	Ένα, δύο. Τρία. Τέσσερα, πέντε, έξι (ως εδώ μετράει κέρματα €0,01 και συνεχίζει με κέρματα €0,02)…εφτά, οχτώ. Εννιά, δέκα. Όχι! Εφτά, οχτώ. Εννιά, δέκα. Έντεκα, δώδεκα. Δεκατρία, δεκατέσσερα. Δεκαπέντε, δεκαέξι. Δεκαοχτώ, δεκαεννιά. Είκοσι, εικοσιένα.

Παρόλο που η τεχνική της ένα-προς-ένα μέτρησης είναι προσφιλής, η Γιαννούλα, συνεχίζοντας με τα δίλεπτα, κάνει λάθος. Η ερευνήτρια παρεμβαίνει και ζητάει από την Γιαννούλα να επιβεβαιώσει (στίχος 141). Η Γιαννούλα, αμέσως αμφιβάλει για την ορθότητα της δήλωσης της, προφανώς θεωρώντας ότι ο λόγος της ερευνήτριας έχει κύρος (στίχος 142). Για παράδειγμα, παρακάτω μπορούμε να δούμε ότι δεν δίνει την ίδια βαρύτητα στα σχόλια της αδερφής της. Παρόλο που έχει δημιουργηθεί μια φιλική σχέση μεταξύ τους υπάρχει ασύμμετρη σχέση εξουσίας και σε αυτήν την αλληλεπίδραση, την οποία η ερευνήτρια προσπαθεί να χαλαρώσει ισχυριζόμενη, τελικά ειρωνικά, ότι δεν πρόκειται για λάθος, αλλά για απλή επιβεβαίωση (στίχος 143). Με αυτό τον τρόπο εισαγάγει ένα κανόνα κοινωνικο-μαθηματικής φύσης (δες Cobb et al, 1996), ο οποίος τονίζει ότι στα μαθηματικά πρέπει να σιγουρεύουμε κάθε βήμα.

141	**Ερ.**	**Λοιπόν. Για λίγο ξαναμέτρα απ' την αρχή!**
142	**Γιαν.**	Δεν τα έκανα καλά;
143	**Ερ.**	**Όχι! Ξαναμέτρα τα! Να είσαι σίγουρη θέλω!**
144 **145**	**Γιαν.**	Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι, εφτά, οχτώ, εννιά, δέκα, έντεκα, δώδεκα, δεκατρία, δεκατέσσερα, δεκαπέντε, δεκαέξι, δεκαεφτά, δεκαοχτώ, δεκαεννιά, είκοσι!
146	**Ερ.**	**Είκοσι! Ωραία!**
147	**Γιαν.**	Είκοσι ένα. Είκοσι δύο, είκοσι τρία.
148	**Ερ.**	**Ωραία!**
149 **150**	**Γιαν.**	Μμμ…Είκοσι τέσσερα, είκοσι πέντε. Δεν έχουμε άλλα τέτοια; (μου ζητά κέρματα €0,02)
151	**Ερ.**	**Πάρε άλλα κέρματα αν δεν έχουμε από αυτά!**
152	**Γιαν.**	Πέντε λεφτά είναι εδώ! (παίρνει ένα κέρμα €0,05) Πόσο είπαμε;

Στον παρακάτω διάλογο, η Γιαννούλα, διαπιστώνοντας ότι τα μονόλεπτα και τα δίλεπτα έχουν τελειώσει, αναγκάζεται να χρησιμοποιήσει τα πεντάλεπτα. Η τεχνική της επιχειρηματολογίας της όμως χαρακτηρίζεται από: α) την μέτρηση ένα προς ένα (σειριακή καταμέτρηση) της αξίας των νομισμάτων, και β) την χρήση των φυσικών αντικειμένων (πρακτικές ενσωματώσεις) που έχει μπροστά της δηλαδή τα κέρματα ή/και τα δάχτυλά της. Συγκεκριμένα, τα δάχτυλα την βοηθούν στην καταμέτρηση γιατί αποτελούν μια τεχνική ασφαλή και σίγουρη, όπως η ίδια εξηγεί (στίχος 161). Είναι δε τόσο σίγουρη που δεν μπορεί καν να αντιληφθεί ότι υπάρχει πιθανότητα λάθους. Στην προκειμένη περίπτωση όμως, και λόγω της παρέμβασης της ερευνήτριας συνειδητοποιεί ότι διαψεύδεται. Με την παρότρυνσή της για επιβεβαίωση, η Γιαννούλα αναμετρά με τα δάχτυλα και αυτή τη φορά καταλήγει στο σωστό αποτέλεσμα. Η ίδια στην ερώτηση 'Τριάντα ή τριάντα ένα τώρα;' επιλέγει με σίγουρο τόνο το τριάντα, κάτι που δείχνει ότι μπορεί να ξεχωρίζει το λάθος.

Γιαν.	[……………….] Πόσο είπαμε;
Ερ.	**Είκοσι πέντε είπες.**
Γιαν.	Είκοσι πέντε; Είκοσι πέντε, είκοσι έξι, είκοσι εφτά, είκοσι οχτώ…(δείχνει με το δάχτυλο της το κέρμα και με κοιτάζει και μετράει) Πόσα; Κάτσε! Δεν ξέρω! Με τα χέρια να μετρήσω.
Ερ.	**Είκοσι πέντε και πέντε.**
Γιαν.	Είκοσι πέντε (αρχίζει να μετράει τα δάχτυλα της και απαριθμεί ως εξής 25, 27…)…είκοσι εφτά, είκοσι οχτώ, είκοσι εννιά…τριάντα, τριάντα ένα. Τριάντα ένα!
Ερ.	**Είσαι σίγουρη;**
Γιαν.	Ναι! Αφού τα μέτρησα με τα χέρια!
Ερ.	**Είκοσι πέντε έχεις. Και πόσα λεπτά είναι εκείνο; (το κέρμα €0,05)**
Γιαν.	Πέντε.
	Ξαναμέτρα!
Ερ.	Είκοσι πέντε. (αρχίζει να μετρά με τα δάχτυλα) Είκοσι έξι, είκοσι εφτά, είκοσι οχτώ, είκοσι εννιά…τριάντα!
Γιαν.	**Τριάντα ή τριάντα ένα τώρα;**
	Τριάντα.

Η Γιαννούλα συνεχίζει την μέτρηση χρησιμοποιώντας τα πεντάλεπτα (στίχος 164), αλλά μετρώντας ένα προς ένα και χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα τα κέρματα και τα δάχτυλά της, φτάνει ως το πενήντα. Από την παρακάτω στιχομυθία φαίνεται ότι η Γιαννούλα έχει καταφέρει να δημιουργήσει την ισοδυναμία αποδεικνύοντας την αξιοπιστία των προτάσεων της στην οποία συμφωνούν (στίχοι 180-184).

	Αυτά δηλαδή είναι ίσα μ’ αυτό; (της δείχνω τα κέρμα €0,50)
	Ναι.
	Δηλαδή είτε σου δώσω αυτά είτε αυτό είναι το ίδιο; (της δείχνω τα κέρματα που ξεχώρισε και αυτό των €0,50)
	Κοίτα! Να τα μετρήσω! Κοίτα!
	Μέτρα τα!

Η ερευνήτρια, όπως θα δούμε και πιο κάτω, προσπαθεί να ωθήσει την Γιαννούλα στην χρήση μιας περισσότερο ευέλικτης και γενικευμένης τεχνικής- την μέτρηση με βάση την πεντάδα. Ένα εργαλείο, που ενώ η Γιαννούλα το έχει συναντήσει στο σχολείο ή στην οικογένεια, δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει συστηματικά, με σιγουριά και ευχέρεια. Συγκεκριμένα, της ζητείται να μην χρησιμοποιήσει τα χέρια, αλλά να κάνει την μέτρηση νοητικά (στίχος 199). Η Γιαννούλα, όπως φαίνεται στον στίχο 200, δεν μπορεί να αποδεσμευτεί από την ένα προς ένα μέτρηση. Όταν η ερευνήτρια επιμένει δείχνοντας της τα δύο κέρματα, αυτή απαντάει 'Πέντε…Δέκα!', εννοώντας πέντε και πέντε μας κάνει δέκα. Ενώ πιο κάτω απαντάει στην τύχη, όπως η ίδια ομολογεί (στίχος 206).

Παρόλους τους δισταγμούς και την αδυναμία της στην χρήση της τεχνικής της πεντάδας, στους στίχους 210 και 211 αποκαλύπτεται ένας εκπληκτικός και περίπλοκος συλλογισμός. Αντί να προβεί στην μέτρηση ανά πεντάδα σειριακά (δηλαδή 5, 10, 15, 20) όπου στόχευε η ερευνήτρια, χρησιμοποιεί το νοητικό μοντέλο πέντε και πέντε ίσον δέκα, το οποίο μπορεί να χειριστεί εύκολα και δημιουργεί τον συλλογισμό: 5+5=10 (φωναχτά), 5+5=10 (δεν το λεει γιατί θεωρεί ότι εννοείται εφόσον έχει τα κέρματα μπροστά της), 10+10=20 (φωναχτά), καταλήγοντας στο σωστό αποτέλεσμα. Αυτό το συγκεκριμένο επεισόδιο καταδεικνύει ότι πρώτον: τη βάση που δημιουργεί την ευχέρεια τέτοιων συλλογισμών αποτελούν τα προσωπικά εννοιολογικά μοντέλα που διαθέτει το παιδί και για τη χρήση των οποίων αισθάνεται ασφάλεια και σιγουριά. Έτσι, ενώ ή ίδια έχει δυσκολία να προβεί στην μέτρηση συνολικά ανά πεντάδα, διαχειρίζεται το πρόβλημα σε μέρη οικεία που αποτελούν προσωπική εμπειρία και γνώση. Δεύτερον, αυτές οι προσωπικές εμπειρίες (σε μορφή εννοιολογικών μοντέλων) αποτελούν τις τεχνικές, δηλαδή τα επιχειρήματα, της αναπτυσσόμενης επιχειρηματολογίας της. Και τρίτον, η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης της Γιαννούλας έχει θετικό δυναμικό το οποίο μπορεί να ενεργοποιηθεί με την διαμεσολάβηση της ερευνήτριας – εκπαιδευτικού.

Τα παραπάνω διαφαίνονται και στην αντιμετώπιση της ερώτησης: 'Δέκα κέρματα των δύο λεπτών πόσα λεπτά είναι;' (στίχοι 228-230) που θέτει η ερευνήτρια με στόχο την χρήση του πολλαπλασιασμού ή των δεκάδων. Η Γιαννούλα, πάλι ανάγει την επιχειρηματολογία της σε μια βάση που είναι γνωστή και αποδεκτή από αυτήν την ίδια. Μη ξέροντας τον πολλαπλασιασμό (10 x 0,02) ή την μέτρηση με δεκάδες, δεν τα παρατάει, αλλά χρησιμοποιεί πρόσθεση που γνωρίζει. Είναι αξιοσημείωτο ότι δεν πτοείται με πράγματα που ίσως από άλλα παιδιά θεωρούνται ανυπέρβλητες δυσκολίες και που οδηγούν στην παραίτηση ή στην σιωπή. Έχει θετική στάση, αυτοπεποίθηση και χαίρεται όταν κάνει μια επιτυχημένη προσπάθεια με τις δικές της δυνάμεις.

Ερ.	**[........] Πέντε κέρματα των πέντε λεπτών πόσα λεπτά**
	είναι; (ξεχωρίζω 5 κέρματα €0,05)
	Μπορείς να μετρήσεις πέντε – πέντε; Όχι με τα χέρια
Γιαν.	**σου! Πέντε – πέντε!**
Ερ.	Ένα, δύο…(κρατάει στο χέρι της ένα κέρμα €0,05 κι αρχίζει
Γιαν.	να μετράει)
Ερ.	**Πέντε και πέντε πόσο μας κάνει; (της δείχνω 2 κέρματα**
Γιαν.	**των €0,05)**
Ερ.	Πέντε…Δέκα!
Γιαν.	**Και πέντε; (της δείχνω κι άλλο κέρμα €0,05)**
Ερ..	Και πέντε, είκοσι!
Γιαν.	**Είσαι σίγουρη;**
Ερ.	Όχι!
Γιαν.	***Λοιπόν! Πέντε και πέντε...(της δείχνω πάλι 2 κέρματα***
	€0,05)
Ερ.	*Και πέντε…δέκα!*
Γιαν.	***Δέκα. Πέντε...(της δείχνω κι άλλο κέρμα €0,05)***
Ερ.	*Και πέντε, δέκα. (μου δείχνει ακόμη ένα κέρμα €0,05) Δέκα και*
Γιαν.	*δέκα, είκοσι! (προσθέτει τα αθροίσματα από τα δύο ζεύγη των*
Ερ.	*€0,05)*
Γιαν.	***Και πέντε; (της δείχνω κι άλλο κέρμα €0,05)***
Ερ.	*Είκοσι πέντε!*
Γιαν.	**Είκοσι πέντε. Οπότε πέντε κέρματα των πέντε λεπτών**
Ερ.	**πόσα λεπτά είναι;**
Γιαν.	Είκοσι πέντε!
	Είκοσι πέντε. Ωραία! Τα υπόλοιπα; Τι χρειάστηκες άλλο;
Ερ.	Να τα μετρήσω ένα – ένα. Δύο και δύο, τέσσερα. (αρχίζει με
Γιαν.	κέρματα €0,02)
Ερ.	**Τα έχεις μαζέψει όλα;**
Γιαν.	Ωχ!
Ερ.	**Ωραία!**
Γιαν.	Δύο και…
Ερ.	**Τι κέρματα έχεις εκεί πέρα; (μετράει κέρματα €0,02)**

231	**Γιαν.**	Είκοσι!
232		**Των πόσων λεπτών;**
234	**Ερ.**	Είκοσι λεφτά! Αχ!
235	**Γιαν.**	**Δες καλύτερα!**
236		Δύο λεφτά!
237		**Δύο λεπτά. Πόσα κέρματα των δύο λεπτών έχεις;**
238		(τα μετράει) Δέκα.
239	**Ερ.**	**Δέκα κέρματα των δύο λεπτών πόσα λεπτά είναι;**
	Γιαν.	Κάτσε να τα μετρήσω! Δύο και δύο, τέσσερα και ένα, πέντε κι ένα έξι. Και…οχτώ! (ως εδώ δείχνει ένα-ένα κέρματα €0,02 και μετράει απαριθμεί δύο-δύο) Να τα μετρήσω πιο καλά;
	Ερ.	**Δεν μπορείς αλλιώς;**
	Γιαν.	Και δύο, τέσσερα. Έξι. Οχτώ. Εννιά, δέκα. Έντεκα, δώδεκα. Δεκατρία, δεκατέσσερα. Δεκαπέντε, δεκαέξι. Δεκαεφτά, δεκαοχτώ. Δεκαεννιά, είκοσι. Είκοσι!
		Είκοσι πόσα είναι;
		Είκοσι…είκοσι λεφτά!

Στον παρακάτω διάλογο, βλέπουμε τη Γιαννούλα να μπαίνει στην διαδικασία χρήσης των πεντάλεπτων και της τεχνική μέτρησης με βάση την πεντάδα. Χρησιμοποιεί αυτή την τεχνική μέχρι εκεί που μπορεί και μόλις αισθάνεται ανασφάλεια επιστρέφει στην γνωστή της ένα-προς-ένα μέτρηση. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μαθαίνει την χρήση ενός νέου νοητικού εργαλείου (π.χ. την μέτρηση ανά πέντε), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιεί με σιγουριά ως ένα βαθμό και άρα σαν επιχείρημα. Προς το τέλος της στιχομυθίας βλέπουμε ότι στην ανακεφαλαίωση σχετικά με την ισοδυναμία, η Γιαννούλα με πολύ αυτοπεποίθηση μπορεί και απαριθμεί τον συνδυασμό των κερμάτων που επεξεργάστηκε σε μια ισοδυναμία της μορφής: 10x 0,02+ 5x0,05+5x0,01=0,50 (στίχοι 305-313). Η ερευνήτρια έχει ένα ρόλο διδακτικό καθώς οργανώνει την αλληλεπίδραση κατάλληλα έτσι ώστε: α) να εστιάζει την προσοχή της Γιαννούλας όχι μόνο στο αποτέλεσμα αλλά και στην διαδικασία, και β) να αποδέχεται την τρόπο χρήσης της γλώσσας που διαθέτει η Γιαννούλα, αλλά ταυτόχρονα να τονίζει την σημασία κατάκτησης αρτιότερου λεξιλογίου και εκφράσεων (στίχοι 312-313).

Ερ.	**Λοιπόν, έχεις εδώ πέρα δέκα κέρματα των δύο**
	λεπτών. Που κάνουν είκοσι! Μην αγχώνεσαι και μη
	ξεφυσάς! Έλα! Κάνουν είκοσι. Και πέντε; (της
	δείχνω ένα κέρμα €0,05)
Γιαν.	Είκοσι πέντε.
Ερ.	**Και πέντε…(της δείχνω κι άλλο κέρμα €0,05)**
Γιαν.	Είκοσι…ε…είκοσι έξι.
Ερ.	**Είκοσι πέντε και πέντε;…Μέτρα με τα χέρια σου!**
Γιαν.	**Είκοσι πέντε και πέντε…**
Ερ.	Είκοσι. Να τα μετρήσω από τα είκοσι;
Γιαν.	**Ναι…Όχι, όχι! Είκοσι πέντε. Εντάξει; Και πέντε.**
	Συνέχισε απ' τα είκοσι πέντε!
Ερ.	Είκοσι πέντε, είκοσι έξι, είκοσι εφτά, είκοσι οχτώ, είκοσι
Γιαν.	εννιά…τριάντα! (μετρά με τα χέρια της)
Ερ.	**Τριάντα. Και πέντε; (της δείχνω κι άλλο κέρμα**
Γιαν.	**€0,05)**
	Τριάντα πέντε.
Ερ.	**Και πέντε; (της δείχνω κι άλλο κέρμα €0,05)**
Γιαν.	Τριάντα πέντε, τριάντα έξι, τριάντα εφτά, τριάντα οχτώ,
Ερ.	τριάντα εννιά, πενήντα. (μετράει με τα χέρια της)
Γιαν.	**Τριάντα εννιά, πενήντα;**
	Ωχ! Τριάντα εννιά…σαράντα!
Ερ.	**Και πέντε; (της δείχνω κι άλλο κέρμα €0,05)**
Γιαν.	Περίμενε! Σαράντα ένα, σαράντα δύο, σαράντα τρία,
Ερ.	σαράντα τέσσερα, σαράντα πέντε! (συνεχίζει να μετρά με
Γιαν.	τα χέρια)
	Και είχες και αυτά εδώ πέρα. (της δείχνω πέντε
Ερ.	**κέρματα €0,01)**
Γιαν.	Σαράντα πέντε. Κάτσε να τα μετρήσω αυτά!
Ερ.	**Σαράντα πέντε.**
	Σαράντα πέντε, σαράντα έξι, σαράντα εφτά, σαράντα
Γιαν.	οχτώ, σαράντα εννιά, πενήντα! Όλα αυτά πενήντα! (μου
Ερ.	δείχνει τα κέρμα τα που έχει μπροστά της)
Γιαν.	**Ωραία! Όλα αυτά μας κάνουν πόσα λεπτά;**
	Πενήντα λεφτά.
Ερ.	**Πενήντα λεπτά. Δηλαδή αυτό το κέρμα! (της δείχνω**
	το κέρμα των €0,50) Έτσι; Δηλαδή τι χρειάστηκες
	για να βγάλεις τα πενήντα λεπτά;

314	Γιαν.	Είκοσι…(μου δείχνει τα κέρματα των €0,02) **Πόσα είναι εκείνα;** Είκοσι κέρματα…Δέκα κέρματα των δύο λεφτών. Πέντε κέρματα των πέντε λεφτών. Και ένα…και ένα… **Ένα είναι εκείνο;** Πέντε κέρματο…Δηλαδή των ένα λεφτό. **Του ενός λεπτού! Ωραία! Τώρα…ποιο είναι το αμέσως επόμενο μετά από αυτό; (από το κέρμα των €0,50) Είδαμε το ένα λεπτό, τα δύο λεπτά, τα πέντε, τα δέκα και το…** Ένα! (εννοεί το ένα ευρώ)

6. Η σοκολάτα: αφαιρώντας το 7 από το 12

Έχοντας κάνει αρκετές δραστηριότητες σχετικά με την αναγνώριση και τον συνδυασμό κερμάτων για την εύρεση ισοδυναμίας με ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό, μια σειρά από προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν. Σχετίζονται με προβλήματα καθημερινών αγοραπωλησιών, τα οποία απαιτούν διαχείριση χρημάτων και την χρήση απλών αριθμητικών πράξεων. Συγκεκριμένα το παρακάτω πρόβλημα αναφέρεται στην αγορά μιας σοκολάτας από το συνοικιακό μαγαζάκι της Μαρίνας. Η ερευνήτρια στοχεύει στην εκτέλεση της πράξης νοητικά, επιζητώντας αποστασιοποίηση από τα φυσικά αντικείμενα. Το πρόβλημα απαιτεί αφαίρεση, κάνοντας χρήση μικρών νούμερων έτσι ώστε να διευκολυνθεί η Γιαννούλα στη νοητική πράξη. Σε αντίστοιχα προβλήματα με μεγαλύτερα νούμερα (και περισσότερο ρεαλιστικές τιμές) τα κορίτσια αντιμετώπισαν πρόβλημα.

Σ' αυτή την αλληλεπίδραση συμμετέχει και η μικρότερη αδερφή της, η Μαρία, η οποία παρατηρεί την διαδικασία, σχολιάζοντας. Για παράδειγμα, προτείνει το κόστος της σοκολάτας να έχει μια περισσότερο ρεαλιστική τιμή (π.χ.0,17). Επειδή δεν μπορεί να αγοραστεί με τα 0,12 λεπτά, η Γιαννούλα λεει 'Δεν μπορώ' και συμφωνεί με το προτεινόμενο κόστος. Η παρουσία της Μαρίας δημιουργεί ανταγωνισμό που σ' αυτό το επεισόδιο έχει ένα διφορούμενο ρόλο για την μάθηση της Γιαννούλας. Από την μια μεριά λειτουργεί εποικοδομητικά: Η Μαρία προσπαθεί και εκείνη να λύσει το πρόβλημα. Όταν η ερευνήτρια της απευθύνει τον λόγο, και ενώ η

Γιαννούλα είναι κοντά στο να παρατήσει τις προσπάθειες της, ενεργοποιείται και λύνει το πρόβλημα. Από την άλλη μεριά λειτουργεί κατασταλτικά: Η ανάγκη της να δώσει λύση, και να υπερισχύσει της αδερφής της, ωθεί την Γιαννούλα στην χρήση της τεχνικής καταμέτρησης με τα δάχτυλα. Έτσι ναι μεν δίδει την απάντηση, στερεί όμως στον εαυτό της την δυνατότητα εξάσκησης στην χρήση μιας νοητικής τεχνικής.

1345	Ερ.	**Λοιπόν. Σου δίνω δώδεκα λεπτά και πας να πάρεις ε…από τη Μαρίνα μία…ε…**
1346	Μαρία	Μία…σοκολάτα!
1347	Ερ.	**Μια σοκολάτα που κάνει εφτά λεπτά.**
1348	Μαρία	Όχι, δεκαεφτά… (προτείνει μια ρεαλιστική τιμή)
1349	Ερ.	**Συγνώμη!**
1350	Γιαν.	Δεν μπορώ… (εννοεί δεν μπορεί εφόσον έχει μόνο 12 λεπτά, και
1351		άρα συμφωνεί στο προτεινόμενο κόστος των 7 λεπτά)
1352	Ερ.	**Πες μου! Με…Χωρίς λεφτά. Για σκέψου λίγο τώρα!**
1353	Γιαν.	Είκοσι πέντε. (συνεχίζει να πειράζει το μικρόφωνο)
1354	Ερ.	**Μη χτυπάς! Πόσο κάνει; Σου δίνω δώδεκα λεπτά.**
1355	Γιαν.	Εφτά λεφτά.
1356	Ερ.	**Και η σοκολάτα κάνει εφτά λεπτά. Θα σου δώσει ρέστα η Μαρίνα ή όχι;**
1357	Γιαν.	Ναι.
1358	Μαρία	Η σοκολάτα πόσο κάνει;
1359	Ερ.	**Θα σου δώσει. Λοιπόν, Μαρία! Για πες μου! Πόσα ρέστα θα σου δώσει;**
1360	Γιαν.	Κάτσε! Δώδεκα, ε;
1361	Ερ.	**Ναι.**
1362	Γιαν.	Να κάνω με τα χέρια;
1363		
1364	Ερ.	**Κάνε με τα χέρια, αλλά θα μου πεις και πόσα…τι κέρματα θα σου δώσει μετά.**
1365	Γιαν.	(μετράει τα δάχτυλα) Εφτά βγάζουμε έξω.
1366	Ερ.	
	Γιαν.	

		Ναι. Τρία λεφτά.

Η αγωνία της να απαντήσει γρήγορα, αλλά και η ακαμψία των δαχτύλων ως φυσικά αντικείμενα στην μέτρηση, οδηγούν την Γιαννούλα να κάνει λάθος. Αντί να αφαιρέσει το επτά από το δώδεκα το αφαιρεί από τα δέκα δάχτυλα που έχει μπροστά της. Σε αμφισβήτηση της ερευνήτριας διορθώνει το λάθος της, με ευκολία, και δίνει την σωστή απάντηση. Τέλος, όπως βλέπουμε στους στίχους 1377 και 1379 έχει αποκτήσει ευχέρεια στο να βρίσκει ισοδυναμίες με συνδυασμό κερμάτων. Σε σχέση με το 'πέντε' που αποτελεί την απάντηση για τα ρέστα, λεει ότι ο συνδυασμός κερμάτων είναι 'ένα των πέντε ή 'Δύο κέρματα των δύο λεπτών και ένα κέρματο το ένα λεφτό'. Με μαθηματικά σύμβολα αυτό θα μπορούσε να μεταφραστεί με την αλγεβρική παράσταση 5= 2x2+1.

1367	Ερ.	**Τρία λεπτά θα σου δώσει; Έτσι;**
1368	Γιαν.	Από δώδεκα;
1369	Ερ.	**Ναι.**
1370	Γιαν.	Πέντε λεφτά.
1371	Ερ.	**Πέντε λεπτά θα σου δώσει; Ναι. Τι κέρματα θα σου δώσει;**
1372	Γιαν.	Τι κέρματα; (το σκέφτεται)…Το πέντε!
1373	Ερ.	**Ένα των πέντε; Ωραία! Άλλα τι μπορεί να σου δώσει; Άσ' το! (με το μολύβι πειράζει το μικρόφωνο)**
1374		
1375	Μαρία	Άσ' το! Όλο αυτό ακουμπάς! (τη μαλώνει)
1376	Ερ.	**Άλλο τι μπορεί να σου δώσει; Μη χτυπάς σε παρακαλώ!**
1377	Γιαν.	Μπορεί και δύο κέρματα και ένα.
1378	Ερ.	**Δύο κέρματα τι;**
1379	Γιαν.	Δύο κέρματα των δύο λεπτών και ένα κέρματο το ένα λεφτό.
1380	Ερ.	**Και ένα κέρμα το ένα…του ενός λεπτού. Μάλιστα! Μη χτυπάς! [……]**

7. Συμπεράσματα

Το παρόν άρθρο υποστηρίζει ότι η επιχειρηματολογία των παιδιών Ρομά, μέσα από την ανάλυση της περίπτωσης της Γιαννούλας, μοιάζει αρκετά με την μορφή επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιούν άλλα παιδιά μικρής ηλικίας ως προς δύο βασικά σημεία. Συγκεκριμένα, ο πρακτικός (concrete) και ο συλλογικός (collective) χαρακτήρας της επιχειρηματολογίας που έχει παρατηρηθεί σε τάξεις παιδιών πρώτης σχολικής ηλικίας (Krummheuer, 1996, Cobb et al, 1992) εμφανίζεται και εδώ, όπως είδαμε στους παραπάνω διάλογους. Πρώτον, τα παιδιά Ρομά στηρίζουν την επιχειρηματολογία τους σε τεχνικές ή επιχειρήματα με τα οποία αισθάνονται προσωπική ασφάλεια, σιγουριά και ευχέρεια στην χρήση. Οι τεχνικές αυτές έχουν βασικά την μορφή της πρακτικής επιχειρηματολογίας (concrete argumentation) όπου χειροπιαστά αντικείμενα όπως τα δάχτυλα και τα κέρματα αποτελούν ή υποβοηθούν την έκφραση των αναπαραστάσεων της μαθηματικής τους σκέψης.

Δεύτερον, η επιχειρηματολογία τους αναπτύσσεται μέσα σε ένα συλλογικό περιβάλλον αλληλεπιδράσεων όπου η ανάγκη υποστήριξης των απόψεών ή των δηλώσεων τους προκύπτει μέσα από την διαμεσολάβηση της εκπαιδευτικού (collective argumentation). Μέσα σε αυτήν την συλλογική εργασία δημιουργούνται διαπραγματεύσεις των προθέσεων, δηλώσεων και ερμηνειών σε σχέση με μια συγκεκριμένη δραστηριότητα. Η επιχειρηματολογία λοιπόν γεννιέται σε ένα κλίμα όπου η πράξη και η λογική που διέπει αυτήν την πράξη είναι συνυφασμένες. Η ανάγκη για την εκ προθέσεως ανάλυση των επεξηγήσεων (σε μορφή επιχειρημάτων) που διέπουν συγκεκριμένες πράξεις και αποτελέσματα εκδηλώνονται μέσα από την αλληλεπίδραση με την εκπαιδευτικό και δημιουργούνται συλλογικά, ως μέρος του διαλόγου που αναπτύσσεται. Το πέρασμα βέβαια από τα προσωπικά βιώματα και τρόπους επεξήγησης (τα προσωπικά επιχειρήματα) σε περισσότερο άρτιες μαθηματικές εκφράσεις δεν είναι ούτε εύκολο, ούτε λείο, ούτε συστηματικό, όπως παρατηρήσαμε στα παραπάνω. Σε πολλά σημεία είδαμε την Γιαννούλα εκεί που έδειχνε έτοιμη να χρησιμοποιήσει μια περισσότερο γενικεύσιμη και ευέλικτη τεχνική επιχειρηματολογίας να πισωγυρίζει σε προσωπικές τεχνικές (κυρίως πρακτικής φύσης) με τις οποίες η ίδια αισθάνεται παραπάνω ασφάλεια και σιγουριά. Αυτή η προσπάθεια εμπλέκεται με στοιχεία της συμπεριφοράς της τα οποία είναι πολιτισμικής φύσης, αλλά τα οποία δεν υπάρχει ο χώρος να αναλυθούν εδώ. Μπορούμε όμως να πούμε ότι η διαμεσολάβιση της εκπαιδευτικού, δημιουργεί τις προυποθέσεις για την εκδήλωση αυτών των προσωπικών μορφών επιχειρηματολογίας, για την διδασκαλία στην χρήση περισσότερο γενικεύσιμων τεχνικών και παράλληλα για την μύηση σε πολιτισμικά σημεία της κυρίαρχης κουλτούρας. Η αξία, η σημασία, και η χρησιμότητα αυτών των ενεργειών χρήζουν περαιτέρω προβληματισμού και ανάλυσης.

Αναφορές

Chronaki, A. in press. Researching the school mathematics culture of ‘others’- Creating a self-other dialogue. In R. Zevenbergen & P. Valero (Eds.), Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology.. 2020 Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. and McNeal, B. 1992. Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. American Educational Research Journal. 29, pp.573-604.

Γκότοβος, Α. 2002. Εκπαίδευση και Ετερότητα- Ζητήματα διαπολιτισμικής παιδαγωγικής. Αθήνα. Μεταίχμιο.

Goetz, J. P. and LeCompte, M. D. 1984. Ethnography and Qualitative Design in Educational Research. New York and London. Academic Press Inc.

Krummheuer, G. 1996. The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb and H. Bauersfeld (ed.). The Emergemce of Mathematical Meaning. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.(pp. 229-269).

Lave, J. and Wegner, E. 1991. Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation. Cambridge. Cambridge University Press.

Toulmin, S. 1969. The uses of argument. Cambridge. England. Cambridge University Press.

Τσιάκαλος, Γ. 1998. Κοινωνικός Αποκλεισμός- Ορισμοί, πλαίσιο και σημασία. Στο Κ. Κασσιμάτη (επιμ.) Κοινωνικός Αποκλεισμός στην Ελλάδα. Αθήνα. Gutenberg (σελ.39-65).

Vygotsky, L. S. 1978. Mind and Society: The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge. MA: Harvard University Press.

Ευχαριστίες: *Πολλά ευχαριστώ στα παιδιά Ρομά που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, που χωρίς την ενθουσιώδη συμμετοχή τους δεν θα μπορούσε να υλοποιηθεί. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στην ερευνήτρια Σοφία Τακοπούλου που οργάνωσε την συλλογή και απομαγνητοφώνηση των παραπάνω αλληλεπιδράσεων.*

Πυθαγόρειο Θεώρημα: Ένα παράδειγμα απόδειξης από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Κων/νος Νικολαντωνάκης

Δρ Ιστορίας των Θετικών Επιστημών και της Τεχνολογίας

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη γεννήθηκαν περίπου το 300 π.Χ., και ηγήθηκαν της γεωμετρίας μέχρι τον 19ο αιώνα. Αποτελούσαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την επιτυχία των βιβλιοθηκών και βιβλιοπωλείων μετά την Βίβλο. Σε τι συνίσταται αυτή η καταπληκτική διάρκεια ?

Τα *Στοιχεία* αποτελούνται από 13 βιβλία. Η μεγάλη ποσότητα μεταφράσεων και σχολιασμών, ο αριθμός των ελληνικών χειρογράφων που διατηρούνται-πολλές δεκάδες-, η ποικιλία των κειμένων που πηγάζουν από αυτά (περιλήψεις, εγχειρίδια κτλ.), ο αριθμός των εκδόσεων τους μέχρι την αρχή του 20ου αιώνα, τόσα πολλά γεγονότα που ακριβώς αποδεικνύουν την επιτυχία του έργου και της σημαντικής συμβολής και επίδρασης στην Ιστορία των Μαθηματικών καθώς και στην διδασκαλία τους. Αντίθετα η χρήση τους στην Αρχαιότητα μας είναι λιγότερο γνωστή και ξεκάθαρη. Από τον 1ο π.Χ. αιώνα είμαστε βέβαιοι ότι το όνομα του Ευκλείδη είναι συνώνυμο της γεωμετρίας. Για τον Κικέρωνα ο Ευκλείδης κατέχει το σύνολο της ειδικότητας του. Βρίσκουμε επίσης την ίδια εκτίμηση για το έργο του Ευκλείδη και σε άλλους συγγραφείς της ύστερης αρχαιότητας, Έλληνες ή Λατίνους καθώς και σε μεταγενέστερους κατά την διάρκεια του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης. Στους πρώτους αιώνες της εποχής μας αναπτύσσεται ραγδαία μια κατηγορία γραπτών που ονομάζονται σχόλια, ο στόχος τους είναι λιγότερο να προτείνουν πρωτότυπες βεβαιώσεις σε ένα δοθέν θέμα, παρά να ενώσουν, συμπτύξουν, επεξηγήσουν, κριτικάρουν αυτά που ανέφεραν οι προγενέστεροι τους. Αποτελούν αυτό που θα λέγαμε διαφορετικά Βιβλία για τα βιβλία. Στα μαθηματικά το έργο του Ευκλείδη θα είναι από αυτά που σχολιάστηκαν πάρα πολύ. Οι σχολιαστές εισήγαγαν μια λέξη ο Στοιχειωτής που σημαίνει ο συγγραφέας των *Στοιχείων*. Αυτό μαρτυρεί την σημαντικότητα του έργου αλλά και του συγγραφέα. Στο δεύτερο μισό του 4ου αιώνα μ.Χ. ο Θέωνας, ένας από τους τελευταίους σοφούς πρότεινε μια επανέκδοση της ευκλείδειας πραγματείας, η οποία έγινε σημαντική για την διδασκαλία της γεωμετρίας.

Μερικές μαρτυρίες, που έφτασαν ως εμάς μέσω των έργων των σχολιαστών μας επιτρέπουν να αποκτήσουμε μια ιστορία η οποία όμως παραμένει αρκετά υποθετική. Όπως άλλοι σοφοί, ο Ευκλείδης είχε προσκληθεί από τον βασιλιά Πτολεμαίο τον Α' τον Ευεργέτη την στιγμή που αυτός είχε αποφασίσει να ιδρύσει το Μουσείο και την Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας. Με αυτή την υπόθεση ο Ευκλείδης θα ήταν σύγχρονος των πρώτων μαθητών του Αριστοτέλη, λίγο μεγαλύτερος από τον Αρχιμήδη και τον Ερατοσθένη και κατά κάποιο τρόπο «ιδρυτής της μαθηματικής σχολής της Αλεξάνδρειας». Θα μπορούσαμε να φανταστούμε πολλά σε συνέχεια του παραπάνω αλλά δεν γνωρίζουμε τίποτα για την διδασκαλία του Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια ή τις σχέσεις του με άλλους συναδέλφους. Για κάποια πράγματα μπορούμε να είμαστε σίγουροι. Οι μαρτυρίες, αλλά και τα αντικείμενα των μαθηματικών που συζητήθηκαν, καθώς και το χρησιμοποιούμενο ύφος, μας οδηγούν στο να συμπεράνουμε μια συνέχεια πνευματική και διδασκαλική σε 3 ή 4 γενιές. Πηγαίνει από τον Ευκλείδη στον Υψικλή περνώντας από τον Απολλώνιο, συγγραφέα των *Κωνικών*. Οι μαρτυρίες μας επιτρέπουν επίσης να δημιουργήσουμε έναν κατάλογο των έργων, ο οποίος μας εκχωρεί το δικαίωμα να πούμε ότι ο Ευκλείδης είχε συστήσει μια μαθηματική εγκυκλοπαίδεια, μέσα στην οποία περιλαμβάνονται η γεωμετρία και η θεωρία αριθμών (*Στοιχεία*), αλλά επίσης η μαθηματική αστρονομία (*Φαινόμενα*), η μουσική, η οπτική, η κατοπτρική…

Γιατί να δημιουργήσει ένα τέτοιο σώμα μαθηματικών?

Ίσως ήταν επίδραση της ίδρυσης και της οργάνωσης των πνευματικών ιδρυμάτων στην Αλεξάνδρεια. Για τα περισσότερα έργα, είμαστε μπροστά σε συνθέσεις που απευθύνονται σε ένα πρώτο στάδιο στην ανώτερη εκπαίδευση των μαθηματικών.

Η συνολική κατασκευή των *Στοιχείων* του Ευκλείδη στην οποία τα διαφορετικά συστατικά μιας προβληματικής είναι αποσυνδεμένα, τα βρίσκουμε να περιέχονται σε αλυσίδες αποτελεσμάτων, μη έχοντας σχέση με το αρχικό πλαίσιο τους, αλλά με τρόπο ώστε να συμπεραίνονται το ένα από το άλλο. Στην περίπτωση των μαθηματικών ο συγγραφέας πηγαίνει από τις υποθέσεις προς τα συμπεράσματα, από τις αρχές προς τα αποτελέσματα που συμπεραίνονται. Αλλά η δουλειά της έρευνας που προηγήθηκε της αναγνώρισης και της τοποθέτησης των στοιχείων έχει αποκρυφθεί, δηλ. η έκθεση γίνεται για να δείξουμε ένα μέρος της επιστήμης όπως έχει γίνει και όχι στο στάδιο που γίνεται. Τελικά αυτό το είδος γίνεται το πιο τελειομανές όσον αφορά το δομικό μέρος, στην περίπτωση της γεωμετρίας, αυτό ενισχύεται από ένα δεύτερο χαρακτηριστικό την μορφή της ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία είναι συμπερασματική και αποδεικτική. Σ' αυτό το έργο ο Ευκλείδης διαχωρίζει δύο πράγματα, από την μία τις πρώτες αρχές, από την άλλη τις προτάσεις που αποδεικνύονται με βάση τις πρώτες αρχές. Αυτές οι τελευταίες είναι οι λύσεις προβλημάτων (γενικά κατασκευών), ή θεωρημάτων τα οποία θα χρησιμοποιηθούν σε μεταγενέστερα αποτελέσματα πιο σύνθετα με τον τρόπο συστατικό-σύνθετο, δηλ. ένα απλό θεώρημα είναι συστατικό σε ένα πιο σύνθετο θεώρημα. Σε σχέση με τις αρχές ο Ευκλείδης δίνει 3 κατηγορίες: α) τους ορισμούς όπου τίθενται η σημασία των όρων, β) τις κοινές έννοιες (αξιώματα) που ξεκαθαρίζουν τις χρήσεις της ισότητας και της ανισότητας, γ) τα αιτήματα, πέντε στον αριθμό, τα τρία πρώτα μειώνουν τον αριθμό των αποδεκτών κατασκευών στην επίπεδη γεωμετρία, καθώς και των αντικειμένων που μελετούνται, πρόκειται για μια γεωμετρία του κανόνα και του διαβήτη, στοιχειώδης σε σύγκριση με την ανώτερη γεωμετρία των κωνικών και άλλων καμπύλων. Από την μία μεριά η οροθεσία ενός τέτοιου πεδίου και από την άλλη η δυνατότητα μιας ανάλυσης της στοιχειώδους γεωμετρίας σε στοιχεία. Αυτά τα δύο δεδομένα προϋποθέτουν ότι την στιγμή που ο Ευκλείδης έγραφε την πραγματεία του (και σίγουρα πολύ πιο πριν) είχαμε ήδη μια συσσώρευση αποτελεσμάτων, προβλημάτων και μεθόδων, μια συσσώρευση η οποία είχε παρακινήσει μια ταξινόμηση. Ένα μέρος από τα χαρακτηριστικά μορφής και περιεχομένου-ιδιαίτερα η αποδεικτική μορφή και η συνθετική έκθεση- βρίσκεται και σε άλλα κλασικά κείμενα γεωμετρίας (Αρχιμήδης, Απολλώνιος, Πάππος κτλ.). Άλλα δύο γεγονότα κάνουν παράδοξο το έργο του Ευκλείδη:

1. Αποτελεί το πιο παλιό έργο γεωμετρίας και αριθμητικής που διατηρήθηκε ολόκληρο.
2. Ο συγγραφέας απαγορεύει στον εαυτό του να προϋποθέσει κάποια πρωθύστερη γεωμετρική γνώση. Επίσης τα αποτελέσματα είναι θεμελιώδη, και δίνουν τα στοιχεία της βάσης της γεωμετρικής κατασκευής. Αποτέλεσμα, το παιχνίδι των συμπερασματικών σχέσεων λαμβάνει χώρα σε κλειστό κύκλο, διαφοροποιημένο από άλλες μαθηματικές πραγματείες οι οποίες προϋποθέτουν πρωθύστερες γνώσεις.

Τα *Στοιχεία* είχαν λοιπόν δύο καριέρες, πρώτον μιας μονογραφίας γεωμετρίας και αριθμητικής, των οποίων η γνώση ήταν σημαντική για την εκμάθηση των μαθηματικών. Η δεύτερη καριέρα, ένα μοντέλο θεωρητικής σκέψης.
Τα βιβλία 1-4 εισάγουν το θεμελιώδες αντικείμενο της ευκλείδειας γεωμετρία, το γεωμετρικό σχήμα (ορισμός Ι,14) επίπεδο ή στερεό και τα συστατικά στοιχεία της (σημείο, ευθεία, επιφάνεια, γωνία). Το αντικείμενο της γεωμετρίας είναι το σχήμα, οι σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, και όχι ο χώρος και οι μετατροπές του. Όπως αυτό αναλύεται στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, ένα σχήμα στην γεωμετρία έχει 3 χαρακτηριστικά
- την θέση του, κατέχει έναν τόπο
- την μορφή του (να είναι τριγωνικό, κυκλικό) απ' όπου πηγάζουν και τα κανονικά σχήματα και η σημασία της σχέσης ομοιότητας
- το μέγεθος του, διότι για μια δεδομένη μορφή, μπορεί να είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο, ίσο με ένα άλλο σε μια συγκεκριμένη αναλογία (διπλό, τριπλό, μισό)

Προτεραιότητα δίνεται στα απλούστερα από τα σχήματα, τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα στα βιβλία 1 και 2, τον κύκλο και κάποια κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κάποιον κύκλο (ή περιγγεγραμμένα) στα βιβλία 3 και 4. Εκτός από την κατασκευή αυτών των σχημάτων, τα σημαντικότερα προβλήματα είναι κάποιες άλλες γεωμετρικές δράσεις : διχοτομία μιας ευθείας, μιας γωνίας, χάραξη μιας παραλλήλου, προβλήματα θέσης (τομή, επαφή ενός κύκλου με μια ευθεία ή έναν άλλο κύκλο κτλ).

Στην συνέχεια θα παρακολουθήσουμε την συνθετική έκθεση και την παραγωγική μορφή. Θα δούμε ότι μια γεωμετρική πρόταση αποτελείται από ένα κείμενο και ένα διάγραμμα με γράμματα, σε στενή σχέση μεταξύ τους. Και τα δύο είναι αναγκαία για την πραγματοποίηση της απόδειξης. Τα γράμματα είναι το μοναδικό κομμάτι του μαθηματικού λόγου που δεν ανήκουν στην φυσική γλώσσα. Ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί σύμβολα. Αντίθετα ο λόγος του χρησιμοποιεί ένα μικρό κομμάτι της ελληνικής γλώσσας και κάνει χρήση κάποιων στερεότυπων φράσεων. Συντρέχει σε διαφορετικές μορφές σύντμησης (συντόμευσης) και αποτελούν ακόμη ένα δείγμα των μέσων που βρίσκουμε διάσπαρτα στο γενικό επίπεδο του έργου.

Το συμπέρασμα του πρώτου βιβλίου είναι ένα χαρακτηριστικό του ορθογωνίου τριγώνου. Αποτελεί ένα αποτέλεσμα σημαντικό που συνδέει την ύπαρξη μιας ορθής γωνίας σ' ένα τρίγωνο και μια μετρική ιδιότητα των πλευρών του τριγώνου. Η ορθότητα μπορεί να μεταφερθεί σε μια σχέση που υπάρχει, όχι μεταξύ των πλευρών αλλά μεταξύ των τετραγώνων που σχεδιάζονται σ' αυτές τις πλευρές.

Η πρόταση Ι,47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) εγγράφεται στην προβληματική των *Στοιχείων*, η απόδειξη αποφεύγει κάθε χρήση της θεωρίας των αναλογιών, επιλογή του Ευκλείδη, σύμφωνα με τον Πρόκλο.

Ο κινητήριος ρόλος του σχήματος κρύβεται από την τοποθέτηση στην σκηνή της ρητορικής της ευκλείδειας απόδειξης. Αυτή η τελετουργία αποτελείται από μια σειρά σταδίων πάντα ομοίων:

1. Η Πρόταση (εκφώνηση), εκφωνείται η πρόταση προς απόδειξη ή η κατασκευή που πρέπει να γίνει.
2. Η Έκθεση, εισαγωγή ενός σχήματος με γράμματα που περιγράφουν τα διαφορετικά σημεία.
3. Ο Διορισμός, επαναλαμβάνουμε την εκφώνηση σε σχέση με το συγκεκριμένο σχήμα, π.χ. πρέπει να κατασκευάσουμε στην ευθεία ΑΒ …
4. Η Κατασκευή, προετοιμάζουμε το σχήμα με βοηθητικές κατασκευές.
5. Η Απόδειξη, συνάγουμε το αποτέλεσμα.
6. Το Συμπέρασμα, πρόκειται για επαναδιατύπωση της πρότασης ως αποτέλεσμα της απόδειξης, με όλη την δυνατή γενικότητα. Προσθέτουμε κάποιες ρητορικές εκφράσεις, όπερ έδει δείξαι για τα θεωρήματα, όπερ έδει ποιήσαι για τα προβλήματα κατασκευής.

Βρίσκουμε όλη την παραπάνω διαδικασία στο θεώρημα του Πυθαγόρα, αλλά το σημαντικό της απόδειξης στηρίζεται στον στοχασμό στο σχήμα, σύγκριση μηκών, γωνιών, επιφανειών …

Vat. gr. 190, vol. 1 fols. 38 verso - 39 recto, 9ος αιώνας

Το μάτι ενός καλού μαθητή θα παρατηρούσε πολλά μήκη, γωνίες, τρίγωνα και τετράπλευρα.

Πρόταση Ι,47. Πυθαγόρειο Θεώρημα

Εκφώνηση

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Έκθεση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ με ορθή γωνία την ΒΑΓ·

Διορισμός

λέγω, ότι το τετράγωνο το αναγραφόμενο από την ΒΓ, είναι ίσο προς τα τετράγωνα τα αναγραφόμενα από των ΒΑ, ΑΓ.

Κατασκευή

$Κ_1$. Διότι, ας αναγραφή στην ΒΓ το τετράγωνο ΒΔΕΓ, από τις ΒΑ, ΑΓ, τα ΗΒ, ΘΓ

$Κ_2$. και από το Α ας φέρουμε ΑΛ παράλληλη προς κάθε μια από τις ΒΔ, ΓΕ·

K_3. και ας φέρουμε τις ΑΔ, ΖΓ.

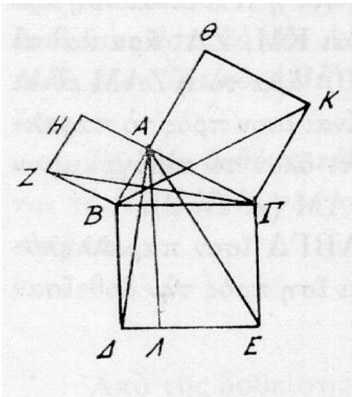
Απόδειξη

A_1. Και επειδή κάθε γωνία ΒΑΓ, ΒΑΗ είναι ορθή,

A_2. από την ευθεία ΒΑ και από το σημείο της Α φέρουμε δύο ευθείες τις ΑΓ, ΑΗ μη κείμεναι προς τα αυτά μέρη αυτής, οι οποίες σχηματίζουν τις εφεξής γωνίες ίσες με δύο ορθές·

A_3. άρα οι ΓΑ, ΑΗ βρίσκονται στην ευθεία.

A_4. Για τον ίδιο λόγο βρίσκονται στην ευθεία οι ΒΑ, ΑΘ.



A_5. Και επειδή η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με την ΖΒΑ· διότι κάθε μία είναι ορθή

A_6. ας προσθέσουμε σε κάθε μια την κοινή ΑΒΓ· άρα όλη η ΔΒΑ είναι ίση με όλη την ΖΒΓ.

A_7. Και επειδή η ΔΒ είναι ίση με την ΒΓ, η ΖΒ με την ΒΑ, οι δύο πλευρές ΔΒ, ΒΑ είναι ίσες αντίστοιχα με τις ΖΒ, ΒΓ·

A_8. και η γωνία ΔΒΑ είναι ίση με την ΖΒΓ·

A_9. άρα η βάση ΑΔ είναι ίση με την βάση ΖΓ, και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ίσο με το τρίγωνο ΖΒΓ·

A_{10}. και είναι το παραλληλόγραμμο ΒΛ διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΔ ·

A_{11}. γιατί έχουν την ίδια βάση ΒΔ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΒΔ, ΑΛ·

A_{12}. το τετράγωνο ΗΒ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΖΒΓ·

A_{13}. γιατί έχουν βάση την ΖΒ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΖΒ, ΗΓ

A_{14}. (τα διπλάσια των ίσων είναι μεταξύ τους ίσα) ·

A_{15}. άρα το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΗΒ.

A_{16}. Όμοια θ' αποδειχθεί, αν αχθούν οι ΑΕ, ΒΚ, ότι το παραλληλόγραμμο ΓΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΘΓ·

A_{17}. άρα όλο το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι ίσο με τα δύο τετράγωνα ΗΒ, ΘΓ.

A_{18}. Και το ΒΔΕΓ τετράγωνο έχει αναγραφή στην ΒΓ, τα ΗΒ, ΘΓ στις ΒΑ, ΑΓ.

Ειδικό συμπέρασμα

Άρα το τετράγωνο το αναγραφόμενο στην ΒΓ είναι ίσο με τα τετράγωνα τα αναγραφόμενα στις πλευρές ΒΑ, ΑΓ.

Γενικό Συμπέρασμα

Στα ορθογώνια άρα τρίγωνα το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών οι οποίες περιέχουν την ορθή γωνία· όπερ έδει δείξαι.

Για να διευκολύνουμε την μελέτη και τον σχολιασμό, προσθέσαμε στο κείμενο του Ευκλείδη μια σειρά από σημεία αναφοράς. Τίποτα τέτοιο δεν εμφανίζεται στο αρχαίο κείμενο, ούτε βέβαια οι αριθμοί των προηγούμενων προτάσεων που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια των αποδείξεων τις οποίες οι σύγχρονοι έχουν συνηθίσει να τις εμφανίζουν συνήθως μέσα σε παρενθέσεις. Αυτά όλα είναι σύγχρονες προσθήκες. Συνεπώς, μια απόδειξη με τον «αρχαίο» τρόπο, είναι μια άσκηση μνήμης αλλά και μια λογική επιχείρηση. Για να βοηθηθεί ο μελετητής πολλές σημειώσεις προστέθηκαν στο πέρασμα του χρόνου στα κενά των ελληνικών χειρογράφων. Ορισμένες έγιναν τμήματα (μη γνήσια) του κειμένου κατά τις επαναλαμβανόμενες αντιγραφές. Σ' αυτό το παράδειγμα μας ενδιαφέρει το ευκλείδειο ύφος. Ιδανικά, μια ευκλείδεια πρόταση διαιρείται σε μέρη συστατικά που έχουν δεχθεί έναν χαρακτηρισμό κανονικό, χωρίς αμφιβολία από τους σχολιαστές. Πρόκειται για την εκφώνηση, την έκθεση, τον διορισμό, την κατασκευή, την απόδειξη, το ειδικό συμπέρασμα και το γενικό συμπέρασμα. Αυτά τα μέρη περιλαμβάνουν δυο επίπεδα λόγου, το ένα γενικό, είναι αυτό της έκθεσης και του γενικού συμπεράσματος, το άλλο παραπέμπει στο διάγραμμα και στην χρήση γραμμάτων. Προσδιορίζει μια εξήγηση με ένα παράδειγμα, η απόδειξη θα εκτελεστεί σ' ένα συγκεκριμένο παράδειγμα στον διορισμό της (που παρουσιάζεται στην έκθεση) αλλά γενικό. Έτσι υπάρχει ένα πέρασμα από το γενικό στο ειδικό και ξανά στο γενικό από την εκφώνηση στο συμπέρασμα, το οποίο σύμφωνα με τον Πρόκλο μεταφράζει την γενική αξία της απόδειξης. Στην πράξη, όπως το συμπέρασμα είναι ακριβώς όμοιο με την εκφώνηση προσθέτοντας μόνον το «Λοιπόν», τα χειρόγραφα περιλαμβάνουν συχνά αυτό το συμπέρασμα ή το εκφράζουν σύντομα σημειώνοντας μόνον τις δύο ή τρεις πρώτες λέξεις (Λοιπόν, στα ορθογώνια τρίγωνα κλπ.) και αυτό για να γίνει η σχετική οικονομία στην πολύτιμη περγαμηνή. Ο διορισμός μοντελοποιεί δηλ. εκφράζει ξανά αυτό που είναι απαιτούμενο και αναγκαίο να αποδειχθεί ή να γίνει- αλλά με τους όρους του παραδείγματος. Η κατασκευή εισάγει τα απαραίτητα στοιχεία τα οποία δεν αποτελούσαν μέρος των αρχικών δεδομένων. Κάθε προτεινόμενο στάδιο είναι τέλεια δικαιολογημένο

Ας περάσουμε λοιπόν τώρα να σχολιάσουμε τα παραπάνω τμήματα της απόδειξης.

K_1 Πώς να σχεδιάσει ένα τετράγωνο σε μια δεδομένη ευθεία εκτίθεται από τον Ευκλείδη στην προηγούμενη πρόταση,

K_2 η χάραξη μιας παραλλήλου επεξηγήθηκε στην πρόταση Ι, 31 και τέλος

K_3 η σύνδεση δύο σημείων από μια ευθεία επιτρέπεται από το πρώτο αίτημα.

Σημειώνουμε ότι το τετράγωνο στην ΒΓ σχεδιάζεται από τις τέσσερις κορυφές του ενώ αυτά των ΑΒ, ΑΓ σχεδιάζονται μόνον από τα άκρα μιας διαγωνίου. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί πολύ συχνά αυτή την συντόμευση για να ονομάσει τα παραλληλόγραμμά του.

Η απόδειξη ξεκινάει στο διάγραμμα στο οποίο έχουν ήδη εμφανιστεί όλα τα απαραίτητα στοιχεία. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει κατασκευή ή τα μέρη κατασκευή και απόδειξη αλληλεπιδρούν, αν πρέπει να προστεθούν διάφορα γεωμετρικά στοιχεία κατά την διάρκεια των αποδεδειγμένων κομματιών.

Το πρώτο μέρος $Α_1$-$Α_3$ προσδιορίζει ότι ΓΑ, ΑΗ αποτελούν μια μόνον ευθεία, ξεκινάει από την υπόθεση και αναφέρεται έμμεσα σε μια ιδιότητα των τετραγώνων (οι γωνίες τους είναι ορθές Ορισμός I, 22). $Α_2$ είναι μια ενδιαφέρουσα επαναδιατύπωση διότι βοηθά στο να επαναφέρει στην μνήμη του μελετητή το αποτέλεσμα της πρότασης I, 14 αναπαράγοντας μερικώς την δομή της εκφώνησης της και όχι όπως το κάνουμε παραθέτοντας τον αριθμό, όχι επίσης σημειώνοντας λέξη προς λέξη, όπως γίνεται παρακάτω στην φάση $Α_{14}$ για την κοινή αρχή 5.

Το γεγονός ότι το μερικό αποτέλεσμα $Α_3$ ισχύει επίσης για ΒΑ, ΑΘ, η $Α_4$ δεν παρουσιάζεται λεπτομερειακά. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί μια από τις συνήθεις συντομευτικές μεθόδους, την αναλογική απόδειξη «για τους ίδιους λόγους ...». Ο μελετητής μπορεί να αναρωτηθεί για ποιο λόγο έγιναν αυτές οι δύο ευθυγραμμίσεις αλλά καμία εξήγηση δεν του δίνεται, ο λόγος εμφανίζεται παραπέρα $Α_{11}$, $Α_{13}$.

Το δεύτερο μέρος του επιχειρήματος $Α_{5\text{-}9}$ αποδεικνύει ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΖΒΓ είναι ίσα, δηλ. ίσα με την μέθοδο της επίθεσης αλλά ο Ευκλείδης λέει απλά ίσα. Κάνοντας το ίδιο παρακάτω για το τετράγωνο ΒΗ και το ορθογώνιο ΒΛ και φαίνεται ξεκάθαρα ότι πρόκειται για ισοδυναμία σε επιφάνεια. Ο συγγραφέας των *Στοιχείων* δείχνει ότι τα δύο τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση με μία γωνία ($Α_{5\text{-}6}$) και οι πλευρές που τις περιβάλλουν ίσες μια προς μια ($Α_{7\text{-}8}$). Σύμφωνα με την πρόταση I,4 της οποίας η λογοτεχνική δομή εμφανίζεται στα $Α_{7\text{-}8}$, οι βάσεις είναι ίσες και τα τρίγωνα ίσα $Α_9$. Ο μελετητής επαληθεύει ότι η ισότητα των γωνιών ($Α_{5\text{-}6}$) δεν αποτελεί αποτέλεσμα οπτικής παρατήρησης, γίνεται δεκτό με μια επιστροφή στο τέταρτο αίτημα που θέτει την ισότητα όλων των ορθών γωνιών $Α_5$ και από την χρήση της κοινής έννοιας 2 που δέχεται ότι η πρόσθεση είναι συμβατή με την ισότητα ($Α_6$).

Ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι τα δύο ίσα τρίγωνα είναι τα μισά των δύο τετραπλεύρων, το ένα του ορθογωνίου ΒΛ και το άλλο του τετραγώνου ΒΗ ($Α_{10\text{-}13}$). Προφανώς, ΒΗ και ΒΛ θα είναι ίσες ($Α_{15}$). Πιλοτάροντας ως τυφλοί μέχρι εδώ στην συνθετική έκθεση του Ευκλείδη, μπορούμε τώρα να καταλάβουμε πως λειτουργεί η απόδειξη. Το τετράγωνο ΒΓΕΔ κόβεται από την ευθεία ΑΛ στα δύο ορθογώνια ΒΛ, ΓΛ. Αποδεικνύουμε ότι είναι ίσα στα τετράγωνα που σχεδιάστηκαν στις πλευρές της ορθής γωνίας, ΒΛ στην ΒΗ, ΓΛ στην ΓΘ. Πράγματι, σε κάθε ζεύγος, τα τετράπλευρα είναι διπλάσια των ίσων τριγώνων ΑΒΔ, ΖΒΓ.

Για να δικαιολογήσει ότι το ορθογώνιο ΒΛ είναι το διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΔ (A_{10}), το κείμενο χρησιμοποιεί το γεγονός ότι τα δύο σχήματα έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων (A_{11}), αποτελεί μια έμμεση αναφορά στο αποτέλεσμα της πρότασης Ι,41 που αποδεικνύει ουσιαστικά αυτή την σχέση. Είναι επίσης για την εφαρμογή αυτού του αποτελέσματος που στο πρώτο μέρος επαλήθευσε τις ευθυγραμμίσεις. (ΖΒ, ΗΑ) ότι είναι παράλληλες διότι είναι οι πλευρές ενός τετραγώνου. Αλλά η κορυφή του τριγώνου Γ, δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος ΗΑ. Έτσι επαληθεύσαμε ότι ήταν στην προέκταση του ΑΓ.

Ο Ευκλείδης δεν αποδεικνύει την δεύτερη ισότητα ΓΛ=ΓΘ. Καταφεύγει σε μια συντόμευση «Ομοίως θα αποδειχθεί». Από εδώ και πέρα, έχει την ζητούμενη λύση, καταρχήν ειδική, και στην συνέχεια γενική, διότι από το τρίγωνο ΑΒΓ δεν χρησιμοποιήσαμε τίποτε άλλο από την ορθότητα. Οι φάσεις A_{13-14} υπάρχουν για να βοηθήσουν την μνήμη του μελετητή, ο οποίος θα πρέπει να θυμάται ότι τέθηκε αξιωματικά και ότι αποδείχτηκε προηγούμενα. Υπάρχουν φυσικά πολλοί άλλοι τρόποι να αποδείξουμε το θεώρημα της υποτείνουσας, αλλά όπως προσπαθήσαμε να δείξουμε, κάθε γραμματικό τμήμα της απόδειξης είναι επαληθευμένο ή επαληθεύσιμο, με την βοήθεια αρχών ή προηγούμενων αποτελεσμάτων της πραγματείας. Άμεσα ή έμμεσα η Ι 47, προϋποθέτει τουλάχιστον α) τους ορισμούς 10, 15, 22, 23, β) τα πέντε αιτήματα, γ) τις κοινές έννοιες 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, δ) τις προτάσεις Ι, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 41, 46, δηλ. περισσότερο από το μισό βιβλίο. Αυτή η ανάλυση αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα του τυποποιημένου ύφους, αρχιτεκτονικού και αποδεικτικού των *Στοιχείων*.

Βιβλιογραφια

Ε. Σταμάτη, *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, Βιβλία 1, 2, 3, 4,* Τόμος Ι, Αθήνα, ΟΕΔΒ, 1975.

B. Vitrac, *Euclide, Les Elements, Vol. 1*, Livres I-IV, Paris, PUF, 1990.

B. Vitrac, Trois exemples de démonstrations, *Les Cahiers de Science & Vie*, No 55, Fevrier 2000.

Gillispie (Charles) ed., *Dictionary of Scientific Biography*, 16 vol., New-York, Scribner's & sons, 1970-1980.

W. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Synthese Historical Library 15, Dordrecht/Boston, Reidel Pub. Co, 1975.

P. Tannery, La Géomètrie grecque, Paris, Gauthier-Villars, 1887, réimpr. Gabay, 1988.

Th. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1921 :

I. *From Thales to Euclid* ; II. *From Aristarchus to Diophantus* (réimpr. New-York, Dorer Pub., 1960).

I. Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.)/London, MIT Pr., 1981.

Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά: από τη σκοπιά της λογικής

Κώστας Χατζηκυριάκου

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής ΕκπαίδευσηςΠανεπιστημίου Θεσσαλίας

1. Το επιχείρημα και η απόδειξη.

Τα μαθηματικά είναι συλλογή *αποδείξεων*, γράφει ο μαθηματικός Gaizi Takeuti, στον πρόλογο του βιβλίου του *Proof Theory*[1]. Αποφεύγοντας αυτόν και άλλους ουσιοκρατικούς ορισμούς που έχουν πολλές φορές δοθεί για τα μαθηματικά, ας συμφωνήσουμε ότι τα μαθηματικά είναι μια ορισμένη *πειθαρχία* (*discipline*), ένας επιστημονικός γνωστικός κλάδος, και επομένως «ένας τομέας αντικειμένων, ένα σύνολο μεθόδων, ένα σώμα προτάσεων που λαμβάνονται ως αληθείς, ένα σύνολο κανόνων και ορισμών, τεχνικών και εργαλείων»[2].

Επομένως θα λέγαμε ότι, στις συνθήκες εκπαίδευσης που έχουν διαμορφωθεί σήμερα, τα σχολικά μαθηματικά είναι εκείνο το μέρος της πειθαρχίας που αφορά τη μάθηση και τη διδασκαλία των βασικών γνώσεων και πρακτικών της πειθαρχίας στην τρέχουσα μορφή της.

Είναι προφανές ότι τόσο τα αντικείμενα όσο και οι ορισμοί, οι μέθοδοι, οι κανόνες, τα εργαλεία της πειθαρχίας συγκροτούνται ιστορικά[3]. Αντίστοιχα στα σχολικά μαθηματικά κάθε εποχής αντανακλώνται γνώσεις και πρακτικές, προτεραιότητες και ενδιαφέροντα τόσο της

---

[1] Gaizi Takeuti, *Proof Theory*, North Holland, σ. 1.

[2] Μισέλ Φουκώ, *Η τάξη του Λόγου*, Ηριδανός, σ. 22-23.

[3] Λόγου χάρη, η έννοια της πιθανότητας δεν είναι αντικείμενο των μαθηματικών στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά· σε αντιδιαστολή κάποιες από τις έννοιες που υπάρχουν στην *Αριθμητική Εισαγωγή* του Νικόμαχου του Γερασηνού (1ος-2ος μ.Χ. αιώνας) μόνον οριακά είναι σήμερα αντικείμενο των μαθηματικών. Εξάλλου οι αρχαίοι έλληνες δεν γνώριζαν τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, οι μαθηματικοί του δέκατου ένατου αιώνα δεν εφάρμοζαν τις αρχές επιλογής ή μεγίστου που χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα (αξίωμα της επιλογής, λήμμα του Zorn, υπερπεπεραμένη επαγωγή κ.α.), τα μαθηματικά ως τα τέλη περίπου του 19ου αιώνα είναι «κατασκευαστικά» κ.λπ.

ίδιας της πειθαρχίας όσο και άλλων πειθαρχιών και της κοινωνίας ευρύτερα.

Σύμφωνα με την κλασική λογική, επιχείρημα είναι «μια σειρά αλληλένδετων κρίσεων-προτάσεων που σχηματίζεται για να κάνει φανερή (να «αποδείξει») την αλήθεια μιας απόφανσης»[4], ενώ «διαλογισμός είναι η διαδικασία, η μέθοδος με την οποία ο νους καταστρώνει ένα επιχείρημα»[5]. Η απόφανση στην οποία καταλήγει ένας διαλογισμός είναι το *συμπέρασμα* και οι προτάσεις στις οποίες αυτό στηρίζεται είναι οι *προκείμενες* του επιχειρήματος. *Έγκυρα* λέγονται τα επιχειρήματα που όταν αληθεύουν οι προκείμενες τους, τότε αναγκαστικά αληθεύει και το συμπέρασμά τους, δηλαδή εκείνα στα οποία το συμπέρασμα *έπεται λογικά* από τις προκείμενες. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι προκείμενες να συνδέονται χωρίς λογικά χάσματα, να βρίσκονται σε λογική ακολουθία, να έχουν, όπως λέμε, *λογικό ειρμό*[6].

Παραδείγματος χάρη, ένα από τα παλαιότερα κωδικοποιημένα έγκυρα επιχειρήματα είναι ο λογικός κανόνας του *modus ponens*: Η πρόταση ψ έπεται λογικά από τις δύο προκείμενες προτάσεις: φ, *εάν* φ *τότε* ψ. Η υποθετική πρόταση *εάν* φ *τότε* ψ θεωρείται ότι είναι ψευδής μόνον εφόσον η φ αληθεύει και η ψ όχι (*υλική συνεπαγωγή*).

Στα μαθηματικά λέγοντας απόδειξη εννοούμε ένα *έγκυρο επιχείρημα* που διατυπώνουμε για να κάνουμε φανερή την ορθότητα ενός ισχυρισμού -αναφορικά με κάποια μαθηματικά αντικείμενα ή ιδιότητες- στον εαυτό μας ή στους συνομιλητές μας[7]. Τελικά, επομένως, η μαθηματική απόδειξη είναι μια ακολουθία μαθηματικών προτάσεων που καθεμία τους ή ανήκει στο σώμα των αληθών

---

[4] Παπανούτσος, *Λογική*, εκδ. Δωδώνη, σ. 121.

[5] Ibid, σ. 121.

[6] Ο Αριστοτέλης ήδη ορίζει τον [έγκυρο] *συλλογισμό*, (την ιδιαίτερη μορφή επιχειρήματος που αυτός μελέτησε) ως τον «λόγο στον οποίον όταν γίνουν αποδεκτά ορισμένα πράγματα, κάτι το διαφορετικό από τα αποδεκτά προκύπτει ως συμπέρασμα αναγκαστικά, επειδή αυτά είναι αυτά που είναι, χωρίς δηλαδή να απαιτείται κανείς επιπρόσθετος εξωτερικός όρος για να προκύψει το αναγκαίο συμπέρασμα» (*Αναλυτικά Πρότερα* 24b 18-2, μετ. Η. Νικολούδη, προσαρμοσμένη).

[7] Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη απόδειξη είναι ένας επιστημονικός συλλογισμός και επομένως ένας συλλογισμός που οι προκείμενές του είναι αληθείς, πρώτες, πιο κατανοητές από το συμπέρασμα και είναι αίτια του (*Αναλυτικά Ύστερα* 71b 19-24). Για λεπτομερή ανάλυση των εννοιών του συλλογισμού και της απόδειξης στον Αριστοτέλη, βλ. το W.D. Ross, *Αριστοτέλης*, εκδ. Μ.Ι.Ε.Τ.

προτάσεων της πειθαρχίας ή έπεται λογικά από κάποιες από αυτές. Οι μαθηματικοί ισχυρισμοί που συνοδεύονται από αποδείξεις είναι τα λεγόμενα (μαθηματικά) *θεωρήματα*.

Το επιχείρημα και η απόδειξη είναι βασικά νοητικά εργαλεία της πειθαρχίας των μαθηματικών από τις απαρχές της συγκρότησής της έως τις μέρες μας. Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ένα από τα ιδρυτικά κείμενα της πειθαρχίας όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, αλλά και ένα διδακτικό εγχειρίδιο, είναι πράγματι μια συλλογή αποδείξεων, είτε θεωρήσουμε ότι το έργο αυτό είναι όντως μια «αξιωματική προσέγγιση» στα στοιχειώδη μαθηματικά, είτε ότι είναι μια αιτιολογημένη – σύμφωνα με τους κανόνες της τότε εποχής- συλλογή στοιχειωδών κατασκευών[8].

Όσοι δραστηριοποιούνται στα μαθηματικά επινοούν, αποδεικνύουν ή και μόνο διδάσκουν και μαθαίνουν θεωρήματα και αποδείξεις θεωρημάτων· οι μαθηματικές θεωρίες, όπως αναπτύσσονται στα μαθηματικά χειρόγραφα ή τα βιβλία των μαθηματικών, και οι μαθηματικές γνώσεις, όπως μεταδίδονται από γενιά σε γενιά στις σχολικές τάξεις και τα σεμινάρια, απαρτίζονται από θεωρήματα και τις αποδείξεις τους.

Πάνω στην ικανότητα να παράγει η νέα μαθηματικός αποδείξεις θεωρημάτων (και όχι απλά μαθηματικές ιδέες) βασίζεται η εισαγωγή της ή μη στην κοινότητα των μαθηματικών καθώς και η θέση της σε αυτήν όταν γίνει δεκτή. Όπως συμβαίνει σε όλες τις κοινότητες γνώσης έτσι και στα μαθηματικά οι *ισχυρισμοί αληθείας* -που από ένα σημείο και πέρα είναι πολύπλοκοι- διαμεσολαβούνται από ειδικούς. Ωστόσο, το «συμβολικό κεφάλαιο» -για να δανειστούμε τον όρο που επινόησε ο P. Bourdieu- των ειδικών στα μαθηματικά, ό,τι δηλαδή τελικά τους κάνει συνομιλητές στο πλαίσιο της κοινότητας και ό,τι κάνει αποδεκτή

[8] Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη είναι δομημένα πάνω στην αριστοτελική αντίληψη για την απόδειξη, αν και η «λογική» που διέπει τα *Στοιχεία* δεν είναι *συλλογιστική*, αλλά βρίσκεται κοντίτερα στη λεγόμενη *προτασιακή λογική* που αναπτύσσεται από τους Στωικούς, (βλ. Ross, *Αριστοτέλης* και Clark Glymour, *Thinking Things Through*, The MIT Press, σ. 52-6). Από την άλλη όλα τα παραδείγματα στο πρώτο βιβλίο των *Αναλυτικών Ύστερων* προέρχονται από τα μαθηματικά. Η σχέση των μαθηματικών με το *όργανον* (και μετέπειτα γνωστικό κλάδο) της λογικής είναι εξαρχής στενή, κατά καιρούς λιγότερο ή περισσότερο γόνιμη, ορισμένες φορές ανταγωνιστική και σχεδόν πάντα περίπλοκη. Η περιπλοκότητα αυτή χάνεται πολλές φορές στην αποσπασματική παράθεση απόψεων για τη σχέση των δύο κλάδων που μπορεί να γίνουν κατανοητές μόνον στο πλαίσιο της ιστορίας αυτής της σχέσης.

την κρίση τους για την ορθότητα των μαθηματικών ισχυρισμών άλλων (συναδέλφων, αρχάριων μαθητών ή μαθητευόμενων επαγγελματιών), οφείλεται ακριβώς στην τεκμηριωμένη ικανότητά τους να παράγουν θεωρήματα[9].

Στα θεωρήματα και τις αποδείξεις τους φωλιάζουν οι μαθηματικές ιδέες. Τι είναι η έννοια του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών χωρίς την απόδειξη ότι ο λεγόμενος αλγόριθμος του Ευκλείδη τον παράγει; Τι είναι η έννοια της παραγώγου, χωρίς τα θεωρήματα για τη χρήση της; Τι είναι η διχοτόμος χωρίς την απόδειξη ότι είναι και ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας; Οι μαθηματικοί είτε πιστεύουν ότι περιγράφουν ένα προϋπάρχον ιδεατό τοπίο είτε ότι το δημιουργούν μέσω των τεχνικών, των μεθόδων, ή και των αποκλεισμών της πειθαρχίας τους, αφηγούνται με αποδείξεις στους εαυτούς τους και τους άλλους τι είδαν, τι και πώς το κατασκεύασαν, τι συνέλαβαν.

Οι αποδείξεις επινοούνται καθώς η μαθηματικός πασχίζει να αποκτήσει την απόλυτη βεβαιότητα ότι η πρόταση που εκφράζει τη μαθηματική της ιδέα είναι λογικό επακόλουθο των αληθών προτάσεων της πειθαρχίας. Οι λεγόμενες «τρύπες» στην απόδειξη είναι τελικά λογικά χάσματα: Κάποιο αντικείμενο δεν ανήκει στην έκταση κάποιας έννοιας και επομένως λανθασμένα του αποδίδεται μια ιδιότητα που δεν έχει. Έτσι όμως δεν πληρούται η υπόθεση κάποιου υποθετικού λόγου και επομένως η απόδοσή του δεν είναι αναγκαία. Κάποια συνθήκη είναι αναγκαία και όχι ικανή, κάποια συνθήκη είναι ικανή και όχι αναγκαία κ.ο.κ.

2. Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά.

Η σημασία του επιχειρήματος και της απόδειξης αναγνωρίζεται από όλα τα αναλυτικά προγράμματα και μεγάλο μέρος της εκπαιδευτικής έρευνας σήμερα αφορά την ιδιάζουσα αυτή μαθηματική πρακτική - ανάλογη για ορισμένους με το πείραμα των φυσικών επιστημών, που αντιστοιχεί στον επαγωγικό χαρακτήρα τους-η οποία φαίνεται να

[9] Ο ιδιοφυής Ramanuyan, που «έβλεπε» με απίστευτες λεπτομέρειες «τοπία του μαθηματικού σύμπαντος», ουδέποτε απετέλεσε πλήρες μέλος της μαθηματικής κοινότητας ακριβώς επειδή στερούνταν της ικανότητας να τεκμηριώνει τις ενοράσεις του μέσω των αποδεκτών τεχνικών της κοινότητας.

δημιουργεί πολλά προβλήματα-τόσο κατανόησης όσο και πρακτικής - στους μαθητές και τις μαθήτριες[10].

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα μαθηματικής επιχειρηματολογίας στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών:

Ας ξεκινήσουμε από το γνωστό πρόβλημα των εργατών, «Όταν ο εργάτης Α εργάζεται μόνος του, τελειώνει έναν έργο Ε σε 3 ημέρες ενώ όταν ο εργάτης Β εργάζεται μόνος του, τελειώνει το ίδιο έργο Ε σε 6 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα το τελειώσουν αν εργαστούν μαζί και εργάζεται καθένας όπως πριν (δεν πιάνουν φερ' ειπείν κουβέντα ούτε συνερίζεται ο ένας τον άλλον κ.λπ)»;

Πώς λύνουμε το πρόβλημα αυτό; Να ένας τρόπος:

Γνωρίζουμε ότι ο εργάτης Α τελειώνει μόνος του το έργο Ε σε 3 ημέρες *και* ότι ο εργάτης Β το τελειώνει μόνος του σε 6 ημέρες. Άρα ο εργάτης Α σε μία ημέρα τελειώνει το 1/3 του έργου (ορισμός της κλασματικής μονάδας). Αντίστοιχα, ο εργάτης Β σε μία ημέρα τελειώνει το 1/6 του έργου (ορισμός της κλασματικής μονάδας).

Επομένως *μαζί* τελειώνουν σε μία ημέρα το 1/3 + 1/6 = 9/18 = 1/2 του έργου (*σύζευξη* των «πληροφοριών» -των νοητικών περιεχομένων- που μας δίνει η κάθε μία από τις προηγούμενες αποφάνσεις σε μία πρόταση και ορισμός της πρόσθεσης κλασμάτων). Επακόλουθα σύμφωνα με τον ορισμό της διαίρεσης κλασματικών αριθμών, απαιτούνται 1: 1/2 = 2 ημέρες για να τελειώσουν το έργο όταν εργάζονται μαζί.

Άρα, *εάν* ο εργάτης Α τελειώνει το έργο Ε σε 3 ημέρες *και* ο εργάτης Β τελειώνει το ίδιο έργο σε 6 ημέρες, *τότε* όταν οι δύο εργάτες εργάζονται μαζί το τελειώνουν σε 2 ημέρες.

Διακρίνουμε ήδη εδώ την ανάπτυξη ενός έγκυρου επιχειρήματος και τον λογικό ειρμό του που μάλιστα μπορούμε να τον εντοπίσουμε – έστω και κάπως σχολαστικά, λόγω της απλότητας του παραδείγματος- στην ανάλυση μιας *συζευκτικής* πρότασης στις δύο συνιστώσες της και

---

[10] Βλ. λόγου χάρη το *Educational Studies in Mathematics*, n.4, v. 24, 1993, τεύχος που ήταν όλο αφιερωμένο σε πτυχές της απόδειξης, το Peter Galbraith, *Mathematics as Reasoning*, The Mathematics Teacher, σ. 412-417, n. 5, v. 88, το Gila Hanna & H. N. Janke, *On Proof and Proving* (κεφάλαιο 23, σ. 877-908 του *International Handbook of Mathematics Education,* 1996, ed. A.J. Bishop et als) και τις βιβλιογραφικές αναφορές τους.

στη *συζευκτική* και *υποθετική* σύνδεση προτάσεων που οδηγεί σε συνθετότερες προτάσεις οι οποίες μας αποκαλύπτουν στοιχεία που ήταν κρυμμένα -ούτως ειπείν- στα αρχικά δεδομένα του προβλήματος, αλλά έγιναν φανερά μόνον μέσω μιας *ορισμένης γλωσσικής χρήσης*. Χωρίς να μπούμε σε τεχνικές λεπτομέρειες, μπορούμε να πούμε ότι εδώ ακολουθήθηκαν τα εξής γλωσσο-λογικά σχήματα:

$$\frac{\varphi \textit{ και } \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \textit{ και } \psi}{\psi} \qquad \frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \textit{ και } \psi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\textit{Εάν } \varphi \textit{ τότε } \psi}$$

(Δηλαδή, από τη σύζευξη δύο προτάσεων *φ και ψ* συμπεράναμε καθεμία από αυτές, από τις προτάσεις φ και ψ συμπεράναμε τη σύζευξή τους *φ και ψ*, και καταλήγοντας με έγκυρη λογικομαθηματική επιχειρηματολογία από την πρόταση φ στην πρόταση ψ, θεωρήσαμε ότι έχουμε αποδείξει τη συνεπαγωγή *εάν φ τότε ψ*).

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα, από τη γεωμετρία τη φορά αυτή: «Σε κάθε τρίγωνο, η ευθεία που ορίζεται από τα μέσα δύο πλευρών είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά».

Εδώ ενδιαφερόμαστε να δείξουμε κάτι που ισχύει για *όλα* τα τρίγωνα, κάτι που φαινομενικά απαιτεί μιαν απεριόριστη μελέτη. Αντί γι' αυτό όμως σχεδιάζουμε στο χαρτί ένα *τυχόν* τρίγωνο ΑΒΓ και δείχνουμε ότι η ευθεία δια των Μ και Ν του συγκεκριμένου τριγώνου είναι όντως παράλληλη προς τη ΒΓ[11]. Πώς συνεχίζουμε;

Προεκτείνουμε, λόγου χάρη, τη ΜΝ πέρα από το Ν κατά τμήμα ΝΞ ίσο προς το ΜΝ και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΜΞΓΒ. Το γιατί το κάνουμε αυτό, «πώς το σκεφτόμαστε», είναι το επαναλαμβανόμενο ερώτημα αυτών που πρωτοέρχονται σε επαφή με τα μαθηματικά.

Γνωρίζουμε ότι *αν* δύο τρίγωνα έχουν από δύο πλευρές τους ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, *τότε* είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΝΞ έχουν τις πλευρές ΜΝ, ΑΝ και ΝΞ,ΝΓ αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες ΑΝΜ και ΓΝΞ ίσες, ως κατακορυφήν, άρα είναι

ίσα (*modus ponens*). Επομένως ΜΒ = ΑΜ = ΓΞ. Επίσης, γνωρίζουμε ότι *αν* δύο ευθείες τεμνόμνες από τρίτη, σχηματίζουν με αυτήν ίσες εντός εναλλάξ γωνίες *τότε* αυτές είναι παράλληλες. Οι γωνίες ΝΓΞ και ΑΝΜ είναι ίσες, άρα οι ευθείες δια των Α,Β και δια των Γ,Ξ αντίστοιχα είναι παράλληλες (*modus ponens*). Επομένως, το τετράπλευρο ΜΞΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, δηλαδή η ΜΝ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ.
Επομένως, έχουμε δείξει ότι σε *κάθε* τρίγωνο, *αν* Μ και Ν είναι τα μέσα δύο πλευρών του, *τότε* η ευθεία που ορίζεται από αυτά είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά.

Ξανά πλάι στις γνώσεις που προέρχονται από το τι είναι τα αντικείμενα που μελετούμε καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα κάνοντας ορισμένες γλωσσο-λογικές κινήσεις που είναι οι εξής:

$$\frac{\varphi \quad \textit{Εάν } \varphi \textit{ τότε } \psi}{\psi} \qquad \frac{\textit{Τυχόν x έχει την ιδιότητα Π}}{\textit{Όλα τα x έχουν την ιδιότητα Π}}$$

Να και ένα παράδειγμα από τη θεωρία αριθμών: «Αν μ, ν είναι φυσικοί πρώτοι μεταξύ τους, τότε είναι πρώτοι και το άθροισμα και το γινόμενό τους».
Έστω ότι το άθροισμα μ + ν και το γινόμενο μν (*τυχόντων* αριθμών μ, ν) δεν είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους. Τότε έχουν έναν πρώτο διαιρέτη p.
Γνωρίζουμε (αληθής πρόταση της πειθαρχίας) ότι *αν* πρώτος αριθμός διαιρεί το γινόμενο δύο ή περισσότερων άλλων, *τότε* διαιρεί έναν τουλάχιστον από αυτούς. Ο p, διαιρεί τον μν και είναι πρώτος, άρα διαιρεί τον μ ή τον ν.
Αν διαιρεί τον μ, *τότε* αφού διαιρεί τον μ+ν διαιρεί και τον ν, *άτοπο*.
Αν διαιρεί τον ν, *τότε* αφού διαιρεί τον μ+ν διαιρεί και τον μ, *άτοπο*.
Άρα οι μ+ν και μν είναι πρώτοι μεταξύ τους. Εδώ μεταξύ άλλων ακολουθήσαμε το σχήμα:

$$\frac{\varphi \text{ ή } \psi \qquad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \perp\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{\perp}$$

(Όπου $\perp$ είναι το σύμβολο της αντίφασης).

[11] Η δυσκολία που παρουσιάζει αυτό το βήμα έχει μελετηθεί στην εκπαιδευτική έρευνα, βλ., λόγου χάρη, το Daniel Chazan, *Empirical Evidence and Proof*, σ. 372-373, στο τεύχος του ESM που παρατίθεται παραπάνω.

Με άλλα λόγια, όταν εκθέτουν τη λύση ενός προβλήματος, τόσο το σχολιαρόπαιδο όσο και ο μαθηματικός διαλογίζονται, εκτελούν ένα «εμπρόθετο έργο»: εκφέρουν έναν λόγο που απαρτίζεται από προτάσεις με τις οποίες αποδίδονται ιδιότητες σε μαθηματικά αντικείμενα· αναλύουν συζεύξεις στις συνιστώσες τους ή σχηματίζουν συζεύξεις· σχηματίζουν υποθετικές προτάσεις κάνοντας προηγούμενες προτάσεις του διαλογισμού τους υποθέσεις· χρησιμοποιούν το επιχείρημα *modus ponens*, διακρίνουν περιπτώσεις, δηλαδή σχηματίζουν (εγκλειστικές) διαζευκτικές προτάσεις· καταλήγουν σε άτοπα και ανασκευάζουν· γενικεύουν ή εξειδικεύουν. Πολλές φορές προχωρούν από το συμπέρασμα στις προκείμενες, αλλά και αυτό γίνεται στο πλαίσιο γλωσσο-λογικών χρήσεων σαν τις παραπάνω. Διαλογιζόμενοι με τους παραπάνω τρόπους έχουν την αίσθηση ότι δεν λαθεύουν.

3. Η τυπική απόδειξη και η σημασία της.

Στις αρχές του εικοστού αιώνα η μαθηματική λογική, η οποία συγκροτήθηκε ως *πειθαρχία* μέσα από τις μεγάλες επιστημολογικές διαμάχες που ξέσπασαν όταν στα μαθηματικά εισήχθησαν για την απόδειξη θεωρημάτων νέα εργαλεία και έννοιες, μετέτρεψε σε μαθηματικό αντικείμενο την ίδια τη μαθηματική απόδειξη. Αποσαφήνισε έτσι την έννοια του *λογικού επακόλουθου* (σημασιολογική έννοια) και την έννοια της *τυπικής απόδειξης* (συντακτική έννοια) στο πλαίσιο μιας *γλώσσας*. Το 1928 μάλιστα ο μαθηματικός Kurt Gödel απέδειξε ότι στο πλαίσιο μιας *πρωτοβάθμιας γλώσσας* μια πρόταση είναι λογικό επακόλουθο ενός συνόλου προτάσεων αν και μόνον αν υπάρχει τυπική απόδειξή της από το σύνολο αυτό. Αυτό είναι το περίφημο *θεώρημα της πληρότητας* της πρωτοβάθμιας λογικής.

Για να κατανοήσουμε το επίτευγμα της μαθηματικής λογικής, ας δούμε εν συντομία έναν παράδειγμα, την πρωτοβάθμια αριθμητική του Peano.

Ξεκινούμε με τα σύμβολα + (σύμβολο για τη διμελή πράξη της πρόσθεσης φυσικών αριθμών), · (σύμβολο για τη διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών), s (σύμβολο για τη μονομελή πράξη του επόμενου), 0 (σύμβολο για τον πρώτο φυσικό αριθμό, τον

μηδέν). Έχουμε επίσης σύμβολο για τη διμελή σχέση της ισότητας φυσικών αριθμών = και σύμβολο για την αντίφαση $\perp$.
Οι όροι (τα ονόματα) της (πρωτοβάθμιας) γλώσσας είναι το σύμβολο 0, οι αριθμήσιμα άπειρες μεταβλητές, *x*, *y*, *z*, . . . και ακριβώς όλες οι εκφράσεις της γλώσσας που παράγονται μέσω του σχήματος: εάν *σ* και *τ* είναι όροι, τότε όροι είναι και τοι εκφράσεις $\sigma+\tau$, $\sigma\cdot\tau$, s*σ*. Παράδειγμα: (s0) + (ss0)·(ss0) (λέξη που ονοματίζει τον φυσικό αριθμό 5). (Οι παρανεθέσεις μπαίνουν για την ορθή ομαδοποίηση των συμβόλων και την ορθή ανάγνωση).
Οι τύποι της γλώσσας σχηματίζονται μόνο με τους ακόλουθους κανόνες: το σύμβολο $\perp$ είναι τύπος και εάν τ και σ είναι όροι, τότε σ = τ είναι τύπος. Εάν φ και x είναι τύποι τότε τύποι είναι και οι εκφράσεις $\varphi\wedge x$, $\varphi\vee x$, $\neg\varphi$, $\varphi\rightarrow x$, $\exists \mathrm{x}\varphi$, $\forall \mathrm{x}\varphi$, που αντίστοιχα συμβολίζουν τη *σύζευξη* των *φ* και *x*, την (εγκλειστική) *διάζευξη* των *φ* και *x*, την *άρνηση* του *φ*, τη *συνεπαγωγή εάν φ τότε x*, τη φράση *υπάρχει κάποιο αντικείμενο x με την ιδιότητα που περιγράφει ο φ*, και τη φράση *όλα τα έχουν την ιδιότητα που περιγράφει ο φ*. Χωρίς να μπούμε σε τεχνικές λεπτομέρειες με τον τρόπο αυτό μπορούμε να γράψουμε συμβολικά προτάσεις που αναφέρονται στην αριθμητική των φυσικών. Λόγου χάρη, τις

$$\forall \mathrm{x}\neg(0=\mathrm{sx}),\ \forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\mathrm{sx}=\mathrm{sy}\rightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}),$$

$$\forall \mathrm{x}(\mathrm{x}+0=\mathrm{x}),\ \forall \mathrm{x}(\mathrm{x}+\mathrm{sy}=\mathrm{s}(\mathrm{x}+\mathrm{y})),$$

$$\forall \mathrm{x}(\mathrm{x}\cdot 0=0),\ \forall \mathrm{x}(\mathrm{x}\cdot \mathrm{sy}=\mathrm{x}\cdot \mathrm{y}+\mathrm{y}),$$

$$\varphi(0)\ \wedge\ \forall \mathrm{x}(\varphi(x)\rightarrow\varphi(sx))\rightarrow\forall \mathrm{x}\varphi(x),\ \text{φ τύπος της γλώσσας.}$$

Το σύνολο των παραπάνω αριθμήσιμα άπειρων στο πλήθος προτάσεων PA αποτελούν την πρωτοβάθμια αξιωματικοποίηση της αριθμητικής των φυσικών αριθμών κατά Peano. Σε ένα πεδίο ερμηνείας η πρόταση $\varphi\wedge x$ αληθεύει όταν αληθεύουν τόσο η *φ* όσο και η *x*, η $\varphi\vee x$ αληθεύει όταν αληθεύει τουλάχιστον μία από τις *φ* και *x*, η $\neg\varphi$ αληθεύει όταν δεν αληθεύει η *φ*, η $\varphi\rightarrow x$ αληθεύει όταν δεν αληθεύει η *φ* ή αληθεύει η *x*, η $\exists \mathrm{x}\varphi$ αληθεύει εφόσον για κάποιο αντικείμενο του πεδίου ερμηνείας ισχύει όντως η ιδιότητα που περιγράφει ο *φ*, η $\forall \mathrm{x}\varphi$ όταν για όλα τα αντικείμενα του πεδίου ερμηνείας ισχύει η ιδιότητα που περιγράφει ο *φ*.

Λέμε ότι μια πρόταση φ της γλώσσας που ορίσαμε είναι *λογικό επακόλουθο* του PA αν και μόνον αν σε κάθε πεδίο ερμηνείας, όταν αληθεύουν οι προτάσεις του PA, αληθεύει και η φ. Γράφουμε $\mathrm{PA} \models \varphi$.
Για να μιλήσουμε τώρα για τυπικές αποδείξεις στο πλαίσιο της γλώσσας και του συνόλου αξιωμάτων που ορίσαμε πρέπει να εισαγάγουμε έναν *αποδεικτικό λογισμό* γι' αυτήν. Από τους πολλούς που υπάρχουν, ας δούμε σύντομα το αποδεικτικό σύστημα του *φυσικού συμπερασμού* (*natural deduction*) που πρότεινε ο Gentzen to 1932. Σε αντιδιαστολή με άλλα αξιωματικά συστήματα που βασίζονται σε λογικά αξιώματα και σε μόνον έναν αποδεικτικό κανόνα, τον αναπόδραστο κανόνα του *modus ponens*, αυτό έχει μόνον *κανόνες συμπερασμού* (*inference rules*) και όπως παρατηρεί ο van Dalen έχει το πλεονέκτημα να «είναι αρκετά κοντά στον όντως άτυπο συμπερασμό» και να «αποδίδει το διαισθητικό νόημα των [λογικών] συνδέσμων όσο πιο πιστά γίνεται»[12]. Στα παραδείγματα της §2 είδαμε την εφαρμογή ορισμένων από τους κανόνες του συστήματος. Χωρίς να μπούμε και πάλι σε πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, ιδού οι κανόνες του φυσικού συμπερασμού για τη σύζευξη, τη συνεπαγωγή, την αντίφαση και του καθολικού τύπου (τα άλλα είδη προτάσεων μπορεί να εκφραστούν μέσω της σύζευξης και της συνεπαγωγής και του καθολικού τύπου).

$$\frac{\varphi \qquad \varphi\to\psi}{\psi} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi} \qquad\qquad \frac{\bot}{\varphi} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}$$

$$\frac{\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)} \qquad\qquad \frac{\forall x\varphi(x)}{\varphi(\tau)}$$

(Τους κανόνες της πρώτης σειράς που αφορούν τη σύζευξη τους έχουμε εξηγήσει ήδη· τους δύο πρώτους της δεύτερης τους έχουμε εξηγήσει, ο προτελευταίος της δεύτερης επιτρέπει τον συμπερασμό οποιασδήποτε πρότασης από μιάν αντίφαση, ενώ ο τελευταίος είναι η γνωστή *μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής*. Τον πρώτο της τρίτης σειράς τον έχουμε εξηγήσει, ο δεύτερος επιτρέπει την εξειδίκευση, δηλαδή

---

12 Dirk van Dalen, *Logic and Structure*, Springer, 3rd ed., σ. iii, 30.

πό μια καθολική πρόταση έπεται η πρόταση που δηλώνει ότι ο «σκοπός» της καθολικής ισχύει για «οποιοιονδήποτε»[13] όρο *τ*).
Λέμε τώρα ότι η φ *αποδεικνύεται τυπικά* από το PA (και γράφουμε PA$\vdash\varphi$) αν και μόνον αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων της γλώσσας που ορίσαμε, με τελευταίο όρο τη φ, και τέτοια ώστε κάθε όρος της να είναι πρόταση του PA,ή να προκύπτει από κάποιους προηγούμενους όρους, μέσω των κανόνων που περιγράψαμε.
Το θεώρημα της πληρότητας μας λέει ότι αν κάποια πρόταση φ της γλώσσας της αριθμητικής που ορίσαμε αποδεικνύεται από το σύνολο προτάσεων PA, υπό την παραπάνω έννοια, τότε αληθεύει σε κάθε πεδίο ερμηνείας όπου αληθεύουν αυτές και αντίστροφα αν η φ αληθεύει σε κάθε πεδίο ερμηνείας όπου αυτές αληθεύουν τότε μπορούμε να την αποδείξουμε με μία τυπική απόδειξη που κάνει χρήση μόνον των παραπάνω κανόνων.
Η τυπική απόδειξη λοιπόν είναι ένα αναστοχαστικό νοητικό εργαλείο, μια μαθηματική τυποποίηση της μαθηματικής απόδειξης και όχι όλων των πτυχών της μαθηματικής δραστηριότητας. Με τη βοήθεια της κατανοήσαμε επαρκώς τις *λογικές* πτυχές της μαθηματικής απόδειξης. Ποια είναι η θέση της στα σχολικά μαθηματικά;

4. Η διδασκαλία και η μάθηση της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά.

Εσωτερικοί και εξωτερικοί παράγοντες έφεραν στις αρχές της δεκαετίας του 1960 την τυπική απόδειξη στην σχολική τάξη στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής κίνησης των «νέων μαθηματικών»: οι συνολοθεωρητικές έννοιες, οι πίνακες αληθείας, η εκτεταμένη συμβολική αναπαράσταση και η αξιωματική προσέγγιση επικράτησαν για ένα διάστημα με αρνητικά μάλλον αποτελέσματα. Η τυπική απόδειξη, νεότευκτο και εξειδικευμένο νοητικό εργαλείο για τη μελέτη των αποδείξεων, ταυτίστηκε με την απόδειξη. Ευτυχώς η λανθασμένη εφαρμογή της τυπικής απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά συνειδητοποιήθηκε. Δυστυχώς όμως υπάρχουν ενδείξεις ότι η απόσυρσή της παρέσυρε μαζί της και την απόδειξη, βασικό νοητικό εργαλείο των μαθηματικών από τις απαρχές της συγκρότησής τους. Καθήκον μας είναι να ξαναφέρουμε την απόδειξη στη σχολική τάξη, προφυλάσσοντάς την τόσο από την αρτηριοσκληρωτική τυπικότητα όσο και από τη νωθρότητα της διαλογιστικής χαλαρότητας.

---

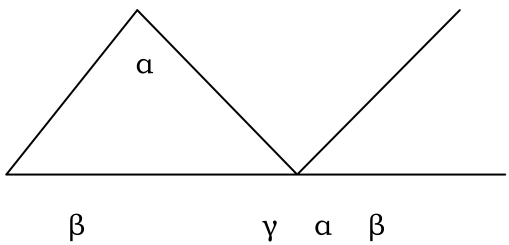
[13] Δεν θα αναφερθούμε σε ορισμένους τεχνικούς περιορισμούς στην εφαρμογή των δύο τελευταίων κανόνων. Λεπτομέρειες βλ. στο Dirk van Dalen, *Logic and Structure*, Springer, 3rd ed., σ. 64-66, 92.

Η απόδειξη: Ένα κομβικό σημείο στη συμπληρωματικότητα του αντικειμένου και της μεθοδολογίας στη διδακτική των μαθηματικών

Αναστάσιος Τοκμακίδης

Δρ. Μαθηματικών – Υποδ/ντής του Διαπολιτισμικού Γυμνασίου Ευόσμου

Η απόδειξη αποτελεί παραδοσιακά ένα από τα χαρακτηριστικότερα γνωρίσματα των Μα-θηματικών, αφού επιβεβαιώνει την αξιοπιστία της παρεχόμενης μαθηματικής γνώσης. Ιστο-ρικά, οι πρώτες αναφορές σε μαθηματικές αποδείξεις παραπέμπουν στην αρχαία Ελλάδα και κορυφώνονται με τα *Στοιχεία* του ΕΥΚΛΕΙΔΗ [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ & ΚΑΣΤΑΝΗΣ 1993].



Σχημα 1

Ας ξεκινήσουμε με την κλασική γεωμετρική απόδειξη της πρότασης που αναφέρεται στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί και ο φιλόσοφος Ι. ΚΑΝΤ (1724-1804) στην *Κριτική του καθαρού λόγου* για να υπογραμμίσει την καθαρή επο-πτεία του χώρου. Στην προσπάθεια λοιπόν ενός φιλοσόφου να αναλύσει την έννοια του τρι-γώνου, ό,τι και να κάνει αυτός, «δεν πρόκειται ν’ ανακαλύψει κάτι καινούριο. [...] Μόνο ο μαθηματικός[72] θα μπορούσε να επιχειρήσει να ασχοληθεί με το ζήτημα αυτό. Κατασκευάζει α-μέσως ένα τρίγωνο. Γνωρίζοντας ότι πάνω σε μία ευθεία όλες οι εφεξής γωνίες που ξεκινούν από ένα σημείο της έχουν

[72] Στο κείμενο υπάρχει η λέξη γεωμέτρης [Geometer], αφού αυτή προσδιόριζε το επάγγελμά μας κατά το 19ο αι.

άθροισμα δύο ορθές, προεκτείνει τη μία πλευρά του τριγώνου και παίρνει δύο εφεξής γωνίες με άθροισμα δύο ορθές. Χωρίζοντας την εξωτερική γωνία του τρι-γώνου *με μία παράλληλη* στην απέναντι πλευρά, *βλέπει»* ότι προκύπτουν δύο εξωτερικές γωνί-ες ίσες με τις αντίστοιχες εσωτερικές του τριγώνου: η γωνία α ως εντός κι εναλλάξ και η γω-νία β ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά [ΣΧΗΜΑ 1]. Έτσι, αποδεικνύεται ότι α+β+γ = 180^0 και *«με μία ακολουθία λογικών συλλογισμών, καθοδηγούμενος πάντοτε από την εποπτεία,* [ο μαθη-ματικός] καταλήγει στην εντελώς σαφή και γενική ταυτόχρονα επίλυση του ζητήματος» [KANT 1781/1787, A 716/B 744], [OTTE 1994, 328, υπογρ. Α.Τ].

Αυτή η παρατήρηση του KANT παραπέμπει σε δύο βασικές αποδεικτικές μεθόδους, που πρωτοσυναντώνται στην αρχαία Ελλάδα: στην επαγωγική, που αξιοποιεί τα γεωμετρικά δια-γράμματα και τις συμμετρίες που αυτά εμπεριέχουν και στην απαγωγική, που πρωτοεφαρμό-σθηκε από τον ΠΑΡΜΕΝΙΔΗ στις αρχές(;) του 4ου π.Χ. αιώνα. Ήδη πριν από τον ΕΥΚΛΕΙ-ΔΗ (περί το 300π.Χ.) συναντούμε στη γεωμετρία βαθμιαίες μεταβάσεις από επαγωγικές προς απαγωγικές αποδείξεις. Αρχικά λοιπόν, η απόδειξη χρησίμευε στη φανέρωση της αλήθειας ε-νός ισχυρισμού. Στη συνέχεια, τα ελληνικά Μαθηματικά εμπλουτίστηκαν με έμμεσες ή αντι-φατικές αποδείξεις, πράγμα που οδήγησε στη μετάβαση των Μαθηματικών σε ένα παραγωγι-κό σύστημα [BECKER 1965], [v. FRITZ 1971], [SZÁBO 1978].

Η απαίτηση από την απόδειξη να παρέχει αξιόπιστη γνώση, οδηγεί παράλληλα στην αξίω-ση της ορθότητας του προς απόδειξη ζητούμενου, στην απόδειξη πως η απόδειξη της απόδει-ξης είναι σωστή κτλ., επ' άπειρον. Ως πρώτη διέξοδος στο δίλημμα αυτό προτάθηκε η πλήρης μηχανοποίηση της σκέψης, που οδήγησε στη θεώρηση της αποδεικτικής διαδικασίας ως μη-χανικής υπολογισμών. Χρειάζομαι κανόνες για να μπορέσω να εφαρμόσω και να ερμηνεύσω τους κανόνες της απόδειξης ή οδηγούμαι σε σολιψιστικές αντιλήψεις. Ιστορικά η προσπάθεια του LEIBNIZ (1646-1716) να μηχανοποιήσει τη γεωμετρία οδήγησε στην επανεμφάνιση του προβλήματος [OTTE 1994, 56-59]. Μήπως βρισκόμαστε λοιπόν σε φαύλο κύκλο;

Το πρόβλημα αυτό συμπυκνώνεται συχνά στο ακόλουθο ερώτημα: «Ακολουθούν οι λέξεις και οι σκέψεις τους τυπικούς κανόνες ή όχι;» [HOFSTADTER 1985, 50]. Στο εντελώς προ-σωπικό λεξικό του QUINE συναντούμε το ίδιο ερώτημα υπό τον τίτλο «use versus mention» [QUINE 1976]. Η σύγχυση της περιγραφής ενός αντικειμένου με το ίδιο το αντικείμενο πα-ραπέμπει λοιπόν στη συσκότιση της σχέσης use και mention. Στα Μαθηματικά η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα δόθηκε με την επιτακτική χρήση αυστηρών λογικών αποδείξε-ων. Ο L. CARROLL την αποκρυστάλλωσε σ' ένα σύντομο κείμενο με τίτλο «Τι είπε η χελώ-να στον Αχιλλέα» [HOFSTADTER 1985, 45κ.έ.]: Ο Αχιλλέας συζητά με τη χελώνα για τις α-ποδείξεις στα *Στοιχεία* του ΕΥΚΛΕΙΔΗ και παρατηρούν μαζί το ακόλουθο παράδειγμα:

Α) Δύο αντικείμενα ίσα προς ένα τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα.

Β) Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με κάποια άλλη.

Ζ) Το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Όποιος διάβασε τον Ευκλείδη, θα συμφωνήσει σίγουρα ότι η πρόταση Ζ προκύπτει λογικά α-πό τις Α και Β. Έτσι, ο Αχιλλέας θεωρεί ότι καθένας που αποδέχεται τις Α και Β, θα *πρέπει* να θεωρεί αληθή και τη Ζ. Όμως, για να υποχρεώσει τη χελώνα ν' αποδεχθεί το συλλογισμό αυτόν και ειδικότερα τη Ζ, αν δέχεται τις Α και Β, αναγκάζεται να συνθέσει ένα νέο κανόνα:

Γ) Αν οι Α και Β είναι αληθείς, τότε πρέπει να είναι και η Ζ. Και στη συνέχεια:

Δ) Αν οι Α και Β και Γ είναι αληθείς, τότε θα *πρέπει* να είναι και η Ζ, κτλ.

Όλες αυτές οι συνεχείς αναγωγές ξεπερνιούνται μόνο με την ταύτιση της ιδέας με το περιε-χόμενό της. Έτσι, οδηγούμαστε στη θεώρηση της ενόρασης ως αντιπάλου της λογικής, α-ντιλαμβανόμενοι την τελευταία με τον κλασικό Αριστοτέλειο τύπο της:

«Μία θεωρία είναι ένα σύνολο προτάσεων S με τα εξής χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

1. Κάθε πρόταση που ανήκει στο S πρέπει να αναφέρεται σ' ένα ειδικό τομέα πραγματικών οντοτήτων.
2. Κάθε πρόταση που ανήκει στο S πρέπει να είναι αληθής.
3. Όταν ορισμένες προτάσεις ανήκουν στο S, τότε στο S ανήκουν και όλες οι λογικές συνέ-πειές τους.

4. Στο S υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος όρων με απολύτως σαφή και προφανή σημασία, έτσι ώστε κάθε άλλη έννοια που ανήκει στο S να μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια αυτών των βασικών όρων.

5. Στο S υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος απολύτως σαφών και αληθών προτάσεων, που δεν απαιτούν περαιτέρω απόδειξη, έτσι ώστε η αλήθεια κάθε άλλης πρότασης που ανήκει στο S να προκύπτει λογικά από τις θεμελιώδεις αυτές αρχές» [BETH 1968, 32].

Η λογική και η απόδειξη αποτελούν εδώ ένα όργανο της θεωρητικής ανάπτυξης και όχι ένα μέσο θεμελίωσης.

Όμως, στην ενόραση, όπου η ουσία ενός αντικειμένου παριστάνεται ως μορφή, τα επίπεδα γνώσης και μετα-γνώσης, δηλ. αυτό της γνώσης και το αντίστοιχο της επαλήθευσης και κατο-χύρωσης της αντικειμενικότητας της γνώσης, είναι αρκετά περιορισμένα. Όπως δείχνει κι ο προηγούμενος διάλογος του Αχιλλέα με τη χελώνα, μία λογική γνώμη μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν η σκέψη αποκτήσει κάποιο αντικείμενο. Το γεγονός αυτό εκπροσωπείται από την ενόραση. Η ενόραση διακρίνεται και από τα ακόλουθα δύο χαρακτηριστικά γνωρίσμα-τα: «Από την ξαφνική μετάβαση από το επίπεδο της μη-γνώσης σ’ αυτό της γνώσης», χωρίς κάποια ακολουθία συλλογισμών και από «την ενστικτώδη επιτυχία» [OTTE 1994, 308-309]. «Δεν ξέρω πως έφθασα στο συμπέρασμα αυτό, δεν ξέρω τι έκανα» είναι ορισμένες χαρακτη-ριστικές εκφράσεις του ενορατικού τρόπου απόδειξης. Από την άλλη πλευρά, η απαίτηση για επαλήθευση των αποδείξεων ή επανεκτέλεση των πειραμάτων, οδήγησε στην ταύτιση της γνώσης με τη μορφή, που εκφράζεται μέσα από την αλγοριθμική διαδικασία. Όμως, κι αυτή η αποδεικτική πρακτική συνάντησε δυσκολίες και περιορισμούς, όπως κατέδειξε και η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή στα καθαρά Μαθηματικά.

Οι περισσότεροι μαθηματικοί θα προτιμούσαν να συμμετάσχουν στην απόδειξη μίας λα-μπρής ιδέας κάποιου συναδέλφου τους, ακόμη κι αν δεν την καταλάβαιναν, παρά στην από-δειξη της ίδιας πρότασης μέσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Χαρακτηριστική είναι η «αντί-δραση του μαθηματικού» στην περίφημη απόδειξη των HAKEN και APPEL για το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων [DAVIS & HERSH 1981, 406]:

«Μόλις άκουσα για την επίλυση του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων, αρχικά εν-θουσιάστηκα, ήθελα αμέσως να μάθω πώς τα κατάφεραν οι δυό τους. Περίμενα μία λαμπρή νέα παρατήρηση, μία απόδειξη, μία ιδέα με τέτοια ομορφιά, που θα φώτιζε ολόκληρη τη μέρα μου. Απογοητεύτηκα όμως, όταν άκουσα ότι το πρόβλημα είχε αναχθεί σε χιλιάδες περιπτώ-σεις, οι οποίες ελέγχθηκαν μία προς μία από τον ηλεκτρονικού υπολογιστή. Τότε το πρώτο που σκέφθηκα ήταν: “Για δες, δεν ήταν και κάποιο ιδιαίτερα καλό πρόβλημα!”».

Η αρνητική αντίδραση του μαθηματικού – πέρα από την πιθανή απειλή που αισθάνεται για το επάγγελμά του από τον ηλεκτρονικού υπολογιστή – φανερώνει ότι *«μία απόδειξη που μόνο αποδεικνύει δεν πρέπει να είναι ικανοποιητική.* Η απόδειξη πρέπει να εμπλουτίζει και την ενό-ρασή μας, να κατακτά καινούρια αντικείμενα γι’ αυτήν. Η απόδειξη πρέπει να ανανεώνει ε-ντελώς την αντίληψή μας για το τι είναι τα Μαθηματικά. [...] Οι φορμαλιστικοί περιορισμοί που θέτει μία αποδεικτική μέθοδος αποκτούν ξεχωριστή σημασία, γιατί επιτρέπουν τη γενι-κευμένη επαλήθευση. *Η απόδειξη επεκτείνει τις άμεσες γνώσεις μας, αυξάνει το πλήθος των αυστηρά αποδεδειγμένων θεωρημάτων, μεταβάλλοντας ταυτόχρονα τις εικασίες μας, την ενόρα-σή μας, τα κίνητρα και τις παραστάσεις μας για τα Μαθηματικά αυτά καθεαυτά, καθώς και για τη σύνθεση αυτών που ονομάζουμε σημαντικά, ενδιαφέροντα ή συγγενή μαθηματικά προβλήμα-τα. Αυτό όμως, το επιτυγχάνει μόνο αν είναι ενταγμένη στη διαδικασία της κατασκευαστικής ε-ποπτείας»* [OTTE 1994, 310-311, υπογρ. Α.Τ]. Επίσης, θα πρέπει να διακρίνεται για την ευελιξία της και τη δυνατότητα γενίκευσης που παρέχει.

Η αντίδραση του φιλοσόφου στο ίδιο πρόβλημα επικεντρώνεται κι αυτή στη χρήση του η-λεκτρονικού υπολογιστή, που φαίνεται ότι «ανάγει τη μαθηματική γνώση στο επίπεδο της γε-νικής γνώσης, η οποία δεν εγείρει καμία απαίτηση για αυστηρές αποδείξεις ή παραγωγικούς συλλογισμούς. Η εμπιστοσύνη στον ηλεκτρονικό υπολογιστή [...] σημαίνει ότι παραιτούμα-στε από μία ουσιαστική άποψη της μαθηματικής βεβαιότητας, ότι την τοποθετούμε στο ίδιο επίπεδο με τη συνηθισμένη γνώση, που της αρκεί μία καθορισμένη σκέψη, μία αντίληψη, από την οποία είχε απελευθερωθεί η μαθηματική γνώση μέχρι τώρα» [DAVIS & HERSH 1981, 406]. Αυτή η αρνητική θεώρηση του φιλοσόφου, που φοβάται τη σύνδεση της επιστήμης με την καθημερινή γνώση ή τη διασταύρωση των Μαθηματικών με την καθημερινή πραγμα-τικότητα, επικεντρώνεται κύρια στην έλλειψη κάποιας λεπτής, ραφιναρισμένης μεθοδολο-γίας. Το γεγονός αυτό παραπέμπει άμεσα στο θετικισμό.

Ο θετικισμός αποτελεί ένα είδος νομιναλισμού, δεν πιστεύει στην «ύπαρξη» θεωρητικών αντικειμένων. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι σημαντικά θεωρητικά μεγέθη, όπως οι «μιγα-δικοί αριθμοί» ή τα «διανύσματα» έγιναν αποδεκτά από τους θετικιστές, μόλις προσαρμόστη-καν σε συστήματα πραγματικών αριθμών. Οι έννοιες του αριθμού και της συνάρτησης α-ποτελούν τα συστατικά στοιχεία αυτής της καρτεσιανής, θα λέγαμε, θεώρησης των Μαθημα-τικών [CASSIRER 1910, 91-92]. Ειδικότερα η συνάρτηση, η οποία αντιμετωπίζεται ως αντι-κείμενο και τελεστής ταυτόχρονα [OTTE 1990], [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1990] οδηγεί σε νέες πρά-ξεις, ανάλογα με τις ερμηνείες που της προσδίδονται.

Ο A.-L. CAUCHY (1789-1857) π.χ. μελετούσε στη θεωρία των οριζουσών συγκεκριμένες συναρτήσεις, εντάσσοντας μέσα στο πλαίσιο αυτό και τις γεωμετρικές συντεταγμένες, που ως γνωστόν είναι θεμελιώδεις γραμμικές συναρτήσεις: Έχοντας δηλ. ένα σημείο $P = \{x_1,\ldots, x_n\}$, ορίζουμε μία συνάρτηση f_i: $P\rightarrow x_i$, $i\in\{1,\ldots, n\}$, που αντιστοιχίζει το σημείο P στις συντεταγ-μένες του. Οι πράξεις και οι νόμοι τους προκύπτουν από την αριθμητική, οπότε δεν τίθεται κάποιο θέμα για την αξιοπιστία τους. Το άθροισμα δύο σημείων P+Q σημαίνει το αριθμητικό άθροισμα των συναρτήσεων f_i: $P\rightarrow x_i$, g_i: $Q\rightarrow y_i$, δηλ.: $f_i+g_i = x_i+y_i$, $i\in\{1,\ldots, n\}$, ενώ ο πολ-λαπλασιασμός με κάποιον πραγματικό αριθμό λ δίνει αντίστοιχα $\lambda\cdot P = \lambda\cdot x_i$. Οι τύποι αυτοί γενικεύονται και η αποδεικτική διαδικασία καθοδηγείται από την ακόλουθο άποψη: Δίνεται μία συνάρτηση που ικανοποιεί κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Ποια είναι η συμβολι-κή παράσταση της; Ποιους τύπους επαληθεύει; Στο 19ο αι., αυτή η μετατροπή της αποδει-κτικής διαδικασίας σε ένα σύστημα φορμαλιστικών πράξεων αποδίδεται συχνά με τον όρο «επανάσταση της αυστηρότητας», με χαρακτηριστικότερο εκφραστή της τα *Cours d'analyse* [CAUCHY 1821], [HUZLER 1828, viii]. Αυτή η αντίληψη, που στοχεύει περισσότερο στην αριθμητικοποίηση της μαθηματικής σημασίας [TOKMAKIDS 1997], αντιλαμβάνεται τα Μαθηματικά ως καθαρά αναλυτική επιστήμη, χρησιμοποιώντας αποδείξεις, που στοχεύουν περισσότερο στο αποτέλεσμα, παρά στη θεμελίωση.[73]

Παράλληλα με την προηγούμενη μηχανικιστική-ρεντουκτιονιστική αντίληψη των Μαθη-ματικών αναπτύχθηκε κατά το 19ο αι. και ο αξιωματικός κονστρουκτιβισμός. Η θεώρηση αυτή ασχολείται με αυτά καθεαυτά τα αντικείμενα ή τα μεγέθη. Είναι απαλλαγμένη από τις συντεταγμένες και οι συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητες, τουλάχιστον για τον ορισμό του αντικειμένου της. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η *Ausdehnungslehre* του H.G. GRA-SSMANN (1809-1877). Αφετηρία του υπήρξε η θεώρηση των διανυσμάτων με τη βοήθεια των κλάσεων ισοδυναμίας. Οι πράξεις του GRASSMANN δεν προέρχονται από την αριθμη-τική και ορίζονται με τη βοήθεια των μορφών. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων δίνει πάλι ένα διάνυσμα, που εφαρμόζεται και στη φυσική ως παραλληλόγραμμο των δυνάμεων, αλλά η ει-σαγωγή του πολλαπλασιασμού έχει ως αποτέλεσμα τον προσανατολισμό της προκύπτουσας επιφάνειας $f(a, b)$. Έτσι, ισχύει: $f(a, a) = 0$, για $a = b$ ή ακόμη $f(\lambda \cdot a, b) = \lambda \cdot f(a, b) = f(a, \lambda \cdot b)$, ε-νώ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας και από τη σχέση $f(a+b, a+b) = 0$ προκύπτει η αντισυμμετρική ιδιότητα $f(a, b) = -f(b, a)$.

Αυτή η γεωμετρικοποίηση της μαθηματικής σημασίας [TOKMAKIDS 1996] ξεκινά συνθετικά, παίρνοντας την επιφάνεια του παραλληλογράμμου όχι ως προς το αριθμητικό εμ-βαδόν του, αλλά ως ένα γεωμετρικό μέγεθος αυτό καθευατό. Η θεώρηση των πλευρών του ως διανύσματα οδηγεί – μέσα από στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις, όπως ότι η επιφάνεια ενός παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζεται ανάλογα με τον πολλαπλασιασμό της μίας πλευράς του – στη διγραμμικότητα της απεικόνισης $f(a, b)$. Όμοια, το γεγονός ότι ένα παραλληλό-γραμμο παράγεται μόνο αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπάγεται την αντι-συμμετρικότητα της απεικόνισης $f(a, b) = -f(b, a)$· από τον προσανατολισμό δηλ., των πλευ-ρών προκύπτει άμεσα ο προσανατολισμός των διδιάστατων επιφανειακών μεγεθών. Για το μαθηματικό χαρακτηρισμό του επιφανειακού αυτού μεγέθους

---

[73] Επισημαίνουμε εδώ τον «ινστρουμενταλισμό» [MELLIN-OLSEN 1981] του μαθητή, που επικεντρώνεται απο-κλειστικά σ’ αυτό που πιστεύει ότι περιμένει ο δάσκαλος ή το «σχολείο» από αυτόν. Με άλλα λόγια, μία κατα-νόηση των Μαθηματικών και των φορμαλιστικών τύπων ιδιαίτερα, που βασίζεται σε «rules without reasons» [ό. π., 9], μία αντίληψη, που καταπολεμήθηκε από πολλούς μαθηματικούς, όπως ο A. DE MORGAN (1806-1871) [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 2002, 2003a].

εξετάζονται οι ταυτοτικές του συνθήκες: Από τη γραμμική απεικόνιση A στο διδιάστατο διανυσματικό χώρο V_2 προκύπτει άμεσα ότι $f(A(a), A(b)) = D \cdot f(a, b)$, όπου D η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης A. Με άλ-λα λόγια, όλα τα διανυσματικά ζεύγη (a, b), που προκύπτουν από μία γραμμική απεικόνιση A με $D = 1$, ορίζουν την ίδια επιφάνεια. Η θεώρηση αυτή μπορεί να επεκταθεί στη θεωρία ο-μάδων και στον ορισμό των διανυσματικών χώρων Grassmann-Peano (V, D) [TOKMA-KIDS 1995, 350].

Έτσι, η «επανάσταση της αυστηρότητας» μπορεί να κατανοηθεί και από μία άλλη σκοπιά: Η απασχόληση με αυτά καθεαυτά τα αντικείμενα οδήγησε τον GRASSMANN στην ανάπτυ-ξη μίας αυτόνομης θεωρίας μορφών [GRASSMANN 1844, 1862], μίας γεωμετρίας χωρίς με-τρική, που οι έννοιές της αναπτύσσονται βαθμωτά με τη βοήθεια της ορίζουσας. Η θεώρηση αυτή στοχεύει περισσότερο στη θεμελίωση της μαθηματικής θεωρίας, ενώ ως προς τη με-θοδολογία της θα πρέπει ν' αναζητήσει τους καταλληλότερους τύπους. Στον 20ο αι. οι δύο αυτές αποδεικτικές αντιλήψεις συγκεράστηκαν μεταξύ τους, δεχόμενη η μία την επίδραση της άλλης. Μία συμπληρωματική θεώρηση τόσο των ίδιων των Μαθηματικών ως προς το αντικείμενο και τη μεθοδολογία τους, όσο και των δύο παραπάνω χαρακτηριστικών αποδει-κτικών κινήσεων του 19ου αι. [TOKMAKIDIS & OTTE 2003b] συναντάται στην πλειοψηφία των σύγχρονων διδακτικών βιβλίων των Μαθηματικών [GRAEUB 1958, 1963], [MACLANE & BIRKHOFF 1968].

Συνοψίζοντας θα λέγαμε τα εξής: Ήδη από την εποχή του Ευκλείδη, η σχολική γεωμετρία έχει διαμορφώσει μία άλλη αντίληψη, συνδέοντας την απόδειξη με την «ανώτατη» μορφή της μαθηματικής κατανόησης. Ακόμη και στα αναλυτικά προγράμματα των περισσότερων σχο-λείων οι διδακτικοί στόχοι διαφοροποιούνται στους «υπολογισμούς», ως βασική απαίτηση και στις «αποδείξεις» ως συμπλήρωμα. Η απόδειξη απαιτεί – σχετικά με το μαθηματικό αντι-κείμενο και περιεχόμενο – μία όσο το δυνατόν σταθερή και άμεση παρουσίαση των σχετικών a priori δεδομένων. Τα συγκεκριμένα αντικείμενα, είτε πράγματα είναι αυτά, είτε εμπειρίες, τα αποδέχεται όπως φαίνονται και όχι «σαν να είναι». «Η απόδειξη ξεκινά με μία εποπτεία που τη θεωρεί αληθινή και δουλεύει αυστηρά με τα δεδομένα της. Από ψυχολογικής πλευράς η απόδειξη δεν αναπτύσσεται ως μία "αν – τότε"-διαδικασία, όπως πιστεύουν πολλοί μαθη-ματικοί. *Η απόδειξη αποκαθιστά την ενότητα* *των Μαθηματικών και σε μεθοδολογικό επίπεδο, όπου οι διαδικασίες δεν έχουν μόνο μορφή, αλλά και προϋποθέσεις και αποτελέσματα. Η απόδειξη αποτελεί [...] το ρυθμιστικό στοιχείο ανάμεσα στην εποπτεία και την ενόραση από τη μία, και τους στόχους και τα αποτελέσματα από την άλλη πλευρά»* [OTTE 1994, 334, υπογρ. Α.Τ].

Βιβλιογραφία

BECKER O.(Hrsg.) 1965, *Zur Geschichte der griechischen Mathematik,* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

BETH E.W. 1968, *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Scienc,* Amsterdam, North Holland Publications.

CASSIRER E. 1910, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff,* Berlin, Bruno Cassirer.

CAUCHY A.L. 1821, Cours d'analyse, *Œuvres Complètes,* 2e Serie, Bd III.

DAVIS Ph.J. & R. HERSH 1981, *The Mathematical Experience*, Boston, Birkhäuser.

— FRITZ K. v. 1971, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaften,* Berlin/Heid-elberg/New York, Springer.

— GRAEUB W. 1958, *Lineare Algebra,* Berlin, Springer.

— — 1963, *Linear algebra,* 2. Ed., N. York, Springer.

— GRASSMANN H.G. 1844, Die Ausedehnungslehre von 1844, *H. Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke,* 1911, Bd. III, 1. Teil, 1-347.

— — 1862, *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet,* Berlin, Enslin.

— HOFSTADTER D.R. 1985, *Gödel, Escher, Bach,* Stuttgart, Klett-Cotta.

— HUZLER C.G.B. 1828, *A.L. Cauchys Lehrbuch der algebraischen Analysis,* Königsberg.

KANT I. 1781/1787/1970, *Kritik der reinen Vernunft,* Frankfurt am Main, Suhrkamp.

MACLANE S. & BIRKHOFF G. 1968, *Algebra,* N. York, McMillan Co.

MELLIN-OLSEN S. 1981, Instrumentalism as an educational concept, *Educational Studies in Mathmatics* **12**, 351-367.

OTTE M. 1990, Stichwort “Funktion”, *Europäische Enzyklopädie zu Philosophie und Wissen-schaften,* 211-214, Hamburg.

— 1994, *Das Formale, das Soziale und das Subjektive,* Frankfurt am Main, Suhrkamp.

QUINE W.V.O. 1976, *Die Wurzeln der Referenz,* Frankfurt am Main, Suhrkamp.

SCHOLZ E. 1990, *Geschichte der Algebra,* Mannheim/Wien/Zürich, Wissenschaftsverlag.

SZÁBO A. 1978, *The Beginning of Greek Mathematics,* Dordrecht, Reidel.

ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ Α. 1990, Ελληνική απόδοση του άρθρου του [OTTE 1990], *Ενημερωτικό Δελ-τίο του Ομίλου Ιστορίας των Μαθηματικών* **14**, 9-15.

TOKAMKIDIS A 1995, *Der Determinantenbegriff bei Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und Hermann Günther Grassmann (1809-1877),* Ph.D., Thessaloniki, Aristoteles Universität.

— 1996, Der Begriff der Determinante in Hermann Günther Grassmanns “Ausdehnungsleh-re”, *N.K. Artemiadis & N.K. Stefanidis(eds): Proceedings of the 4th International Congress of Geometry, 409-416.*

1997, Der Beitrag von A.-L. Cauchy (1789-1857) zur Entwicklung des Determinantenbegri-ffes, *Br. D’Amore & A. Gagatsis(eds): Didactics of Mathematics - Technology in Education,* 271-302.

— 2002, Οκτώ διδακτικές συμβουλές του A. De Morgan σχετικά με τις δυσκολίες πάνω στη μελέτη των στοιχειωδών Μαθηματικών, *Δ. ΧΑΣΑΠΗΣ (επιμ. εκδ.): Η Ιστορία των Μαθηματι-κών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο και στο Γυμνάσιο*, 149-163.

— 2003a, *Η επικαιρότητα των απόψεων του Augustus de Morgan (1806-1871) για τη διδακτι-κή των στοιχειωδών Μαθηματικών,* 4ο Πρόγραμμα Μεταδιδακτορικής Έρευνας, Ι.Κ.Υ. (υπό περάτωση)

ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ Α. & Ν. ΚΑΣΤΑΝΗΣ 1993, Η ιστορική κληρονομιά των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην ανθρωπότητα, *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά: Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφί-ας, 67-92,* Αθήνα, Τροχαλία.

TOKAMKIDIS A. & M. OTTE 2003b, Die Determinante in den modernen mathematischen Grundlagen: Didaktische Auswertung ihrer historischen Entwicklung zur Darstellung des mo-dernen Tensorbegriffes (υπό δημοσίευση)

Εικασίες και αντιπαραδείγματα - ενας δυναμικός τρόπος κατανόησης των μαθηματικών εννοιών

Ανδρέας Πούλος

Διδάκτωρ της Διδακτικής των Μαθηματικών

Είναι γνωστό ότι η απόδειξη της ορθότητας ενός μαθηματικού τύπου, μιας μαθηματικής πρότασης και γενικότερα ενός σύνθετου επιχειρήματος δεν μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη μόνο με την «δοκιμή» κάποιων πολλών ή λίγων περιπτώσεων. Για το σκοπό αυτό επιστρατεύονται οι μέθοδοι απόδειξης των Μαθηματικών, οι οποίες είναι αποδεκτές από την κοινότητα των μαθηματικών και για το λόγο αυτό θεωρούνται έγκυρες. Αντίθετα με αυτή την πρακτική, για να καταρριφθεί ένας ισχυρισμός ή για να ελεγχθεί η ορθότητα μιας μαθηματικής πρότασης, αρκεί και ένα μόνο παράδειγμα το οποίο να έρχεται σε αντίθεση με την καθολική ισχύ του ισχυρισμού. Ένα τέτοιο παράδειγμα ονομάζεται *αντιπαράδειγμα*. Τα αντιπαραδείγματα έχουν ιδιαίτερη παιδαγωγική και διδακτική αξία και χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη διδασκαλία με σκοπό να ενισχύσουν την ορθότητα των μαθηματικών προτάσεων, να αποσαφηνίσουν κάποιες έννοιες. Ιδιαίτερα όταν έχουμε να εξετάσουμε σύνθετες μαθηματικές προτάσεις στις οποίες εμπλέκονται πολλές έννοιες, τα κατάλληλα επιλεγμένα αντιπαραδείγματα αποσαφηνίζουν την κατάσταση. Η μέθοδος διδασκαλίας με έμφαση στη χρήση αντιπαραδειγμάτων δεν είναι κάτι το καινοφανές. Στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη η πλειοψηφία των διδασκόντων κάνει χρήση των αντιπαραδειγμάτων ώστε να κατανοηθούν σε βάθος οι έννοιες και τα ερωτήματα που εξετάζονται. Εξάλλου είναι γνωστό ότι τη μέθοδο των αντιπαραδειγμάτων, τη μέθοδο της «δοκιμής και λάθους» την χρησιμοποιούσαν οι άριστοι των διδασκάλων. Ο Ευκλείδης για παράδειγμα είχε συγγράψει[1] ειδική πραγματεία τα «Ψευδάρια», η οποία σκοπό είχε να ασκήσει τους

[1] Από τις μαρτυρίες που διασώθηκαν έως τις μέρες μας.

μαθητές στην εύρεση των λαθών, στην αποκάλυψη των αντιφάσεων και σε μία βαθύτερη «ανάγνωση» και εξέταση των καταστάσεων σε ένα δεύτερο επίπεδο μετά το επιφαινόμενο. Τα αντιπαραδείγματα έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στη βαθύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων των μαθηματικών αντικειμένων και γενικότερα στην εξέλιξη των ίδιων των Μαθηματικών. Υπενθυμίζουμε την ισχυρή εντύπωση που προκάλεσε η δημοσίευση της αποκαλούμενης συνάρτησης Weierstrass μιας συνάρτησης παντού συνεχούς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και πουθενά παραγωγίσιμης στο ίδιο σύνολο, επίσης τον κλονισμό που προκάλεσε το βιβλίο του μαθηματικού και φιλόσοφου Imre Lakatos «Αποδείξεις και Ανασκευές»[2] για το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στη διαδικασία των μαθηματικών ανακαλύψεων.

Τα αντιπαραδείγματα μπορούν να καλύψουν όλο φάσμα των εννοιών των σχολικών Μαθηματικών, έτσι ώστε αυτές να γίνουν καλύτερα κατανοητές και λειτουργικές στη σχολική πραγματικότητα. Είναι αξιοσημείωτο όμως ότι η χρήση των αντιπαραδειγμάτων εμφανίζεται κυρίως στην τελευταία τάξη του Λυκείου κατά τη μελέτη και κατανόηση εννοιών του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, επειδή στο μέρος αυτών των σχολικών Μαθηματικών εμφανίζονται μια πληθώρα σύνθετων και αλληλοεμπλεκόμενων εννοιών, θεωρημάτων και μαθηματικών σχέσεων.

Τα αντιπαραδείγματα είναι επιτυχείς προσπάθειες για την απόρριψη ορισμένων εικασιών. Παρά την αρνητική σημασία που έχει η λέξη «απόρριψη», η διαδικασία κατασκευής ενός αντιπαραδείγματος είναι μια διαδικασία επιστημονική, αφού απαλλάσσει τα Μαθηματικά από προτάσεις για τις οποίες είχαμε αμφιβολίες αν ήταν αληθείς ή ψευδείς. Ο τυποποιημένος – φορμαλιστικός τρόπος διδασκαλίας των Μαθηματικών έχει διαμορφώσει σε διδάσκοντες και σε διδασκόμενους την εντύπωση ότι η επιστήμη αυτή αναπτύσσεται και κατασκευάζει τα θεωρήματά της χωρίς πειραματισμούς, δοκιμές και εικασίες. Σε αντίθεση με αυτή την πλατιά διαδεδομένη αντίληψη, η διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης και της επίλυσης προβλημάτων είναι μοιραίο να προκύπτουν «υποψίες» για την ορθότητα ή μη κάποιων προτάσεων. Από την άποψη αυτή κάθε πρόταση η οποία δεν έχει αποδειχθεί παρά τις επίμονες προσπάθειες μπορούμε να την ονομάσουμε «εικασία». Αν διαπιστωθεί η ορθότητα ή το λανθασμένο

[2] “Proofs and Refutations” στο αγγλικό πρωτότυπο κείμενο.

μιας εικασίας, τότε αυτόματα αυτή μετατρέπεται σε μαθηματικό θεώρημα. Για παράδειγμα, το αποκαλούμενο Πυθαγόρειο θεώρημα είχε εμπειρικά ανακαλυφθεί και από πολιτισμούς πριν τον Ελληνικό. Από καθαρά μαθηματική άποψη παρέμενε εικασία – παρ΄ ότι αυτή λέξη άρχισε να αποκτά νόημα μόνο όταν η έννοια της απόδειξης άρχισε να θεωρείται αναγκαίο στάδιο στην ανάπτυξη των Μαθηματικών. Για τους Έλληνες φιλόσοφους-μαθηματικούς αυτή η εμπειρική διαπίστωση η οποία εκφράζεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα έπρεπε μέσω λογικών επιχειρημάτων να αναδείξει την ισχύ και την εγκυρότητά της σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ανεξάρτητα από τα μήκη των πλευρών του ή να απορριφθεί από κάποιο αντιπαράδειγμα. Σε αντιστοιχία με το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκεται η αποκαλούμενη εικασία του Φερμά. Είχε διαπιστωθεί εμπειρικά ότι η εξίσωση $x^v + y^v = z^v$ με x, y, z, v φυσικούς αριθμούς δεν έχει λύση για αριθμούς $v \geq 3$. Αυτή η πρόταση η οποία σήμερα είναι θεώρημα χάρις στις προσπάθειες του Άγγλου μαθηματικού Andrew Wiles, παρέμεινε εικασία για περισσότερα από 350 χρόνια.

Για λόγους που σχετίζονται με κοινωνιολογικές πλευρές και όψεις της μαθηματικής επιστήμης, οι μαθηματικοί ακούσια αποφεύγουν να τονίσουν το τεράστιο πλήθος των εικασιών που έχουν διατυπωθεί και συνεχώς συσσωρεύονται σε κάθε ενεργό κλάδο της επιστήμης τους. Ορισμένες από τις εικασίες αυτές διατυπώθηκαν πρόσφατα, κάποιες άλλες όμως έχουν ηλικία δεκαετιών και άλλες εκατοντάδων ετών. Η πορεία αντιμετώπισης πολλών εικασιών είχε θετική έκβαση και έγινε δυνατόν να απορριφθούν με αντιπαραδείγματα. Στις περιπτώσεις αυτές, ο δρόμος της έρευνας ήταν ιδιαίτερα κοπιαστικός και ο χρόνος που απαιτήθηκε επιμηκύνθηκε υπερβολικά. Υπάρχουν εικασίες, για την κατανόηση του περιεχομένου των οποίων αρκούν τα στοιχειώδη (Σχολικά) Μαθηματικά και μάλιστα πολλές από αυτές είναι διάσημες.

Η εισήγηση αυτή ουσιαστικά επιχειρεί μία παράλληλη αντιμετώπιση από την πλευρά της διδακτικής των Μαθηματικών των εννοιών «αντιπαράδειγμα» και «εικασία» με σκοπό να αναδείξει την παιδαγωγική χρησιμότητα αυτής της θεώρησης κατά τη διδασκαλία τους.

Οι εικασίες και τα αντιπαραδείγματα από την οπτική γωνία της διδακτικής των μαθηματικών

Κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια αλλά και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές μαθαίνουν ένα πλήθος ορισμών, κάποιες μαθηματικές προτάσεις με ή χωρίς τις αποδείξεις τους και ασκούνται στην κατανόηση αυτών των μαθηματικών εννοιών και των θεωρημάτων με την επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων. Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας είναι ο συνήθης και απ΄ ότι φαίνεται ο κύριος τρόπος βελτίωσής του – όχι της αναθεώρησης ή της ανατροπής του – είναι ο εμπλουτισμός του με καλύτερα επιλεγμένες σειρές προβλημάτων και ασκήσεων. Ακόμη και στον τυπικό τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών η αξιοποίηση των αντιπαραδειγμάτων τον εμπλουτίζει και τον βελτιώνει. Θεωρούμε όμως ότι η χρήση των αντιπαραδειγμάτων έχει πολύ καλύτερα διδακτικά αποτελέσματα σε έναν ριζικά αναθεωρημένο τρόπο διδασκαλίας κυρίως για μαθητές που έχουν κορεστεί από την τυποποιημένη διδασκαλία και οι οποίοι επιδιώκουν να κατανοήσουν σε βάθος και σε πληρότητα τις μαθηματικές έννοιες. Επίσης, η χρήση των αντιπαραδειγμάτων είναι ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό κριτήριο για να μετρήσουμε τον βαθμό κατανόησης εκ μέρους των μαθητών των διδασκόμενων εννοιών. Δηλαδή, τα αντιπαραδείγματα είναι ένα εργαλείο πειραματισμού και ως τέτοιο έχει χρησιμοποιηθεί από αρκετούς ερευνητές. Θα περιγράψουμε επιλεκτικά κάποιες τέτοιες έρευνες ώστε να γίνει κατανοητή η αξία των αντιπαραδειγμάτων ως εργαλείων της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι Randall R. Dahlberg και David L. Housman του Allegheng College ερεύνησαν 11 απόφοιτους, οι οποίοι είχαν διδαχθεί Μαθηματικά επιπέδου Εισαγωγής στην Ανάλυση πραγματικών συναρτήσεων, συνήθη Άλγεβρα, Γραμμική Άλγεβρα και θεωρία Συνόλων. Οι ερευνητές μαγνητοφώνησαν ατομικές συνεντεύξεις των αποφοίτων για να διαπιστώσουν πόσο έχουν κατανοήσει τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης. Όρισαν μια συνάρτηση ως «καλή» αν κάθε ακέραια τιμή του πεδίου ορισμού της είναι ρίζα της. Στη συνέχεια ζήτησαν από τα υποκείμενα της έρευνας να δώσουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα «καλών» συναρτήσεων. Σε επόμενη φάση της πειραματικής διαδικασίας δόθηκαν οι συναρτήσεις $f(x) = ημ(πx)$ και $f(x) = 0$ για εξεταστούν αν είναι «καλές». Σε επόμενη φάση δόθηκαν για μελέτη τέσσερις εικασίες όπως «καμία πολυωνυμική συνάρτηση δεν είναι καλή». Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές χρησιμοποίησαν 4 βασικές στρατηγικές προσέγγισης και χειρισμού αυτής της «νέας» έννοιας ανάλογα με το επίπεδο των γνώσεων και τον βαθμό κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, της έννοιας της ρίζας, κλπ. Κατά την ανάλυση των συμπερασμάτων της έρευνας οι Dahlberg και Housman θεωρούν ότι είναι χρήσιμο να εισάγουμε τους μαθητές σε νέες έννοιες προτείνοντάς τους να δίνουν δικά τους παραδείγματα, από τα οποία θα προκύπτει με τι τρόπο κατανοούν τις έννοιες που έχουν ήδη διδαχθεί, αλλά και αντιπαραδείγματα τα οποία θα έχουν ακριβώς τον ίδιο στόχο.

Οι ερευνητές Orit Hazzan και Rina Zarkis του Τεχνολογικού Ινστιτούτου του Ισραήλ πειραματίστηκαν σε τρεις ομάδες υποψήφιων δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ζητώντας παραδείγματα: α) ενός εξαψήφιου αριθμού ο οποίος να διαιρείται με το 9 και το 17, β) μιας συνάρτησης f για την οποία να ισχύει f(3) = -2 και γ) ενός δειγματικού χώρου στον οποίο κάθε ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 2/7. Στη συνέχεια ζήτησαν από τους φοιτητές να εξηγήσουν πώς κατασκεύασαν τα παραδείγματά τους και να δώσουν 5 επιπλέον παραδείγματα. Οι φοιτητές προσέγγισαν το ερώτημα με μια ποικιλία τρόπων ξεκινώντας με δοκιμές όπως για παράδειγμα κάποιοι διάλεξαν έναν αριθμό στην τύχη και έλεγξαν αν διαιρείται με το 9. Άλλοι διάλεξαν έναν αριθμό Ν, ο οποίος κατά την διαίρεσή του με το 17 να αφήνει υπόλοιπο 2 και χρησιμοποίησαν τον αριθμό Ν – 2 για την επόμενη δοκιμή. Ας σημειωθεί ότι ελάχιστοι φοιτητές έδωσαν «απλά παραδείγματα» όπως τον αριθμό 170.000 ως εξαψήφιο διαιρετό με το 17 ή την y = -2 ως παράδειγμα της ζητούμενης συνάρτησης.

Τα κατασκευαστικά παραδείγματα όπως τα προηγούμενα αποδεικνύονται δυσκολότερα από τον έλεγχο της διαιρετότητας ενός αριθμού, από τον υπολογισμό της τιμής μιας συνάρτησης ή από την εύρεση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Επειδή περιέχουν το στοιχείο της αβεβαιότητας και της ελευθερίας στις επιλογές, δημιουργούν προβληματισμούς ως προς την ορθότητα των επιλογών. Άρα το ζητούμενο της «κατασκευής παραδειγμάτων» είναι ένα παιδαγωγικό εργαλείο για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών[3].

[3] Στις βιβλιογραφικές μας αναφορές μπορεί ο ενδιαφερόμενος να βρει αρκετές εργασίες που είναι προσανατολισμένες προς μια τέτοια προοπτική.

Το ζήτημα της κατασκευής παραδειγμάτων σχετίζεται άμεσα με την κατασκευή αντιπαραδειγμάτων. Ας αναφερθούμε σε μια σχετική έρευνα. Αυτή διεξήχθη από τους Irit Peled και Orit Zaslavsky μεταξύ καθηγητών Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με κάποια χρόνια διδασκαλίας στην τάξη. Τους ζητήθηκε να δώσουν αντιπαραδείγματα – με έμμεσο τρόπο ώστε να μην είναι φανερό ότι πρόκειται για προτάσεις που δεν ισχύουν – για τα εξής δύο ζητούμενα:

Α) Δύο ορθογώνια με ίσες διαγώνιες είναι ίσα.

Β) Δύο παραλληλόγραμμα με μια πλευρά και μια διαγώνιο αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.

Ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα της έρευνας η οποία για τον σκοπό του βιβλίου δεν έχει σημαντικό ενδιαφέρον, οι ερευνητές ταξινόμησαν τα αντιπαραδείγματα σε τρεις κατηγορίες: σε ειδικά, σε ημι-γενικά και σε γενικευμένα. Αυτή ταξινόμηση είναι χρήσιμη και για άλλες σχετικές έρευνες και πρόθεσή μας είναι να την αξιοποιήσουμε. Ένα αντιπαράδειγμα θεωρείται ειδικό όταν έρχεται σε αντίθεση μεν με την ορθότητα της ζητούμενης πρότασης ή στόχο, αλλά δεν παρέχει κάποια ένδειξη ή ιδέα για το πώς μπορεί να αξιοποιηθεί για την κατασκευή άλλων αντιπαραδειγμάτων για το ίδιο ερώτημα. Ένα αντιπαράδειγμα ονομάζεται ημι-γενικό όταν μπορεί να μας δώσει κάποιες ιδέες για την κατασκευή παρόμοιων ή σχετικών αντιπαραδειγμάτων, αλλά δεν καλύπτει όλες τις δυνατές μορφές αντιπαραδειγμάτων. Τέλος, ένα αντιπαράδειγμα αποκαλείται γενικό όταν παρέχει όλα τα επιχειρήματα που αποδεικνύουν γιατί μια εικασία είναι λανθασμένη και προτείνει μια γενική μέθοδο κατασκευής όλων των σχετικών αντιπαραδειγμάτων. Δίνουμε παραδείγματα των τριών μορφών αντιπαραδειγμάτων με βάση την εικασία «δύο ορθογώνια με ίσες διαγώνιες είναι ίσα». Ένα ειδικό αντιπαράδειγμα είναι ο προσεκτικός σχεδιασμός δύο άνισων ορθογωνίων τα οποία όμως έχουν ίσες διαγώνιες. Ένα ημι-γενικό αντιπαράδειγμα είναι η κατασκευή ορθογωνίων με ίσες διαγώνιες με τέτοιον τρόπο ώστε στο μεν πρώτο να τέμνονται κάθετα και στο δεύτερο να σχηματίζουν οξεία γωνία 45^{o}. Ένα γενικευμένο αντιπαράδειγμα είναι η κατασκευή δύο ισοσκελών τριγώνων με ίσες πλευρές και διαφορετικές γωνίες, οι ίσες προεκτάσεις των ίσων πλευρών σχηματίζουν ορθογώνια τα οποία δεν είναι ίσα, όπως προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων.

Δεν είναι όλοι οι ερευνητές σύμφωνοι σε όλα τα σημεία σχετικά με τον ρόλο που θα πρέπει να παίζουν τα αντιπαραδείγματα στις διάφορες βαθμίδες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα οι Annie και John Selden στο άρθρο τους που φέρει τον τίτλο «Ο ρόλος των παραδειγμάτων στην μάθηση των Μαθηματικών»[4] αναφέρουν τα εξής: «Επειδή η επιτυχία στα Μαθηματικά, ειδικά σε προχωρημένο μεταπτυχιακό και πτυχιακό επίπεδο φαίνεται ότι σχετίζεται με την ικανότητα κατασκευής παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, τίθεται το ερώτημα ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος για ν' αναπτυχθεί αυτή η ικανότητα;». Τι ρόλο θα παίζουν όμως αυτά στις χαμηλότερες βαθμίδες της εκπαίδευσης; Μπορούν οι μικροί μαθητές να κατασκευάζουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα ή απλώς αποστηθίζουν τα ήδη προκατασκευασμένα από άλλους; Τι είναι πιο εύκολο να κατασκευάσει κάποιος, παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα, ή αυτό το ερώτημα αποκτά νόημα μόνο για κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα, εικασία και απορία;

Αντίστοιχα παιδαγωγικά ερωτήματα τίθενται για το ρόλο των εικασιών στη μαθηματική εκπαίδευση. Έως ποιο επίπεδο δυσκολίας πρέπει να διατυπώνονται τα ερωτήματα – εικασίες που θα θέτει ο διδάσκων; Θα είναι μόνον απλές εφαρμογές της θεωρίας; Θα περιέχουν στοιχεία πρωτοτυπίας και μιας μικρής έρευνας; Μήπως πρέπει να αναθεωρήσουμε ή να προσαρμόσουμε τη διδασκαλία για να ανταποκρίνονται οι μαθητές στην αντιμετώπιση εικασιών και στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων ή πρέπει να διαμορφώσουμε τέτοιες συνθήκες διδασκαλίας που να ενσωματώνουν τη δυναμική και την παιδαγωγική αξία των εικασιών και των αντιπαραδειγμάτων; Η εξοικείωση με τον χειρισμό των εικασιών στα Μαθηματικά και κατ' επέκταση με προτάσεις οι οποίες είναι διατυπωμένες με τέτοιον τρόπο ώστε να μην προκύπτει εκ των προτέρων το τελικό συμπέρασμα, είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας ο εκπαιδευόμενος εισέρχεται βαθμιαία στο κλίμα και στη λογική της μαθηματικής ανακάλυψης. Αυτό είναι ένα από τα βασικά ζητούμενα (προφανώς όχι το μόνο) της μαθηματικής εκπαίδευσης, δηλαδή να προετοιμάσει τις νεώτερες γενιές μαθηματικών και επιστημόνων ώστε να είναι σε θέση όχι μόνο να χειρίζονται τα Μαθηματικά, αλλά και να κάνουν νέες ανακαλύψεις σε αυτά για την προώθηση της επιστήμης.

---

[4] Δες τις βιβλιογραφικές παραπομπές.

Τέλος θεωρούμε ουσιώδες να σημειώσουμε ότι πολλά αντιπαραδείγματα δεν προέκυψαν από εικασίες, αλλά ως «εξαιρέσεις» ή αρνήσεις που οι μαθηματικοί θεωρούσαν έως τότε ως αληθείς επειδή δεν είχαν προβλέψει όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να περιέχει ένα συγκεκριμένο σύνολο μαθηματικών αντικειμένων.

Οι εικασίες και τα αντιπαραδείγματα από την οπτική της φιλοσοφίας των μαθηματικών

Το έργο του I. Lakatos «Αποδείξεις και Ανασκευές» έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία των διαδικασιών που συμβαίνουν κατά την παραγωγή και απόδειξη των μαθηματικών θεωρημάτων και για τη διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών. Θεωρείται έργο – σταθμός στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, αναπτύσσει τα επιχειρήματα και τις θέσεις του μελετώντας διεξοδικά την ιστορική εξέλιξη συγκεκριμένων εικασιών. Για το λόγο αυτό το έργο του Lakatos απετέλεσε το θεωρητικό υπόβαθρο της δόμησης και προσανατολισμού της εργασίας που προσπαθούμε να συγκροτήσουμε.

Ο ίδιος ο Lakatos θεωρεί ότι σκοπός του έργου του είναι η προσέγγιση ορισμένων προβλημάτων της μεθοδολογίας των Μαθηματικών[5]. Ως «μεθοδολογία» θεωρεί την «ευρετική μέθοδο» του Polya και την «λογική της ανακάλυψης» του Popper.[6] Παράλληλα διακηρύσσει – και αυτή είναι η κεντρική του ιδέα - ότι τα Μαθηματικά δεν αναπτύσσονται με την μονότονη προσθήκη αναμφισβήτητων θεωρημάτων, αλλά με τη βελτίωση υποθέσεων με τη δοκιμή και την κριτική, με τη λογική των αποδείξεων και των ανασκευών[7]. Υπογραμμίζει το γεγονός ότι οι εικασίες (ή τα θεωρήματα) προηγούνται των αποδείξεων στην ευρετική διαδοχή, κάτι που ήταν κοινός τόπος για τους αρχαίους μαθηματικούς[8] και σημειώνει την ρήση του Polya ότι «πρέπει να μαντέψεις ένα μαθηματικό θεώρημα πριν το αποδείξεις»[9]. Το μαθηματικό πρόβλημα που εξετάζει είναι η σχέση που υπάρχει μεταξύ

[5] Στο εξής θα αναφερόμαστε στο βιβλίο του Lakatos «Αποδείξεις και ανασκευές», (δες στις βιβλιογραφικές παραπομπές).
[6] Δες Lakatos σελ. 19.
[7] Δες Lakatos σελ. 23.
[8] Δες Lakatos σελ. 29.
[9] Δες Lakatos σελ. 30.

του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών ενός πολυέδρου. Πρόκειται για τον περίφημο τύπο Κ + Ε = Α + 2 που ανακάλυψαν και «απέδειξαν» οι Καρτέσιος και ῾Οϋλερ. Θέτουμε την λέξη απέδειξαν σε εισαγωγικά, διότι οι δύο αυτοί μεγάλοι μαθηματικοί απέδειξαν τον συγκεκριμένο τύπο για μία ορισμένη μορφή πολυέδρων και όχι στην γενική του περίπτωση. Για τον τύπο αυτό άλλοι μαθηματικοί βρήκαν περιπτώσεις πολυέδρων στα οποία δεν μπορεί να εφαρμοστεί, δηλαδή ανακαλύφθηκαν αντιπαραδείγματα. Τα αντιπαραδείγματα είναι λοιπόν μία μορφή κριτικής σε κάποια δημιουργία όπως είναι η διατύπωση μιας μαθηματικής πρότασης; Σύμφωνα με τον Lakatos αυτό ισχύει. «Οι εικασίες μπορούν να αγνοήσουν τη δυσφορία ή τις υποψίες, όχι όμως και τα αντιπαραδείγματα»[10]. Η κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος είναι επίσης μια σοβαρή και δημιουργική εργασία, αφού διευκολύνει τη δουλειά του μαθηματικού ή καλύτερα είναι μέρος της δουλειάς του. «Ένα αντιπαράδειγμα ανασκευάζει μία εικασία όσο και δέκα αντιπαραδείγματα».[11] Είναι αξιοσημείωτο ότι δύο επιστήμονες οι Lhuiller και Hessel βρήκαν αντιπαράδειγμα για τον τύπο Κ + Ε = Α + 2 από μία εργασία τους σε ένα θέμα εντελώς άσχετο με τη θεωρητική Γεωμετρία. Μελέτησαν ορυκτολογικές συλλογές παρατηρώντας διπλούς κρυστάλλους στους οποίους ο εξωτερικός κρύσταλλος είναι θειϊκού μολύβδου και ο εσωτερικός φθοριούχου ασβεστίου. Βεβαίως οι γεωμέτρες βρήκαν αντιπαραδείγματα στα οποία δεν ισχύει ο τύπος του Όυλερ μελετώντας τα λεγόμενα αστεροειδή πολύεδρα, τα οποία πιθανώς είχε μελετήσει ο Αρχιμήδης και σίγουρα ο αστρονόμος Κέπλερ.

Μία άλλη λειτουργία των αντιπαραδειγμάτων είναι ότι ο εντοπισμός τους τροποποιεί – μερικές φορές ριζικά – τους ορισμούς των εννοιών. «Νέοι ορισμοί προτείνονται και εξετάζονται όταν εμφανίζονται αντιπαραδείγματα».[12] Θα μπορούσε κάποιος να μετριάσει τη βαρύτητα της λέξης αντιπαράδειγμα, η οποία έχει έναν οξύ και επιθετικό τόνο απέναντι σε όσους έχουν κοπιάσει να επινοήσουν αποδείξεις, χρησιμοποιώντας τη λέξη «εξαίρεση».[13] Έτσι με τη χρήση αυτού του όρου μπορούμε να ταξινομήσουμε τις μαθηματικές προτάσεις (τα θεωρήματα) σε τρεις κατηγορίες:

---

[10] Δες Lakatos σελ. 31.
[11] Δες Lakatos σελ. 35.
[12] Δες Lakatos σελ. 39.
[13] Δες Lakatos σελ. 49.

A) Όσες αληθεύουν καθολικά χωρίς περιορισμούς και εξαιρέσεις, όπως λ.χ. ότι το άθροισμα των γωνιών των επίπεδων τριγώνων είναι 180^{o}.

B) Όσες στηρίζονται σε ψευδείς αρχές και δεν μπορούν με κανένα τρόπο να γίνουν αποδεκτές.

Γ) Όσες στηρίζονται σε αληθείς αρχές και παρά ταύτα επιδέχονται περιορισμούς και εξαιρέσεις σε ορισμένες περιπτώσεις.

Ο Lakatos διακρίνει τα αντιπαραδείγματα σε καθολικά και τοπικά, ανάλογα με το μέγεθος και την ένταση της ισχύος ή της βαρύτητας που εμπεριέχουν για την ανασκευή ριζική ή τοπική μιας εικασίας.

Η αλήθεια ή όχι μιας μαθηματικής πρότασης με τη βοήθεια των αντιπαραδειγμάτων για τον Lakatos έχει ανάλογη σημασία με τη σχεδίαση των «κρίσιμων πειραμάτων» που χρησιμοποιούν οι φυσικές επιστήμες για την απόρριψη μιας ερευνητικής υπόθεσης. Την ιδέα και πρακτική αυτή μελέτησε διεξοδικά ο φιλόσοφος Karl Popper, από το έργο του οποίου επηρεάστηκε ο Lakatos, στα έργα του για την επαληθευσιμότητα ή διαψευσιμότητα των επιστημονικών θεωριών.[14] Η ίδια μέθοδος της κατασκευής αντιπαραδειγμάτων βοηθά στη βελτίωση και αναμόρφωση της ίδιας της μαθηματικής πρότασης και αποκαλύπτει την εσωτερική ενότητα ανάμεσα στη «λογική της ανακάλυψης» και στη «λογική της αιτιολόγησης».[15]

Για λόγους που σχετίζονται με κοινωνικούς παράγοντες που επιδρούν στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης, στη διδασκαλία και στη διάδοσή της, για πολύν καιρό τα αντιπαραδείγματα αποσιωπούνταν, εξορκίζονταν ως τέρατα ή καταχωρίζονταν ως εξαιρέσεις. Η ευρετική μέθοδος και η ανακάλυψη καθολικών αντιπαραδειγμάτων στη διαδικασία της απόδειξης ήταν πρακτικά άγνωστη στα άτυπα Μαθηματικά του πρώιμου 19ου αιώνα.[16]

Ο Lakatos θεωρεί ότι δεν υπάρχουν στεγανά ανάμεσα στις αποδείξεις και στις ανασκευές, δηλαδή ανάμεσα στην αρχική μορφή σύλληψης ενός συμπεράσματος (ενός θεωρήματος) και στις διασκευασμένες εκδοχές του που προέρχονται κατά τη διαδικασία αποκλεισμού των εξαιρέσεων, τον έλεγχο των ειδικών περιπτώσεων και τον έλεγχο των

[14] Δες Lakatos σελ. 53.
[15] Δες Lakatos σελ. 67.

ορίων ισχύος και εγκυρότητας αυτού του συμπεράσματος. Συνοψίζει μάλιστα τη διαδικασία ανακάλυψης σε τρεις ευρετικούς κανόνες:[17]

Α) Απόδειξη και ανασκευή της εικασία με την αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων.

Β) Αν βρεθεί καθολικό αντιπαράδειγμα, τροποποιούμε την αρχική εικασία, ώστε να μην απορρίπτεται από αυτό.

Γ) Αν βρεθεί τοπικό αντιπαράδειγμα, ελέγχουμε αν πρόκειται για καθολικό αντιπαράδειγμα και προχωρούμε στο βήμα Β.

Η ανακάλυψη μιας πληθώρας αντιπαραδειγμάτων σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών έχει καταστήσει τους μαθηματικούς ιδιαίτερα προσεκτικούς, τόσο ως προς τη διατύπωση εικασιών, τόσο και ως προς τη συστηματική διερεύνηση των δυνατών και «αδύνατων» περιπτώσεων και εκδοχών. Τον 18ο αιώνα τα «παραπλανητικά» σχήματα οδήγησαν σε αναξιοπιστία τις γεωμετρικές αποδείξεις, και τον 19ο αιώνα ξαναπήρε τα σκήπτρα η αριθμητική διαίσθηση με τη βοήθεια της θεωρίας των πραγματικών αριθμών.[18] Αυτή η πρακτική έχει επηρεάσει και τα Σχολικά Μαθηματικά και στα οποία οι γεωμετρικού τύπου αποδείξεις και προσεγγίσεις θεωρούνται κατώτερες από τις αριθμητικο-αναλυτικές, κάτι που επηρεάζει ασφαλώς και τον τρόπο διδασκαλίας τους και τη δόμηση των σχολικών Αναλυτικών προγραμμάτων. Η σύγχρονη μαθηματική «επανάσταση της αυστηρότητας» είναι ουσιαστικά η επαναφορά της Αριθμητικής ως κυρίαρχης θεωρίας μέσω ενός τεράστιου προγράμματος αριθμητικοποίησης των Μαθηματικών από τον Cauchy και τον Weierstrass[19]. Όμως η άκριτη αποδοχή αυτού του προγράμματος ως καθολικού υποδείγματος και στα Σχολικά Μαθηματικά παράγει πολλά εμπόδια κατανόησης των εννοιών και θυσιάζει την αποτελεσματικότητα στο βωμό της αυστηρότητας.

Η ανασκευή των μαθηματικών εικασιών επηρεάζει σημαντικά και τη διαμόρφωση των εννοιών που εμπλέκονται με αυτές. Δεν είναι λοιπόν καθόλου τυχαίο ότι οι ορισμοί των Μαθηματικών αποκτούν τέτοια μορφή και τρόπο διατύπωσης που πολλές φορές φαίνονται παράξενοι

---

[16] Δες Lakatos σελ. 82.
[17] Δες Lakatos σελ. 84.
[18] Δες Lakatos σελ. 88.
[19] Δες Lakatos σελ. 185

και μυστηριώδεις. Οι μαθηματικοί συνήθως αποφεύγουν τα μακροσκελή θεωρήματα προσφεύγοντας στο εναλλακτικό τέχνασμα των μακροσκελών ορισμών κι έτσι στα θεωρήματα εμφανίζονται μόνο οι όροι που έχουν οριστεί (π.χ. «κανονικό πολύεδρο»). Όμως οι ορισμοί καταλαμβάνουν τεράστιο χώρο στις «αυστηρές» διατυπώσεις ενός θέματος, ενώ τα τέρατα (δηλ. τα αντιπαραδείγματα) που οδήγησαν σε αυτούς σπανίως μνημονεύονται. Έτσι για παράδειγμα ο ορισμός του «κανονικού πολυέδρου» καταλαμβάνει 45 γραμμές στην Βρετανική Εγκυκλοπαίδεια του 1962.[20] Είναι κοινό μυστικό στους ερευνητές μαθηματικούς ότι «τόσο οι εικασίες όσο και οι έννοιες πρέπει να περάσουν από το καθαρτήριο των αποδείξεων και των εικασιών».[21]

Ένα άλλο σημείο που θεωρούμε ότι έχει ενδιαφέρον είναι ότι η φιλοσοφική έρευνα και μελέτη της Λογικής των μαθηματικών ανακαλύψεων, οδήγησε τον Lakatos στη σύγκριση της ευρετικής μεθόδου των Μαθηματικών με την έρευνα στις άλλες επιστήμες. Η μαθηματική ευρετική μοιάζει πολύ με την επιστημονική ευρετική, όχι μόνο επειδή και οι δύο είναι επαγωγικές, αλλά επειδή και οι δύο χαρακτηρίζονται από εικασίες, αποδείξεις και ανασκευές. Η αναζωογόνηση της μαθηματικής ευρετικής τον 20ο αιώνα οφείλεται στον G. Polya. Η επιμονή του στις ομοιότητες, ανάμεσα στην επιστημονική και μαθηματική ευρετική, είναι σύμφωνα με τον Lakatos, από τα κύρια χαρακτηριστικά της αξιοθαύμαστης εργασίας του.[22]

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των βασικών θέσεων του Lakatos για την πορεία της ευρετικής διαδικασίας, καταγράφουμε τα στάδια της όπως τα έχει συνοψίζει ο ίδιος.[23]

Το σχήμα της μαθηματικής ανακάλυψης αποτελείται από τα εξής στάδια:

1) Διατυπώνεται κάποια αρχική εικασία.

2) Παρουσιάζεται μια απόδειξη: ένα σχηματικό νοητικό πείραμα ή επιχείρημα που αποσυνθέτει την αρχική εικασία σε ένα σύνολο υποεικασιών ή λημμάτων.

---

[20] Δες Lakatos σελ. 89.
[21] Δες Lakatos σελ. 141.
[22] Δες Lakatos σελ. 117.
[23] Δες Lakatos σελ. 190-191.

3) Αναδύονται «καθολικά» αντιπαραδείγματα.
4) Επανεξετάζεται η απόδειξη: εντοπίζονται τα «ένοχα λήμματα» για τα οποία το καθολικό αντιπαράδειγμα είναι και τοπικό.

Τα παραπάνω 4 στάδια αποτελούν τον ουσιώδη πυρήνα της αποδεικτικής ανάλυσης. Συχνά όμως εμφανίζονται μερικά ακόμα τυπικά στάδια:

5) Επανεξετάζονται οι αποδείξεις άλλων θεωρημάτων για να διαπιστωθεί αν απαντάται σ' αυτές το νεότευκτο λήμμα ή η καινοφανής αποδεικτικής καταγωγής έννοια. Τα νέα στοιχεία ίσως βρεθούν στη διασταύρωση πολλών αποδείξεων αποκτώντας έτσι ιδιαίτερο βάρος.
6) Ελέγχονται οι αποδεκτές συνέπειες της αρχικής και τώρα πλέον ανασκευασμένης εικασίας.
7) Αντιπαραδείγματα μεταστρέφονται σε νέα παραδείγματα νέες περιοχές μελέτης ανοίγονται.

Είναι σημαντικό όμως να υπογραμμιστεί ότι η ευρετική της μαθηματικής ανακάλυψης σε επίπεδο ερευνητών διαφέρει από την ευρετική που ακολουθείται κατά τη μελέτη εικασιών σε απλά μαθηματικά προβλήματα και ερωτήματα. Συνεπώς η Διδακτική των Μαθηματικών έχει πολύ δρόμο ακόμη να διανύσει ώστε να καταλήξει σε ασφαλή συμπεράσματα για τις διαδικασίες, νοητικές και άλλες που ακολουθούν οι λύτες των προβλημάτων, πόσο μάλλον να καταλήξει σε προτάσεις σαφείς και εφαρμόσιμες. Επιπλέον πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι το έργο του Lakatos όσο σημαντικό κι αν είναι για την επιστημονική μελέτη και προώθηση της ευρετικής μεθόδου υπόκειται το ίδιο σε ανασκευές και αναθεωρήσεις, κάτι που είναι μοιραίο για όλα τα ανθρώπινα δημιουργήματα.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Bernard R. Gelbaum & John Olmsted & J. M. Olmsted, P. Halmos (Editor): (1990). Theorems and Counterexamples in Mathematics. Springer-Verlag. N.Y.

Gary L. Wise & Eric B. Hall: (1993). Counterexamples in Probability and Real Analysis. Oxford University Press.

Gupta S.L. & Rani Nisha: (1993). Fundamental Real Analysis. Vika Publ. House. New Delhi. 3η ανατύπωση 2000.

Iorda Stoianov & Jordan M. Stoyanov (1997). Counterexamples in Probability, 2e edition. J. Wiley and Son.

Selden John & Selden Annie: (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. Educ. Studies in Mathematics, 29, 123-151.

Worrall John & Currie Gregory (Eds): (1978). Mathematics, science and epistemology. Vol. 2. In memorial of Imre Lakatos. Cambridge Univ. Press, Ανατύπωση 1993.

Lakatos Imre: (1996). Αποδείξεις και Ανασκευές. Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης. Χωρίς όνομα μεταφραστή. Πρώτη αγγλική έκδοση 1976 με 10 επανεκδόσεις. Εκδόσεις Τροχαλία. Αθήνα.

Απόδειξη και Σχολικά Μαθηματικά

Αθανάσιος Χαλάτσης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Εδώ και 2500 χρόνια τα μαθηματικά είναι συνυφασμένα με την ιδέα πως για να δεχτούμε ότι ισχύει μια πρόταση, πρέπει αυτή να παράγεται με λογικό συμπερασμό από άλλες προτάσεις που ήδη δεχτήκαμε ότι ισχύουν.

Όμως, η συνεχής αναγωγή σε προτάσεις που ισχύουν δεν μπορεί παρά να είναι περατωμένη. Πρέπει, λοιπόν, να ξεκινάμε από κάποιες προτάσεις, η ισχύς των οποίων επιβάλλεται διαισθητικά, αλλά δεν μπορεί να προκύψει συμπερασματικά από την ισχύ άλλων προτάσεων. Αυτές τις προτάσεις τις ονομάζουμε *αξιώματα.*

Μία πρόταση που έχει αποδειχτεί ονομάζεται θεώρημα. Κι ως απόδειξη ενός θεωρήματος εννοούμε την παραγωγή του από τα αξιώματα ή άλλα θεωρήματα, με μόνο εργαλείο το λογικό συμπερασμό. Αυτή είναι η *παραγωγική μέθοδος απόδειξης*.

Πρέπει να παρατηρήσουμε, όμως, πως οι μαθηματικές προτάσεις αφορούν σε έννοιες με σαφές νόημα - *ακριβείς έννοιες*. Και μια έννοια μπορεί να θεωρείται ακριβής, μόνον όταν ορίζεται με τη βοήθεια άλλων εννοιών, που ήδη θεωρήθηκαν ως ακριβείς.

Και πάλι, η συνεχής αναγωγή σε ακριβείς έννοιες δεν μπορεί παρά να είναι περατωμένη. Πρέπει να ξεκινάμε από έννοιες διαισθητικά προφανείς, οι οποίες δεν είναι δυνατό ν’ αναχθούν σε απλούστερες. Οι υπόλοιπες θα πρέπει να ορίζονται με τη βοήθεια αυτών των *αρχικών* εννοιών. Η διαδικασία αυτή μπορεί να ονομαστεί *παραγωγική απόδοση νοήματος* στις έννοιες, κατ’ αναλογία προς την παραγωγική επιβεβαίωση της ισχύος των προτάσεων.

Ένα μαθηματικό σύστημα, στο οποίο το *νόημα* και η *αλήθεια* εμφυτεύονται από την αρχή, με την αποδοχή δηλαδή των αρχικών εννοιών και των αξιωμάτων αντίστοιχα, και στο οποίο η διατύπωση και η ισχύς των προτάσεων *ρέουν* με σαφείς ορισμούς και με τους κανόνες του λογικού συμπερασμού αντίστοιχα, ονομάζεται *παραγωγικό σύστημα* ή *αξιωματικό σύστημα*. Τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη είναι το πρώτο παραγωγικό σύστημα.

Έκτοτε, η μαθηματική πράξη κινείται στο πνεύμα του Ευκλείδειου Παραδείγματος:

a. Τα αντικείμενα των μαθηματικών έχουν περιορισμένες και σαφείς, μη διφορούμενες, ιδιότητες (τρίγωνα, κύκλοι, γινόμενα αριθμών, πρώτοι αριθμοί κλπ).

b. Κάθε ισχυρισμός είναι ένα λογικό συμπέρασμα άλλων ισχυρισμών. Όλη η μαθηματική συζήτηση είναι της μορφής *«αν ….., τότε ….. ».*

Αν αυτό είναι το πνεύμα των μαθηματικών, τότε τι έχουμε να πούμε για την *απόδειξη* στα σχολικά μαθηματικά; Κατ' αρχήν πρέπει να δεχτούμε πως η γενική θεώρηση, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, τη μόνη βεβαιότητα που μπορεί να στηρίξει είναι πως δε νοούνται τα οποιαδήποτε μαθηματικά χωρίς αποδείξεις. Θα πρέπει, λοιπόν, παραπέρα να δούμε από κοντά τις αποδείξεις, για να εικάσουμε το ρόλο τους.

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις μπορούν να στηριχθούν στην εμπειρία μας, και να αποτελέσουν ίσως έναν οδηγό στο πώς πρέπει να δούμε την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά.

i. *Το νόημα ενός θεωρήματος βρίσκεται στην απόδειξή του*. Άλλη εικόνα έχει κανείς όταν *πληροφορείται* μόνο το *τι ισχύει* κι άλλη όταν *γνωρίζει* και το *γιατί ισχύει.*

ii. *Η αυστηρότητα μιας απόδειξης μετριέται με τη σαφήνεια και τη συνοχή της.* Αυτός ο ισχυρισμός έχει αξία σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε απόδειξή είναι ενταγμένη σ' ένα πλέγμα εννοιών και σχέσεων, σ' ένα σύστημα. Μόνο μέσα σ' αυτό το σύστημα έχει νόημα, και μόνον όποιος το γνωρίζει καλά είναι δυνατό να την κατανοήσει.

iii. Είναι πέρα από κάθε αμφιβολία πως *η τελική απόδειξη*, που παρουσιάζεται στα βιβλία ή στις εργασίες, *δε συμπίπτει με την πορεία της επινόησής της*. Παρά το ότι στην τελική μορφή η διατύπωση ενός θεωρήματος είναι σαφής (χωρίς διφορούμενα) και η απόδειξη πλήρης (χωρίς κενά), λείπουν κρίσιμα βήματα της πρωτογενούς πορείας, τα οποία δε φαίνεται να είναι απαραίτητα γι αυτόν που τα διήλθε. Λείπουν τα λάθη που ενδεχομένως έγιναν, αλλά και οι σκέψεις που τα εντόπισαν. Ενίοτε ανατρέπεται η ίδια η διαδοχή των βημάτων που έλαβαν χώρα.

iv. Αν ψάξει κανείς στα βιβλία του Δημοτικού, αλλά και του Γυμνασίου ακόμα, δε θα βρει καμιά γνήσια απόδειξη. Γιατί δεν μπορούμε να έχουμε αποδείξεις στα μαθηματικά αυτών των βαθμίδων ; Ίσως όμως και να μπορούμε.

Βιβλιογραφία

P. J. DAVIS, “*Visual Theorems*”, Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4, pp. 333-344, (1993).

P. J. DAVIS AND R. HERSH, “*Η Μαθηματική Εμπειρία*”, Τροχαλία, (1991).

J. A. DIEUDONNÉ, “*Should We Teach ‘Modern’ Mathematics*? ”, American Scientist, Vol. 61, pp. 16-19, (1973)

W, P. THURSTON, “*On Proof and Progress in Mathematics*?”, in Th. Tymosczko (ed.), “New Directions in the Philosophy of Mathematics”, Princeton University Press, (1998).

G. HANNA, “*Rigorous Proof in Mathematics Education*”, OISE press, Curriculum Series/48, The Ontario Institute for Studies in Education, (1983).

G. HANNA, AND N. H. JAHNKE, “*Proof and Application*”, Educational Studies in Mathematics, vol. 24, No. 4, pp. 421-438, (1993).

C. G. HEMPEL, “*On the Nature of Mathematical Truth*”, in P. Benacerraf and H. Putnam, (eds.), “Philosophy of Mathematics: Selected Readings”, Cambridge University Press, 2nd ed., (1983).

R. HERSH, “*Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*”, in Th. Tymosczko (ed.), “New Directions in the Philosophy of Mathematics”, Princeton University Press, (1998).

R. HERSH, “*Proving is Convincing and Explaining*”, Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4, pp. 389-399, (1993).

M. KLINE, “*Logic Versus Pedagogy*”, American Mathematical Monthly, No. 77, pp. 264-282, (1970).

I. LAKATOS, “*Mathematics, Science and Epistemology*” Cambridge University Press, (1978).

I. LAKATOS, “*Proofs and Refutations*”, Cambridge University Press, (1976).

CH. ORMELL, *“Is the Uncertainty of Mathematics the Real Source of Its Intellectual Charm*?” (Review Essay), Journal of Philosophy of Education, Vol. 27, No.1, pp. 125-133, (1993).

H. POINCARÉ, “*On the Nature of Mathematical Reasoning*”, in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), “Philosophy of Mathematics: Selected Readings”, Cambridge University Press, 2nd ed., (1983).

J. RICHARSDS, “*Mathematical Discussions*”, in E. von Glasersfeld (ed.), “Radical Constructivism in Mathematics Education”, Kluwer Academic Publishers, (1991).

R. THOM, “ ‘*Modern’ Mathematics: An Educational and Philosophic Error*”, American Scientist Vol. 59, pp. 695-699, (1971).

L. WITTGENSTEIN, “*Φιλοσοφική Γραμματική’’*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα 1994.

ΕΝΟΤΗΤΑ III

Μια επιλεγμένη βιβλιογραφία για το επιχείρημα και την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά

Ελένη Γιαννακοπούλου & Δημήτρης Χασάπης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Δημοσιεύσεις σε αγγλική γλώσσα

Agassi J. (1980) On Mathematics Education : the Lakatosian Revolution. *For the Learning of Mathematics* 1, 27-31

Akihori Kanamori (1997) Proof and Progress in Mathematics. *Synthese*, vol III, 2, 131-210.

Alibert D. & Thomas M. (1991) Research on Mathematical Proof. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 215-230). Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Anderson J. A. (1994) The Answer is not the Solution - Inequalities and Proof in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 25, 655-663.

Anderson J. R. (1983) Acquisition of Proof Skills in Geometry. In : Carbonnel J. G., Michalski R., Mitchell T. (eds.) *Machine Learrning: An Artificial Intelligence Approach* (pp.191-219). Palo Alto, CA : Tioga.

Artmann B. (1999) *Euclid - the creation of mathematics.* Berlin: Springer Verlag.

Avital S. & Hansen R.T. (1976) Mathematical Induction in the Classroom. *Educational Studies in Mathematics* 7, 399-411.

Balacheff N. (1987) Cognitive versus situational analysis of problem-solving behaviors. *For the learning of mathematics* 6(3) 10-12

Balacheff N. (1988) Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: Pimm D. (ed.) *Mathematics, Teachers and Children* (pp.316-230). London : Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1990). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), Developments in School Mathematics Education Around the World, Vol. 2. Reston VA: NCTM.

Balacheff N. (1991) Treatment of refutations : aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In : Von Glasersfeld E. (ed.) *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp.89-110). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Balacheff N. (1991) Benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. In : Bishop A., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (eds.) *Mathematical knowledge : Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Balacheff N. (1999) Contract and Custom: Two registers of didactical interaction (trans. and ed. by P. Herbst). *The Mathematics Educator* (University of Georgia) 9(2) 23-29.

Barbeau E. (1990) Three faces of proof. Interchange 21(1) 24-27.

Bartolini Bussi M. & Pergola M. (1996) History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry. In: Jahnke H. N., Knoche N., Otte M. (hrsg.) *Geschichte der Mathematik in der Lehre*. Goettingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Barwise J. & Etchemendy J. (1991) Visual Information and Valid reasoning. In: Zimmermann W., Cunningham S. (eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Notes Series, Vol. 19, pp. 9-24). Providence, RI: MAA.

Bell A. (1976). *The learning of general mathematical strategies.* Ph.D. Nottingham : University of Nottingham.

Bell A. (1976) A study of pupils proof-explanation in mathematical situations.*Educational Studies in Mathematics* 7(1/2) 23-40.

Bell A. (1979) The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 10(6) 361-387.

Berggren J. L. (1990) Proof, pedagogy and the practice of mathematics in Medieval Islam. *Interchange* 21(1) 36-48.

Blum W. & Kirsch A. (1991) Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics* 22(2) 183-203.

Borda M. C. & Skovsmose O. (1997) The ideology of certainty in mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 17(3) 17-23.

Brown J. R. (1999) *Philosophy of mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures.* New York: Routledge.

Casselman B. (2000) Pictures and Proofs. *Notices of the AMS 47* (10) 1257-126.
Chazan D. (1990) Quasi-empirical views of mathematics and mathematics teaching. *Interchange* 21(1) 14-23.
Chazan D. (1993) High School geometry Student's Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational studies in Mathematics* 24(4) 359-387.
Chouraqui E. & Inghilterra C. (1996) A Model of Case-Based Reasoning for Solving Problems of Geometry ina Tutoring System. In: Laborde J.-M. (ed.) *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp.1-16). Berlin: Springer-Verlag.
Coe R. & Ruthven K. (1994) Proof Practice and Constructs. *British Educational Research Journal* 20, 41-53.

Dauben J. (1996) Arguments, logic, and proof: Mathematics, logic, and the infinite. In: H. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (eds.) *History of mathematics and education: Ideas and experiences*. Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht
Davis Ph. J. (1993) Visual Theorems.*Educational studies in Mathematics* 24(4) 333-344.
Dawson A.J. (1971) A Fallibilistic Model for Instruction. *Journal of Structural Learning* 1(3) 1-19.
de Villiers M. D. (1990) The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras* 24, 17-24.
de Villiers M. D. (1991) Pupils' need for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras* 26,18-27.
de Villiers M. D. (1995) An alternative introduction to proof in dynamic geometry. *Micromath* 11(1) 14-19.
de Villiers M. (1998) An alternative approach to proof in dynamic geometry. In : Lehrer R., Chazan D. (eds.) *New directions in teaching and learning geometry* (pp. 369-393). Lawrence Erlbaum.
de Villiers M. (1999) Rethinking Proof with Sketchpad. Key Curriculum Press.
de Villiers M. , & Mudaly V. (2000) Learners' Needs for Conviction & Explanation within the Context of Dynamic Geometry. *Pythagoras* 52, 20-23
Dhombres J. (1993) Is one Proof Enough? Travels With a Mathematician of the Baroque Period. *Educational studies in Mathematics* 24(4) 401-419.

Dodge W., Goto K. & Mallinson P. (1998) "I would consider the following to be a proof..." *Mathematics Teacher*. 91(8) 652-653.

Douek N. (1999) Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary schools. *Educational Studies in Mathematics* 39(1/3) 89-110

Dorier J.-L. (1996) The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear application and its applications* 275-276 (1998) 141-260.

Dreyfus T. & Hadas N. (1996) Proof as answer to the question why. *Zentralblatt fòr Didaktik der Mathematik* 28 (1) 1-5.

Dreyfus T. (1999) Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38(1/3) 85-109

Dreyfus T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians. In: Gagatsis A. (ed.) *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education. Nikosia* (Vol. 1, pp. 11-25). Cyprus: The University of Cyprus.

Dubinsky Ed (2000) Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3 (5) 211-240.

Epp S. (1994) The role of proof in problem solving. In: Schoenfeld A. (ed.) *Mathematical thinking and problem solving* (pp.257-269). Hilsdale, NJ: Erlbaum.

Epp S. (1998) A unified framework for proof and disproof. *Mathematics Teacher*. 91(8) 708-713

Epp S. (1999) The language of quantification in mathematics instruction. In Stiff L., Curcio F. (eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 188-197). Reston, VA: NCTM.

Fallis Don (1996) Mathematical Proof and the Reliability of DNA Evidence. *American Mathematical Monthly* 103 (6) 491-497.

Fawcett H. P. (1938). *The nature of proof.* NCTM Year Book. New York : Columbia University Teachers College.

Feferman S. (1971) What does logic have to tell us about mathematical proof. *The Mathematics Intelligencer* 2(1) 20-24.

Fishbein E. (1982) Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics* 3(2) 9-18 et 24.

Flores A. (1999) Mechanical arguments in geometry. *Primus* 9(3) 241-250.

Galbraith P. L. (1981) Aspects of proving: A clinical investigation of process. Educational Studies in Mathematics, 12,1-28.

Gibson D. (1998) Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In: Schonfeld A., Kaput J., and E. Dubinsky E. (eds.) *Research in collegiate mathematics education III.* (Issues in Mathematics Education Volume 7 pp.284-307). American Mathematical Society.

Gras R. & Giorgiutti I. (1996) Computer Aided Proofs in School Geometry. In: Laborde J.-M. (ed.) *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp.63-81). Berlin: Springer-Verlag.

Guin D. (1996) A Cognitive Analysis of Geometry Proof Focused on Intelligent Tutoring Systems. In: Laborde J.-M. (ed.) *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp.82-93). Berlin: Springer-Verlag.

Hadar N. (1977) Children's conditional reasoning: an investigation of 5th graders' ability to distinguish between valid and fallacious inferences.*Educational Studies in Mathematics* 9, 98-140.

Hadar N. (1977) Children's conditional reasoning : an investigation of 5th graders" ability to distinguish betwee, valid and fallacious inferences. *Educational Studies in Mathematics* 8(4) 413-418.

Halmos P.R. (1971) How to Write Mathematics.*L'enseignement mathımatique* 2(16) 123-152.

Hanna G. S. (1971) Testing students' ability to do geometry proof : a comparaison of three objective item types.*Journal for Research in Mathematics Education* 2, 213-217.

Hanna G. (1983) *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto : The Ontario Institut for Studies in Education.

Hanna G. (1989) More than formal proof. *For the learning of mathematics* 9(1), 20-25.

Hanna G. (1990) Some pedagogical aspects of proof. *Interchange* 21(1) 6-13.

Hanna G. (1991) Mathematical proof. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer, Dordrecht.

Hanna G. (1995) Challenges to the Importance of Proof. *For the learning of Mathematics* 15(3) 42-49.

Hanna G. (1995) Review of M. Detlefsen (ed.) Proof and Knowledge in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 28 (1) 87-90.

Hanna G. (1996) The role of proof in mathematics education. *Joetsu Journal of Mathematics Education* 11, 155-168. (In Japanese)

Hanna G. (1998) Proof as understanding in geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20(2&3) 4-13.

Hanna G. & Jahnke N. (1993) Proof and Application. *Educational studies in Mathematics* 24(4) 421-438.

Hanna G., Jahnke N. (1996) Proof and Proving. In: Bishop A. *et al* (eds.) (pp.877-908). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna G. (2000) A critical examination of three factors in the decline of proof. *Interchange* 31(1) 21-33.

Harel G., Sowder L (1998) Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: Schonfeld A., Kaput J., and E. Dubinsky E. (eds.) *Research in collegiate mathematics education III*. (Issues in Mathematics Education, Volume 7, pp. 234-282). American Mathematical Society.

Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation

Hasegawa J. & Mii M. (1997) The analysis on the process of geometric proof problems of ninth graders. *Journal of JASME: Research in Mathematics Education* 3, 137-146. (in Japanese)

Hazzan O. & Leron U. (1996) Students' use and misure of mathematical theorems: The case of Lagrange's theorem. *For the Learing of Mathematics* 16(1) 23-26.

Healy L. & Hoyles C. (2000) A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(4) 396-428

Herbst P. G. (1998) *What works as proof in the mathematics class*. Ph.D. Dissertation, The University of Georgia, Athens GA. USA

Hersh R. (1993) Proving is convincing and explaining, *Educational studies in Mathematics* 24(4) 389-399.

Hoyles C. (1997) The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics* 17(1) 7-16.

Hoyles C. & Jones K. (1998), Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: Mammana C., V. Villani V. (eds) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.121-128) Dordrecht: Kluwer.

Holland-Minkley A.M., Barzilay R. & Constable R.L. (1999) Verbalization of High-Level Formal Proofs. In: *National Conference on Artificial Intelligence* (AAAI-99).

Izen S. P. (1998) Proof in modern geometry. *Mathematics Teacher*. 91(8) 718-720

Jones K. (1997) Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. *Mathematics Education Review* 9, 23 - 32

Jones K. (2000) The Student Experience of Mathematical Proof at University Level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 31(1) 53-60.

King I. L. (1973) A formative development of elementary school unit on proof. *Journal for Research in Mathematics Education* 4, 57-63.

Kitcher P. (1977) On the uses of rigorous proof, *Science* 196, pp. 782-783.

Kleiner I. (1991) Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective. *Mathematics Magazine* 64 (5) 291-314.

Kleiner I. & Movshovitz-Hadar N. (1990) Aspects of the Pluralistic Nature of Mathematics. *Interchange* 21(1) 28-37.

Kleiner I. & Movshovitz-Hadar N. (1997) Proof: A many-splendored thing. *The mathematical intelligencer* 19 (3) 16-26

Knuth E. J. & Elliott R. (1998) Characterizing students's understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher*. 91(8) 714-717

Koedinger K. R. & Anderson J. R. (1993) Effective use of intelligent software in high school math classrooms. *Artificial Intelligence in Education*. Edimburg.

Koedinger K. R. (1998) Conjecturing and argumentation in high school geometry students. In Lehrer, R. and Chazan D. (eds.) *New Directions in the Teaching and Learning of Geometry*. Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer G. (1995) The ethnography of argumentation. In: Cobb. P., Bauersfeld H. (eds.) *The emergence of mathematical meaning: interaction in the classroom culture*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Krummheuer G. (2000) Mathematics learning in narrative classroom cultures: studies of argumentation in primary mathematics education [1]. *For the Learning of Mathematics.* 20(1) 22-32

Kumagai K. (1998) The justification process in a fifth grade mathematics classroom: From a social interactionist perspective. Reports of Mathematical Education (*Journal of Japan Society of Mathematical Education* (80) Supplementary Issue 70, 3-38 (in Japanese).

Kunimoto K. (1995) A study on a conception of proof of junior high school students. *Journal of JASME: Research in Mathematics Education* 1, 117-124. (in Japanese)

Kunimune S. (1987) The study on development of understanding about the significance of demonstrations in learning geometrical figures. Reports of Mathematical Education. *Journal of Japan Society of Mathematical Education* (69) Supplementary Issue 47-48, 3-23 (in Japanese).

Lakatos I. (1976) Proofs and Refutations. Cambridge : Cambridge University Press (Ελληνική έκδοση: Αποδείξεις και ανακατασκευές, Τροχαλία, Αθήνα, 1996.

Lampert M. (1990) When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer. *American Educational Research Journal* 27(1) 29-63

Lampert M. (1992). Practices and problems in teaching authentic mathematics. In F. Oser, A. Dick, and J.L. Patry (Eds.) *Effective and responsible teaching: the new synthesis.* San Francisco: Jossey Bass.

Lamport, L. (1995) How to write a proof. *American Mathematical Monthly*, 102(7), 600-608

Lars C. J. (1974) Structural and linguistic variables that constribute to difficulty in the judgement of simple verbal deductive arguments. *Educational Studies in Mathematics* 5,493-505.

Leron U. (1983) Structuring mathematical proofs. *American Mathematical Monthly* 90, 174-185.

Leron U. (1985) A direct approach to indirect proofs. *Educational Studies in Mathematics* 16(3) 321-325.

Leron U. (1985) Heuristic presentation: The role of structuring. *For the Learning of Mathematics* 5(3) 7-13.

Lester F. K. (1975). Developmental aspects of children's ability to understand mathematical proof.*Journal for Research in Mathematics Education* Jan., 14-25.

Lovett, M.C. & Anderson, J.R. (1994) Effects of solving related proofs on memory and transfer in geometry problem solving. *J of Experimental Psychology,* 20(2), 366-378

Lowell K. (1971) The development of the concept of mathematical proof in abler pupils. In: National Council of Teachers of Mathematics, Piagetian cognitive development research and mathematics education, Reston, Ca., 66-80.

Lynch M. P. (1998) *Truth in context.* Cambridge, MA: The MIT Press.

MacKernan J. (1996) What's the point of proof? *Mathematics Teaching* 155, 14-20

Maher C. A. & Martino A. M. (1996) The development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27(2) 194-214.

Maher C. A. & Martino A. M. (1996) Young children invent method of proof: The gang of four. In: Steffe L., Nesher P., Cobb P., Goldin G., Greer B. (eds.) *Theories of Mathematical Learning*. (pp. 431-447) Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

Mancuso P. (2000) Mathematical explanation. In Grosholz E., Breger H. (eds.) *The Growth of Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Man-Keung Siu (1993) Proof and Pedagogy in Ancient China: Examples from Liu Hui's Commentary on Jiu Zhang Suan Shu.*Educational Studies in Mathematics* 24(4) 345-357.

Manin Y. I. (1971) How convincing is a proof? (reprint from "A course on mathematical logic"). *The Mathematics Intelligencer* 2(1) 17-18

Mariotti M. A. (1997) Justifying and Proving: Figural and Conceptual Aspects. in: Hejny M., Novotna J. (eds.) *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education,* Prometheus Publishing House, Prague, 21-26).

Martin W. G. & Harel G. (1989) Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(1) 41-51.

Martino A. M., & Maher C. (1999) Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us. *Journal of mathematical behavior* 18 (1) 53-78.

McClure J. E. (2000) Start where they are: Geometry as an introduction to proof. *The American Mathematical Monthly* 107(1) 44-52

Miyazaki M. (1992) Students'activity in order to show the generality of a conjecture: How does one student use a generic example to make an explanation? Reports of Mathematical Education. *Journal of Japan Society of Mathematical Education* (74) Supplementary Issue 57, 3-19 (in Japanese).

Miyazaki M. (2000) Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 41(1) 47-68.

Moore R. C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics* 27, 249-266.

Movshovitz-Hadar N. (1988) Stimulating Presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the Learning in Mathematics* 8(2) 12-19.

Movshovitz-Hadar N. (1988) School mathematics theorems, an endless source of surprise. *For the Learning of Mathematics* 8 (3) 34-40.

Movshovitz-Hadar N. & Hadass R. (1988) Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics* 21 (3) 265-287.

Neubrand M. (1989) Remarks on the acceptance of proofs: the case of some recently tackled major theorems. *For The Learning Of Mathematics* 9 (3) 2-6.

Neumann B. H. (1979) Proofs. *The Mathematics Intelligencer* 2(1) 18-19

Netz R. (1998) Greek mathematical diagrams: their use and their meaning. *For the Learning of Mathematics* 18(3) 33-39

Netz R. (1999) *The Shaping of deduction in Greek mathematics: A study in cognitive history*. Cambridge University Press.

Nunokawa K. (1996) Applying Lakatos' Theory to the Theory of Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics* 31, 269-293.

Nunn T. (1925) The sequence of theorems in school geometry. *Mathematics Teacher* 18, 321-332

O'Brien T. C. (1972) Logical thinking in adolescents. *Educational Studies in Mathematics* 4(4) 401-428.

Otte M. (1980) On the Question of the Developement of Theoritical Concepts. *Communication and Cognition* 1(13) 63-76.

Otte M. (1990) Intuition and formalism in mathematical proof. *Interchange* 21(1) 59-64.

Otte M. (1994) intuition and logic in mathematics. In : Robitaille D. F., Wheeler D. H., Kieran C. (eds.) *Selected lectures from the 7th International Congress in Mathematical Education* (pp.271-284) Sainte-Foy : Les Presses de l'Universitı Laval.

Otte M. (1994) Mathematical knowledge and the problem of proof. *Educational Studies in Mathematics* 26(4) 299-321.

Pickett H. C. (1938) *An analysis of proofs and solutions of exercises used in plane geometry tests*. New York: Teachers college, Columbia University.

Porteous K. (1990) What do children really believe? *Educational Studies In Mathematics* 21(6) 589-598

Prince A. A. (1998) Prove it! *Mathematics Teacher*. 91(8) 726-728

Py D. & Nicolas P. (1990) MENTONIEZH: A geometry ITS for figure drawing and proof setting. *Artificial Intelligence in Education* 1(3) 41-55.

Rips L. J. (1994) The psychology of proof: deductive reasoning in human thinking. The MIT Press, Cambridge, MA.

Quast W. G. (1968) *Geometry in the high schools of the United States: An historical analysis from 1890 to 1966*. Ed. D. Dissertation, Rutgers-The State University of New Jersey. University Microfilms 68-9162. Ann Arbor, MI.

Rav Y. (1999) Why do we prove theorems. Philosophia Mathematica 3(7), 5-41.

Redmond C., Federici M. P., Platte D. M. (1998) Proof by contradiction and the electoral college. *Mathematics Teacher*. 91(8) 655-658

Reid D. A. (1995) Proving to Explain. Psychology of Mathematics Education XIX Conference, Recife, Brazil, vol.3, 137-144.

Reid D. A. (1998) Sharing ideas about teaching proving. *Mathematics Teacher*. 91(8) 704-706

Retzer K. A. (1984) Proofs with visible inference schemes. *School Science and Mathematics* 84(5) 367-376.

Retzer K. A. (1984) Inferential logic in geometry. *School Science and Mathematics* 84(4) 277-284.

Reynolds J. (1967) *The Development of the Concept of Proof in Grammar School Pupils*. PhD Thesis. University of Nottingham.

Richards E. (1892) Old and new methods in elementary geometry. *Educational Review*, 3, 31-39.

Roberge J. J. (1970) A study of children's ability to reason with basic principles of deductive reasoning. *American Educational Research Journal* 7, 583-596.

Roberge J. J. (1972) Recent research on the development of children's comprehension of deductive reasoning schemes. *School Science and Mathematics* 72, 197-200.

Roberge J. J. (1975) Development of comprehension of logical connectives in symbolic or verbal form. *Educational Studies in Mathematics* 6(2) 207-212.

Rodd M. M. (2000) On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than proof. *Mathematical Thinking and Learning* 2(3) 221-244.

Ross K. A. (1998) Doing and Proving: The place of Algorithms and Proof in School Mathematics *American Mathematical Monthly* , 252-255.

Rossi H. (1995) When is the best proof not the best proof? *CBMS Issues in Mathematics Education (American Mathematical Society)*. 5, 31-53.

Ryan J. (1928) Two methods of teaching geometry: syllabus vs. textbook. *Mathematics Teacher* 21, 31-36

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem solving*. Orlando : Academic Press.

Schoenfeld A. (1989) Exploration of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal of Research in Mathematics Education* 20(4) 338-355.

Schoenfeld A. (1991) On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In: Voss J. F., Perkins D. N., Segal J. W. (eds.) *Informal Reasoning and Education* (pp. 311-343). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Schramm R. (1988) How to develop the students' capacity for dealing with problems of proof? *Zentralblatt fór Didaktik des Mathematik.* 88/3 104-107.

Schumann H., de Villiers M. D. (1993) Continuous variation of geometric figures: interactive theorem finding and problems in proving. *Pythagoras* 31, 9-20.

Sekiguchi Y. (1991) *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom*. Ed. D. Dissertation, The University of Georgia. University Microfilms 9124336. Ann Arbor, MI.

Sekiguchi Y. (1999) Cognitive structures underlying conceptions of mathematical proof. *Tsukuba Journal of Educational Studies in Mathematics* 18, 45-56.

Selden J., Selden A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151.

Senk S. (1985) How well to students write proofs ? *Mathematics teacher* 78(6) 448-456.

Senk S. (1989) Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 209-321.

Sımadıni Z. (1984) Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics* 4(1) 32-4.

Sfard A. (2000) Steering discourse between metaphors and rigor: using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(3) 296-327

Shimizu Y. (1998) The influence of "supposed others" in the social process of making a mathematical definition. *Tsukuba Journal of Educational Studies in Mathematics Education* 17, 195-204.

Shumway R. J. (1974) Negative instances in mathematical concepts acquisition : transfer effects between the concepts of commutativity and associativity. *Journal of Research in Mathematics Education* 5(1) 197-211.

Shutts G. (1892) Old and new methods in geometry. *Educational Review. 3*, 264-266.

Silver J. A. (1998) Can computers be used to teach proof? *Mathematics Teacher*. 91(8) 660-663

Simon M. A. (1996) Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics* 30(2) 197-210.

Smith E. P. & Henderson K. B. (1959) Proof. In: Fawcett H., Hach A., Junge C., Syer H., van Engen H., Jones P. (Eds.) *The growth of mathematical ideas K-12*. Twenty-fourth yearbook. (pp. 111-181). Washington, DC: NCTM.

Smith R. (1940) Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. Part I : Analysis of errors. *Mathematics Teacher* 33, 99-134.

Smith R. (1940) Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. Part II : Description and evaluation of methods used to remedy errors. *Mathematics Teacher* 33, 150-178.

Solow D. (1984) Reading, writing and doing mathematical proofs. Book 1 : Proof technics for geometry.

Sowder L. & Harel G. (1998) Types of students' justifications. *Mathematics Teacher*. 91(8) 670-675

Steen L. (1999) Twenty questions about mathematical reasoning. In Stiff L., Curcio F. (eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 270-285). Reston, VA: NCTM.

Strδier R. (1996) Students' Constructions and Proof in a Computer Environment &emdash; Problems and Potentials of a Modelling Experience. In: Laborde J.-M. (ed.) *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp.203-217). Berlin: Springer-Verlag.

Stroup P. (1926) When is a proof not a proof. *Mathematics Teacher* 19, 499-505

Szombathelyi A. & Szarvas T. (1998) Ideas for developing students' reasoning: a hungarian perspective. *Mathematics Teacher*. 91(8) 677-681

Tall D. (1989) The nature of Mathematical Proof. *Mathematics Teaching* 128, 28-32.

Thurston, W.P. (1994) On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2) 161-177.

Touton F. C. (1919) *Solving geometric originals*. Contributions to Education No 146, 1924. New York: Teachers college, Columbia University.

Van Dormolen J. (1977) Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics* 8(1) 17-34.

Van Schalkwijk L., Bergen T. & Van Roou A. (2001) Learning to prove by investigation: A promising approach in Dutch secondary education. *Educational Studies in Mathematics* 43(3) 293-311.

Vinner S. (1976) The Naive Concept of Definition in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 4 (7) 413-429.

Vollrath H.-J. (1994) On the appreciation of theorems by students and teachers. In : Robitaille D. F., Wheeler D. H., Kieran C. (eds.) *Selected lectures from the 7th International Congress in Mathematical Education* (pp.353-365) Sainte-Foy : Les Presses de l'Universitı Laval.

Wertheimer R. (1990) The geometry proof tutor : an intelligent computer-based tutor in the classroom. *Mathematics Teacher* April, 308-317.

Wheeler D. (1990) Aspects of mathematical proof. *Interchange* 21(1) 1-5.

Williams E. (1980) An Investigation of Senior High School Student's Understanding of the Nature of Mathematical Proof. *Journal for Research in Mathematics Education* 11, 165-166.

Winicki-Landman G. (1998) On proofs and their perfomances as works of art. *Mathematics Teacher*. 91(8) 722-725

Winslψw C. (1998) A linguistic approach to the justification problem in mathematics education. For the Learning of Mathematics 18(1) 10-16.

Wittmann E. C. & Mὸller G. (1990) When is a proof a proof ? *Bulletin de la Socitıtı Mathımatique Belge* 1, 15-40

Wood T. (1999) Creating a context for arguments in the mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2) 171-191.

Yackel E. & Cobb P. (1996) Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 27(4) 458-477.

Δημοσιεύσεις σε γαλλική γλώσσα

Ag Almouloud S. (1992) Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve : des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12(2/3) 271-318.

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 8(3) 267-312.

Arsac G. (1988) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques.* 9(3) 247-280.

Arsac G. & Mantes M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics 33*, 21-43.

Arsac G. (1999) Variations et variables de la démonstration géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(3) 357-390.

Balacheff N. (1982) Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*. 3(3) 261-304.

Balacheff N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18(2) 147-176.

Barbin E. (2000) Pourquoi démontrer ? *Les cahiers de Science & Vie*. 55, 42-48

Beck I. & Vaillant M. (1998) Comprendre un texte argumentatif. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 6, 89-115.

Casselman B. (2001) Images et preuves. *Gazette des mathématiciens* 88, 35-52.

Castella C. (2001) Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes: le fonctionnement mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques* 20(3) 331-380.

Chayé J. (1971) Apprentissage de la déduction.*Educational Studies in Mathematics* 4(2)

Delahaye J.-P. (2000) Raccourcis dans les démonstrations. *Pour la Science,* 268, 96-10

Duval R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics* 22(3) 233-261.

Duval R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 20 (2) 135-170

Gras R. & Ag Almouloud S. (1994) Le temps, analyseur de comportements d'élèves dans l'environnement DEFI. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(1/2) 251-274.

Grenier D. & Payan C. (1998) Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1) 59-100.

Keskessa B. (1994) Preuve et plan de signification: une hypothèse.*Recherches en didactique des mathématiques*. 14(3) 357-392.

Konior J. (1972) Essai de détermination des causes d'échec des élèves dans la recherche de démonstrations. *Educational Studies in Mathematics* 4, 466-483.

Legrand M. (1990) Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 9(3) 365-406.

Mesquita A. L. (1989) Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. *Educational Studies in Mathematics* 20, 55-57.

Motte M. (1971) En marge de l'apprentissage de la déduction. *Educational Studies in Mathematics* 4(2)

Pastre D. (1978) Observation du mathématicien : aide à l'enseignement et à la démonstration automatique de théorèmes. *Educational Studies in Mathematics* 9(4) 461-502.

Perelman Ch. (1970) Le champ de l'argumentation. Bruxelles : Presses Universitaires.

Plantin C. (1990) Essais sur l'argumentation. Paris: Editions Kimé.

Piaget J. & Inhelder B. (1955) De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. Paris: P.U.F.

Piaget J. (1978) La dialectique des prédicats, concepts, jugement et inférence. Etude génétique. *Archives de psychologie* XLVI (179) 235-250.

Siwek H. (1973) Logique formelle et raisonnement des élèves dans l'enseignement mathématique.*Educational Studies in Mathematics* 5, 23-37