Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης — Μιγαδικοί Αριθμοί

Κωνσταντίνος Κριθαρίδης

10 Αυγούστου 2023

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας και ρίζες της μονάδας

Συμβολισμοί	
ανν	αν και μόνο αν
τ.ω.	τέτοιο ώστε
$x \in S$	το x ανήκει στο σύνολο S
$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{R}[x]$	το σύνολο των πολυωνύμων ως προς x με πραγματικούς συντελεστές
$\mathbb{C}[x]$	το σύνολο των πολυωνύμων ως προς x με μιγαδικούς συντελεστές
$degP$	ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$
i	η φανταστική μονάδα τ.ω. $i^2 = -1$
e	ο αριθμός του Euler, $e \approx 2.71828$
$z \in \mathbb{C}$	$z = a + bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Το a λέγεται πραγματικό μέρος του z, $a = Re\{z\}$, ενώ το b φανταστικό μέρος του z, $b = Im\{z\}$
$\overline{z}$	ο συζυγής του $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $\overline{z} = a - bi$

Θεώρημα 1.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)**.** *Κάθε πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$ με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες (με πολλαπλότητα).*
Ισοδύναμα, κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον 1 μιγαδική ρίζα.

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Πρόταση 1.2. *Αν $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $P(z) = 0$, $z = a + bi \notin \mathbb{R}$, τότε $P(\overline{z}) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $P(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$.
$P(z) = 0 \Rightarrow a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$
$\Rightarrow \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} = 0$
$\Rightarrow \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$
$\Rightarrow \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = 0$
$\Rightarrow a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$
$\Rightarrow P(\overline{z}) = 0.$ □

Πόρισμα 1.2.1. *Αν $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ μη σταθερό, τότε $P(x)$ γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{R}[x]$.*

Απόδειξη. Έστω $z = a + bi$ ρίζα του $P(x)$ (υπάρχει λόγω του Θεωρήματος 1.1).
Αν $b = 0$, τότε $(x - a)|P(x) \Rightarrow P(x) = (x - a)q(x)$, με $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $degq < degP$.
Αν $b \neq 0$, τότε $(x - z)|P(x)$ και από την Πρόταση 1.2 $(x - \overline{z})|P(x)$
$\Rightarrow (x - z)(x - \overline{z})|P(x)$
$\Rightarrow (x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z})|P(x)$
$\Rightarrow (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)|P(x)$
$\Rightarrow P(x) = (x^2 - cx + d)q(x)$, με $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $degq < degP - 1$. □

Πόρισμα 1.2.2. *Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον 1 πραγματική ρίζα*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

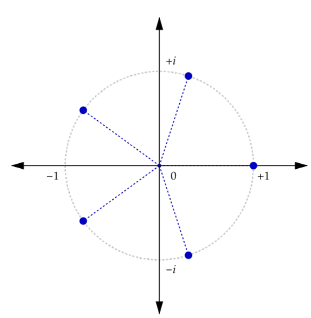
Πρόταση 1.3. *Η εξίσωση $z^n = 1$ έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες και δίνονται από τα:*

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

για $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.
Οι ρίζες αυτές λέγονται n-οστές ρίζες της μονάδας.

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Γεωμετρική Ερμηνεία:
Οι n-οστές ρίζες τις μονάδας έχουν μέτρο 1 και πρωτεύον όρισμα (γωνία με τον ημιάξονα των θετικών πραγματικών αριθμών) $\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.
Αυτό σημαίνει πως τα z_k βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο και σχηματίζουν τις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου με μια κορυφή στο σημείο $z_0 = 1$. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνονται οι πέμπτες ρίζες της μονάδας.



Πηγή: Βικιπαίδεια

Πρωταρχικές ρίζες της μονάδας

Ορισμός 2.1 (Πρωταρχικές n-οστές ρίζες της μονάδας)**.** *Ένας μιγαδικός αριθμός z λέγεται πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας όταν είναι n-οστή ρίζα της μονάδας αλλά όχι m-οστή ρίζα της μονάδας για κάθε $m = 1, 2, \ldots, n-1$.*
Δηλαδή, $z^n = 1$ και $z^m \neq 1$, για κάθε $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Παράδειγμα 2.1.1. *Οι τέταρτες ρίζες της μονάδας από την Πρόταση 1.3 είναι οι $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.*
Από αυτές οι πρωταρχικές τέταρτες ρίζες της μονάδας είναι τα i και $-i$, αφού ικανοποιούν τον Ορισμό 2.1 όπως επαληθεύεται εύκολα.
Το 1 δεν είναι πρωταρχική 4η ρίζα της μονάδας γιατί είναι και 1η ρίζα της μονάδας (αφού $1^1 = 1$), ενώ το -1 δεν είναι πρωταρχική 4η ρίζα της μονάδας επειδή είναι και 2η ρίζα της μονάδας (αφού $(-1)^2 = 1$).

Πρόταση 2.2. *Αν z είναι πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας, τότε τα $z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}, z^n = z^0 = 1$ είναι όλες οι n-οστές ρίζες της μονάδας.*

Απόδειξη. Αρχικά, όλα τα $z, z^2, \ldots, z^n$ είναι n-οστές ρίζες της μονάδας, αφού το z είναι, οπότε $z^n = 1 \Rightarrow (z^2)^n = (z^n)^2 = 1^2 = 1, \ldots, (z^n)^n = \cdots = 1$.
Ακόμα, είναι διαφορετικές επειδή αν $z^a = z^b$ για κάποια $1 \leq a < b \leq n$, τότε $z^{a-b} = 1$, με $1 \leq a - b < n$, άτοπο, αφού z πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας.
Αφού η εξίσωση $z^n = 1$ έχει το πολύ n διαφορετικές μιγαδικές ρίζες, συμπεραίνουμε πως οι n αυτές δυνάμεις του z είναι όλες οι n-οστές ρίζες της μονάδας. □

Παράδειγμα 2.2.1. *Από το Παράδειγμα 2.1.1 γνωρίζουμε πως το i είναι πρωταρχική 4η ρίζα της μονάδας.*
Συνεπώς, από την Πρόταση 2.2 πρέπει οι 4 πρώτες δυνάμεις του να είναι όλες οι 4ες ρίζες της μονάδας.
Αυτό επαληθεύεται εύκολα, αφού:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

που είναι όλες οι 4ες ρίζες της μονάδας.
Όμοια, για το $-i$, που επίσης είναι πρωταρχική 4η ρίζα της μονάδας, έχουμε:

$$(-i)^1 = -i, (-i)^2 = i^2 = -1, (-i)^3 = -i^3 = i, (-i)^4 = i^4 = 1$$

και έπεται το ίδιο συμπέρασμα.

Πρόταση 2.3. *Αν z είναι πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας, τότε:*

$$z^a = z^b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

Απόδειξη. Έστω $a - b = cn + d$, με $c, d \in \mathbb{Z}, 0 \leq d < n$. Τότε:
LHS $\Leftrightarrow z^{a-b} = 1 \Leftrightarrow z^{cn+d} = 1 \Leftrightarrow (z^n)^c z^d = 1 \Leftrightarrow z^d = 1 \overset{0 \leq d < n}{\Longleftrightarrow} d = 0 \Leftrightarrow n | a - b \Leftrightarrow$ RHS □

Πρόταση 2.4. *Οι πρωταρχικές n-οστές ρίζες της μονάδας είναι $\varphi(n)$ το πλήθος, όπου $\varphi(n)$ η συνάρτηση φ του Euler.*

Απόδειξη. Έστω z μια πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας.
Γνωρίζουμε από την Πρόταση 2.2 πως οι δυνάμεις του z, τα $z^k, 1 \leq k \leq n$, αποτελούν όλες τις n-οστές ρίζες της μονάδας.
Για να είναι το z^k πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας πρέπει (και αρκεί) να μην είναι m-οστή ρίζα της μονάδας για $1 \leq m < n$, οπότε $z^{km} \neq 1$, για κάθε $m = 1, 2, \ldots, n-1$.
Άρα, από την Πρόταση 2.3 παίρνουμε $n \not| km$, για κάθε $m = 1, 2, \ldots, n-1$.
Συνεπώς, πρέπει (και αρκεί) το k να είναι σχετικά πρώτο με το n.
Αλλιώς, αν υπάρχει $d \neq 1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $d|n$ και $d|k$, οπότε $k = xd, x \in \mathbb{N}$, παίρνοντας $m = \frac{n}{d} \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, έχουμε $km = xd\frac{n}{d} = xn$, δηλαδή $n|km$. Άτοπο!
Όμως, το πλήθος των σχετικά πρώτων με το n φυσικών αριθμών μικρότερων του n ισούται με $\varphi(n)$, οπότε τόσες είναι και οι πρωταρχικές n-οστές ρίζες της μονάδας. $\square$

Πόρισμα 2.4.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, εύκολα δείχνεται ότι το $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ είναι πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας (έχουμε $z^n = e^{i2\pi} = 1$ και $z^m = e^{i2\pi\frac{m}{n}} \neq 1$, για $m = 1, 2, \ldots, n-1$).*
Συνεπώς, από την απόδειξη της Πρότασης 2.4 παρατηρούμε ότι το $z^k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ είναι πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας ανν το k είναι σχετικά πρώτο με το n.

Παράδειγμα 2.4.1. *Από το Πόρισμα 2.4.1, παίρνοντας $n = 12$, μπορούμε εύκολα να βρούμε όλες τις πρωταρχικές 12ες ρίζες της μονάδας.*
Θέτοντας $z = e^{i2\pi\frac{1}{12}}$, αυτές είναι οι εξής:

$$z^1 = e^{i2\pi\frac{1}{12}}, z^5 = e^{i2\pi\frac{5}{12}}, z^7 = e^{i2\pi\frac{7}{12}}, z^{11} = e^{i2\pi\frac{11}{12}}$$

4 σε πλήθος, ενώ έχουμε $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$, οπότε και επαληθεύεται η Πρόταση 2.4.