Διδακτική Αξιοποίηση της Τ.Θ.Δ.Δ. 2022

Δημιουργώντας διδακτικές δραστηριότητες από θέματα - νέα ΠΣ

Σωτήρης Δ. Χασάπης

Πρότυπο Γενικό Λύκειο
Αγίων Αναργύρων

Σ.Ε. Μαθηματικών ΔΔΕ Γ΄Αθήνας

06 Σεπτεμβρίου 2023

Περιεχόμενα

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !
2. Οφείλουμε να τα κάνουμε όλα στην τάξη ; Είναι αυτό το ζητούμενο ;

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !
2. Οφείλουμε να τα κάνουμε όλα στην τάξη ; Είναι αυτό το ζητούμενο ;
3. Πώς επηρεάζει τη διδασκαλία μας ;

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !
2. Οφείλουμε να τα κάνουμε όλα στην τάξη ; Είναι αυτό το ζητούμενο ;
3. Πώς επηρεάζει τη διδασκαλία μας ;
4. Μπορούμε να την μετατρέψουμε σε «εργαλείο» για την τάξη μας ;

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !
2. Οφείλουμε να τα κάνουμε όλα στην τάξη ; Είναι αυτό το ζητούμενο;
3. Πώς επηρεάζει τη διδασκαλία μας ;
4. Μπορούμε να την μετατρέψουμε σε «εργαλείο» για την τάξη μας;
5. Χρειαζόμαστε την τράπεζα για όλα αυτά;

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !
2. Οφείλουμε να τα κάνουμε όλα στην τάξη ; Είναι αυτό το ζητούμενο ;
3. Πώς επηρεάζει τη διδασκαλία μας ;
4. Μπορούμε να την μετατρέψουμε σε «εργαλείο» για την τάξη μας ;
5. Χρειαζόμαστε την τράπεζα για όλα αυτά ;

Η Τράπεζα

1. Μεγάλο πλήθος θεμάτων !
2. Οφείλουμε να τα κάνουμε όλα στην τάξη ; Είναι αυτό το ζητούμενο;
3. Πώς επηρεάζει τη διδασκαλία μας ;
4. Μπορούμε να την μετατρέψουμε σε «εργαλείο» για την τάξη μας;
5. Χρειαζόμαστε την τράπεζα για όλα αυτά;

Συσχετισμοί...

Την τάξη την ορίζουμε εμείς, ενταγμένοι με τους μαθητές μας, σε ένα σύνολο με ξεχωριστούς ρόλους καθενός ατόμου σε αυτό. Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν και θα μας παρασχεθούν κάθε φορά εντάσσονται όπως εμείς κατευθύνουμε και ταιριάζουν ακριβώς στην τάξη...

Εντάσσοντας ένα θέμα στη διδακτική διαδικασία

1. Μπορούμε ένα θέμα να το επιλύσουμε στην τάξη ως έχει...

Εντάσσοντας ένα θέμα στη διδακτική διαδικασία

1. Μπορούμε ένα θέμα να το επιλύσουμε στην τάξη ως έχει...
2. ...με την προτεινόμενη λύση.

Εντάσσοντας ένα θέμα στη διδακτική διαδικασία

1. Μπορούμε ένα θέμα να το επιλύσουμε στην τάξη ως έχει...
2. ...με την προτεινόμενη λύση.
3. Μπορούμε να το εντάξουμε «καλύτερα»;

Εντάσσοντας ένα θέμα στη διδακτική διαδικασία

1. Μπορούμε ένα θέμα να το επιλύσουμε στην τάξη ως έχει...
2. ...με την προτεινόμενη λύση.
3. Μπορούμε να το εντάξουμε «καλύτερα»;
4. Διδακτικά περισσότερο ενδιαφέρον;

Εντάσσοντας ένα θέμα στη διδακτική διαδικασία

1. Μπορούμε ένα θέμα να το επιλύσουμε στην τάξη ως έχει...
2. ...με την προτεινόμενη λύση.
3. Μπορούμε να το εντάξουμε «καλύτερα»;
4. Διδακτικά περισσότερο ενδιαφέρον;
5. Απομυθοποίηση ΤΘΔΔ ;

Εντάσσοντας ένα θέμα στη διδακτική διαδικασία

1. Μπορούμε ένα θέμα να το επιλύσουμε στην τάξη ως έχει...
2. ...με την προτεινόμενη λύση.
3. Μπορούμε να το εντάξουμε «καλύτερα»;
4. Διδακτικά περισσότερο ενδιαφέρον;
5. Απομυθοποίηση ΤΘΔΔ ;
6. «Εξεταστικές» εμπειρίες;

1ο Θέμα I

Η διασύνδεση γεωμετρίας-αναλυτικής γεωμετρίας...

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,1\right), B\left(3,3\right)$.

α) Αν $M\left(x,y\right)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

1ο Θέμα ΙΙ

Η διασύνδεση γεωμετρίας-αναλυτικής γεωμετρίας...

α) Έστω $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, τότε:

$d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}, d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$.

β) Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή ισχύει $d_1=d_2$.

γ) Ισχύει ότι

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2$$

Η τελευταία ισότητα παριστάνει τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες για τα σημεία τομής δύο κύκλων με κέντρα τα Α(1,1) και Β(3,3) αντίστοιχα και ίσες ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία Κ,Μ του σχήματος, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

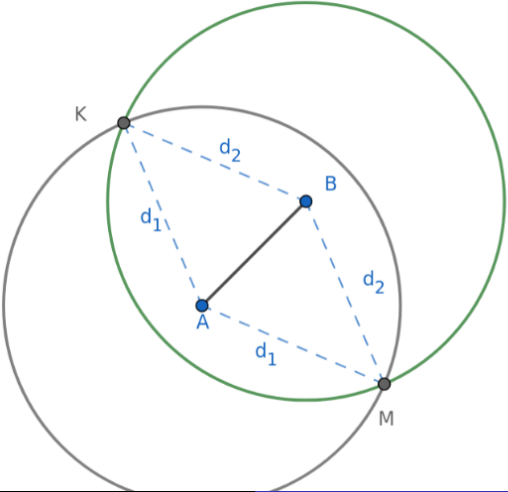
1ο Θέμα III

Η διασύνδεση γεωμετρίας-αναλυτικής γεωμετρίας...

Επιτυγχάνεται η «γεωμετρική μεταφορά» σε εξισώσεις

1ο Θέμα IV

Η διασύνδεση γεωμετρίας-αναλυτικής γεωμετρίας...



1ο Θέμα IV

Η διασύνδεση γεωμετρίας-αναλυτικής γεωμετρίας...

Αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση έχουμε:
$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow$
$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$
$-2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$
Δηλαδή όλα τα σημεία $M\left(x,y\right)$, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB,
ισοδύναμα ικανοποιούν τη σχέση $x+y-4=0$, η οποία είναι επομένως η εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB.

2ο Θέμα I

Μετατρέποντας το θέμα σε δραστηριότητα...

Η διαδικασία...

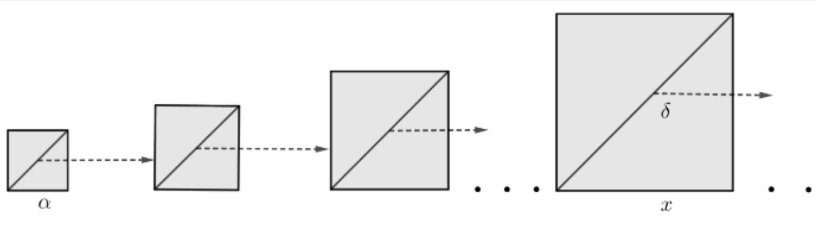
Με την επόμενη διαδικασία εντάσσουμε το μαθητή σε ένα κλίμα διερευνητικής σκέψης, κάτι που αν «κατακτηθεί» μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές περιπτώσεις και να σκεφτεί, πώς δημιούργησε ο θεματοδότης, άρα και να επιλύσει. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:

2ο Θέμα II

Μετατρέποντας το θέμα σε δραστηριότητα...

Το αρχικό θέμα

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



2ο Θέμα I

Μετατρέποντας το θέμα σε δραστηριότητα...

Μέσω διερεύνησης...

1. Μπορούμε να βρούμε σχέσεις μεταξύ των διαδοχικών σχημάτων;
2. Εφόσον κάθε σχήμα έχει πλευρά τη διαγώνιο του προηγουμένου του μήπως αυτές συσχετίζονται μεταξύ τους ;
3. Μπορούμε να παρατηρήσουμε άλλα στοιχεία των σχημάτων που συνδέονται στη διαδοχή αυτήν; (πχ εμβαδόν, περίμετρος, κλπ)
4. Ακολουθεί κάποιο από αυτά τα στοιχεία έναν συγκεκριμένο ειρμό; (πχ αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος, άλλη ακολουθία κλπ.)
5. Αφού γίνει η διερεύνηση δίνεται στους μαθητές και το αντίστοιχο θέμα.

2ο Θέμα II

Μετατρέποντας το θέμα σε δραστηριότητα...

Τι κερδίζουν οι μαθητές;

1. Για κάποιους εντείνεται η προσοχή επειδή πρόκειται για ΤΘΔΔ
2. Η διερεύνηση ενεργοποιεί κάποιους άλλους.
3. Αν συνδυάσουμε ομαδική εργασία, έχουμε τα ανάλογα οφέλη.
4. «Επιλύουμε» περισσότερα από ένα θέματα της ΤΘΔΔ.
5. «Απομυθοποιείται» στα μάτια των μαθητών η ΤΘΔΔ και ίσως μειώνεται το άγχος σε σχέση με αυτήν.

3ο Θέμα I

Προβλήματα «καθημερινότητας» στην ΤΘΔΑ

Στην ΤΘΔΔ υπάρχουν αρκετά προβλήματα, όπως μπορούμε να δούμε εδώ τα οποία, αν και είναι προσαρμοσμένα-απλοποιημένα μοντέλα, μπορούν είτε να χρησιμοποιηθούν αυτούσια, είτε να ενταχθούν στη διαδικασία της διερεύνησης.

Πρόβλημα 1 I

Θέμα 4ο

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο σε έναν λογαριασμό μίας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\epsilon\%$ (επίσημο επιτόκιο αύξησης).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με αυτό το επιτόκιο, ύστερα πό δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{100}\right)^2$ €.

β) Ένα κεφάλαιο 15.000€ το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο κατατέθηκε σε μία τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο σε μία άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από δύο έτη, εισπράχθηκε, με υπολογισμό όπως στο α ερώτημα και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811€. Αν y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β, να αποδειχθεί ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης:

$$((1,03)^2 - (1,02)^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$$

Πρόβλημα 1 II

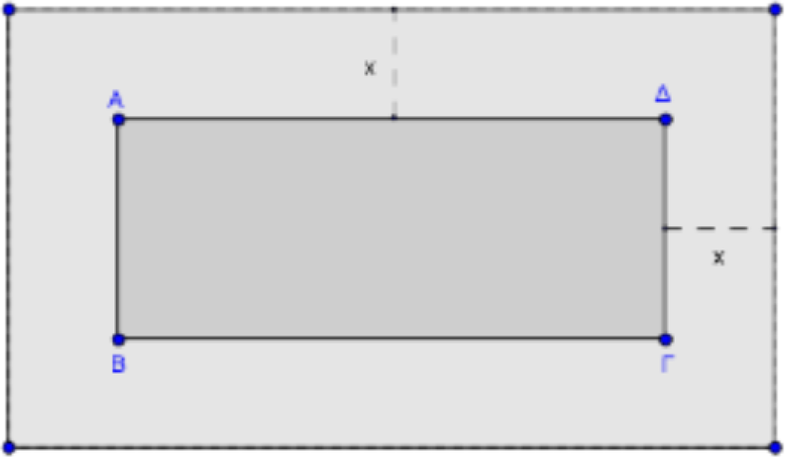
Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

Πρόβλημα 2 Ι

Θέμα 4ο

Η πισίνα σε ένα δημοτικό κολυμβητρήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από αυτήν μια πλακοστρωμένη ζώνη με πλάτος xm $(x > 0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα:

Πρόβλημα 2 II



Πρόβλημα 2 III

1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης αυτής δίνεται από τη σχέση $E(x) = 4x^2 + 80x, x > 0$.
2. Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν Ε=$500m^2$.
3. Πόσο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$;

Διαφοροποιήσεις:

1. Μπορεί να ζητείται συνθήκη για συγκεκριμένο κόστος.
2. Μπορεί να δίνεται μόνο το πλαίσιο του προβλήματος και να ζητηθούν πιθανές ερωτήσεις.
3. Δεν είναι απαραίτητο να δίνεται ο τύπος της συνάρτησης
4. Μπορεί να ζητείται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και να γίνει επίλυση ερωτημάτων και ερμηνεία από αυτήν (για Β'λυκείου).

Οδηγίες και θέματα στην ΤΘΔΔ

Κάποια θέματα μπορούν να βοηθήσουν και εντάσσονται καλά στις διδακτικές οδηγίες του ΙΕΠ, με βάση τα υπάρχονται ΠΣ:

Οδηγίες και θέματα στην ΤΘΔΑ

Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών/-ήτριων με το συμβολισμό που τους/τις δυσκολεύει.

ΙΕΠ, 115231-2022 Οδηγίες Άλγεβρα Α΄Λυκείου

Θέμα 13056

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. . .	. . . . . .	. . . .	...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον $10^{ο}$ τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

Οδηγίες και θέματα II

ΙΕΠ - 114342-2022 - ;λγεβρα Β'λυκείου

αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και αμβλείας γωνίας. Το καινούργιο εδώ είναι η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στηρίζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεια, έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόησή του που θα επιτρέψει τη συνεχή χρήση του αντί για την απομνημόνευση τύπων (πχ. για την αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο). Επίσης, να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν.

Οδηγίες και θέματα II

Θέμα 20942

ΘΕΜΑ 2

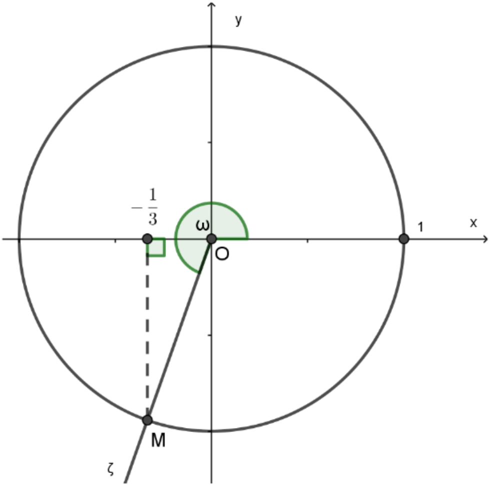
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $x\hat{O}\zeta = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.

α) Να αιτιολογήσετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$.

β) Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω.

γ) Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.

Οδηγίες και θέματα II



«Σημείο(α) Εισόδου» στα θέματα

Ενθάρρυνση για προσπάθεια

Όλοι να μπορούν να κάνουν κάτι σε καθένα από τα θέματα!

«Από κάπου να μπορούν να ξεκινήσουν.»

Θέμα 4ο - 35245

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

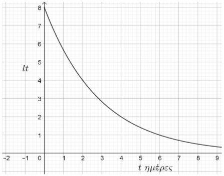
(Μονάδες 08)

«Σημείο(α) Εισόδου» στα θέματα ΙΙ

Ενθάρρυνση για προσπάθεια

Ακόμα κι αν κάποια ερωτήματα μπορεί να αφορούν ύλη που συναντάμε και σε προηγούμενες τάξεις:

;λγεβρα Β'λυκείου - Θέμα 4ο - 21854



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}, c \in \mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.

α) Με βάση το διάγραμμα:

i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

«Σημείο(α) Εισόδου» στα θέματα III

;λγεβρα Β'λυκείου - Θέμα 4ο - 15021

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $\mathrm{O}(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\dfrac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

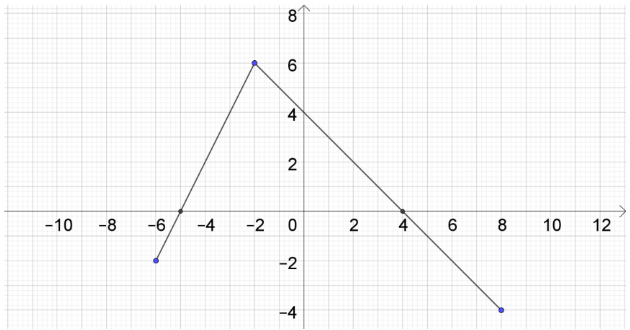
δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta\neq 0$.

(Μονάδες 7)

«Σημείο(α) Εισόδου» στα θέματα IV

;λγεβρα Β′ ΕΠΑΛ - Θέμα 4ο - 14822

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$

Παράδειγμα μετασχηματισμού ενός προβλήματος για τη μοντελοποίηση ή διερεύνηση στα νέα ΠΣ

Στόχος και στο νέο ΠΣ:

Μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές: συλλογισμός, μοντελοποίηση, επικοινωνία, αναστοχασμός.

Δηλαδή είναι επιθυμητό να αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν το μάθημα των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Απλοποίηση

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Απλοποίηση
- Μαθηματικοποίηση

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Απλοποίηση
- Μαθηματικοποίηση
- Μαθηματική επίλυση

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Απλοποίηση
- Μαθηματικοποίηση
- Μαθηματική επίλυση
- Μετάφραση

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Απλοποίηση
- Μαθηματικοποίηση
- Μαθηματική επίλυση
- Μετάφραση
- Επαλήθευση

Ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum

Οι Blum και Ferri πρότειναν έναν κύκλο για τη διαδικασία της μοντελοποίησης των 7 βημάτων, στον οποίο η Μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος και η επίλυσή του, ανεξάρτητα από την πραγματική ζωή από την οποία προέρχεται, φαίνονται σε αυτόν:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Απλοποίηση
- Μαθηματικοποίηση
- Μαθηματική επίλυση
- Μετάφραση
- Επαλήθευση
- Παρουσίαση

Τριγωνομετρία - Άλγεβρα Β' λυκείου

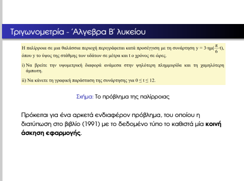
Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3\cdot ημ(\frac{\pi}{6}\cdot t)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

Σχήμα: Το πρόβλημα της παλίρροιας

Πρόκειται για ένα αρκετά ενδιαφέρον πρόβλημα, του οποίου η διατύπωση στο βιβλίο (1991) με το δεδομένο τύπο το καθιστά μία **κοινή άσκηση εφαρμογής**.



Οι μαθητές θα απομονώσουν εύκολα από το κείμενο τον δεδομένο τύπο της συνάρτησης, πιθανώς όποια κι αν ήταν αυτή, ακόμα και άσχετη με το γεγονός που μελετάται και θα τη χρησιμοποιήσουν για να λύσουν το πρόβλημα κατάντιστοιχία με τα πολλαπλές επιμέρους σχετικές ασκήσεις που έχουν δουλέψει. Το ίδιο το πρόβλημα θα ξεχαστεί κατά την ώρα διδασκαλίας.

Σε αυτήν την εφαρμογή του εμπλουτισμένου βιβλίου δε δίνεται άμεσα ο τύπος της συνάρτησης και ο διδάσκων μπορεί να προκαλέσει συζήτηση μέσα στην τάξη σχετικά με τη μεταβολή του ύψους των υδάτων ως προς το χρόνο, να συσχετίσει το χρόνο και το ρολόι με τον τριγωνομετρικό κύκλο ενδεχομένως και να καταλήξει στην ημιτονοειδή καμπύλη.

Σε μία τρίτη εκδοχή θα μπορούσε να μην δίνεται ούτε η πληροφορία της ημιτονοειδούς καμπύλης και να ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης πρώτα και από αυτήν να ταιριάξουν όποια από τις γνωστές τους συναρτήσεις θεωρούν κατάλληλη ή ακόμα κι αν δεν έχει διδαχθεί την ημιτονοειδή συνάρτηση να σχετίσουν τη γραφική παράσταση με τις τιμές και την περιοδικότητα του ημιτόνου, ώστε να διέλθουν στο στάδιο της επέκτασης του ημιτόνου σε συνάρτηση.

Τριγωνομετρία - ΄Αλγεβρα Β΄ λυκείου

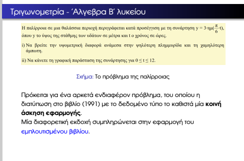
Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3\cdot ημ(\frac{\pi}{6}\cdot t)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 12$.

Σχήμα: Το πρόβλημα της παλίρροιας

Πρόκειται για ένα αρκετά ενδιαφέρον πρόβλημα, του οποίου η διατύπωση στο βιβλίο (1991) με το δεδομένο τύπο το καθιστά μία **κοινή άσκηση εφαρμογής**.
Μία διαφορετική εκδοχή συμπληρώνεται στην εφαρμογή του εμπλουτισμένου βιβλίου.



Οι μαθητές θα απομονώσουν εύκολα από το κείμενο τον δεδομένο τύπο της συνάρτησης, πιθανώς όποια κι αν ήταν αυτή, ακόμα και άσχετη με το γεγονός που μελετάται και θα τη χρησιμοποιήσουν για να λύσουν το πρόβλημα κατάντιστοιχία με τα πολλαπλές επιμέρους σχετικές ασκήσεις που έχουν δουλέψει. Το ίδιο το πρόβλημα θα ξεχαστεί κατά την ώρα διδασκαλίας.

Σε αυτήν την εφαρμογή του εμπλουτισμένου βιβλίου δε δίνεται άμεσα ο τύπος της συνάρτησης και ο διδάσκων μπορεί να προκαλέσει συζήτηση μέσα στην τάξη σχετικά με τη μεταβολή του ύψους των υδάτων ως προς το χρόνο, να συσχετίσει το χρόνο και το ρολόι με τον τριγωνομετρικό κύκλο ενδεχομένως και να καταλήξει στην ημιτονοειδή καμπύλη.

Σε μία τρίτη εκδοχή θα μπορούσε να μην δίνεται ούτε η πληροφορία της ημιτονοειδούς καμπύλης και να ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης πρώτα και από αυτήν να ταιριάξουν όποια από τις γνωστές τους συναρτήσεις θεωρούν κατάλληλη ή ακόμα κι αν δεν έχει διδαχθεί την ημιτονοειδή συνάρτηση να σχετίσουν τη γραφική παράσταση με τις τιμές και την περιοδικότητα του ημιτόνου, ώστε να διέλθουν στο στάδιο της επέκτασης του ημιτόνου σε συνάρτηση.

Τριγωνομετρία - Άλγεβρα Β΄ λυκείου

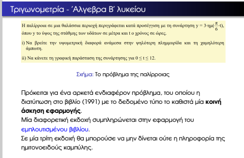
Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

Σχήμα: Το πρόβλημα της παλίρροιας

Πρόκειται για ένα αρκετά ενδιαφέρον πρόβλημα, του οποίου η διατύπωση στο βιβλίο (1991) με το δεδομένο τύπο το καθιστά μία **κοινή άσκηση εφαρμογής**.
Μία διαφορετική εκδοχή συμπληρώνεται στην εφαρμογή του εμπλουτισμένου βιβλίου.
Σε μία τρίτη εκδοχή θα μπορούσε να μην δίνεται ούτε η πληροφορία της ημιτονοειδούς καμπύλης.



Οι μαθητές θα απομονώσουν εύκολα από το κείμενο τον δεδομένο τύπο της συνάρτησης, πιθανώς όποια κι αν ήταν αυτή, ακόμα και άσχετη με το γεγονός που μελετάται και θα τη χρησιμοποιήσουν για να λύσουν το πρόβλημα κατάντιστοιχία με τα πολλαπλές επιμέρους σχετικές ασκήσεις που έχουν δουλέψει. Το ίδιο το πρόβλημα θα ξεχαστεί κατά την ώρα διδασκαλίας.
Σε αυτήν την εφαρμογή του εμπλουτισμένου βιβλίου δε δίνεται άμεσα ο τύπος της συνάρτησης και ο διδάσκων μπορεί να προκαλέσει συζήτηση μέσα στην τάξη σχετικά με τη μεταβολή του ύψους των υδάτων ως προς το χρόνο, να συσχετίσει το χρόνο και το ρολόι με τον τριγωνομετρικό κύκλο ενδεχομένως και να καταλήξει στην ημιτονοειδή καμπύλη.
Σε μία τρίτη εκδοχή θα μπορούσε να μην δίνεται ούτε η πληροφορία της ημιτονοειδούς καμπύλης και να ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης πρώτα και από αυτήν να ταιριάξουν όποια από τις γνωστές τους συναρτήσεις θεωρούν κατάλληλη ή ακόμα κι αν δεν έχει διδαχθεί την ημιτονοειδή συνάρτηση να σχετίσουν τη γραφική παράσταση με τις τιμές και την περιοδικότητα του ημιτόνου, ώστε να διέλθουν στο στάδιο της επέκτασης του ημιτόνου σε συνάρτηση.

Πράξεις στο Δημοτικό...

Διαχειρίζοντας το Χριστουγεννιάτικο δώρο.

Ο Δημήτρης έλαβε από το νονό του για Χριστουγεννιάτικο δώρο 20€. Στο βιβλιοπωλείο είχε δει ότι το πιο επιθυμητό του βιβλίο κόστιζε 17,4€. Πόσα χρήματα θα του περισσέψουν αν το αγοράσει;

Πρόκειται για ένα κλασσικό πρόβλημα αφαίρεσης δεκαδικών, στο οποίο οι μαθητές καλούνται απλά να αναγνωρίσουν τη «μαθηματική αναγκαιότητα» της αφαίρεσης και στην συνέχεια να την εκτελέσουν αλγοριθμικά.

Εμπλουτίζοντας τη στόχευση

Διαχειρίζοντας το Χριστουγεννιάτικο δώρο.

Ο Δημήτρης έλαβε από το νονό του για Χριστουγεννιάτικο δώρο 20€. Στο βιβλιοπωλείο είχε δει ότι το πιο επιθυμητό του βιβλίο κόστιζε 17,4€. **Συζητήστε**, τι θα μπορούσε να κάνει ο Δημήτρης για να διαβάσει το αγαπημένο του βιβλίο.

Εμπλουτίζοντας τη στόχευση

Διαχειρίζοντας το Χριστουγεννιάτικο δώρο.

Ο Δημήτρης έλαβε από το νονό του για Χριστουγεννιάτικο δώρο 20€. Στο βιβλιοπωλείο είχε δει ότι το πιο επιθυμητό του βιβλίο κόστιζε 17,4€. **Συζητήστε**, τι θα μπορούσε να κάνει ο Δημήτρης για να διαβάσει το αγαπημένο του βιβλίο.

Μέσα από την ομαδική συζήτηση, είναι πιθανό να προταθεί στις ιδέες να δανειστεί το βιβλίο από κάποια βιβλιοθήκη. Να ρωτήσει φίλους του αν ήδη το έχουν και δε χρειαστεί να το αγοράσει. Να ψάξει μήπως μπορέσει να το βρει μεταχειρισμένο ή να ψάξει μήπως μπορεί να το βρει φθηνότερα σε άλλο βιβλιοπωλείο.
Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές (του Δημοτικού) έρχονται ήδη αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα για το οποίο θα προσπαθήσουν να σκεφτούν ιδέες δικές τους ή συμμαθητών τους που δίνουν διαφορετικές λύσεις σε αυτό. Ενδεχομένως να τις συζητήσουν και

Εντάσσοντας ένα θέμα της ΤΘΔΔ στη διδακτική διαδικασία στα νέα ΠΣ I

Άσκηση 4η (Θέμα 14238 Άλγεβρα Β΄ λυκείου) Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή σες δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = 8 + \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right), 0 \leq t \leq 180$$

1. Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.
2. Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

Εντάσσοντας ένα θέμα της ΤΘΔΔ στη διδακτική διαδικασία στα νέα ΠΣ II

3. Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως $180 sec$;
4. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και: i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

Εντάσσοντας ένα θέμα της ΤΘΔΔ στη διδακτική διαδικασία στα νέα ΠΣ III

$ii.$ να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$

Παρατηρήσεις μετασχηματισμού Ι

Σε αυτό το θέμα οι θεματοδότες παρουσιάζουν έτοιμο το μοντέλο, δίνοντας τη συνάρτηση από την αρχή. Οι ενημερωμένοι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν γνωστούς τύπους και να απαντήσουν στα ερωτήματα που τίθενται.
Μία ενδιαφέρουσα **αναδιάταξη** του προβλήματος θα ήταν να δοθούν τα χαρακτηριστικά της κίνησης, χωρίς να δίνεται έτοιμος ο τύπος της συνάρτησης, ο οποίος να ζητείται. Δηλαδή, μία διατύπωση για συζήτηση στην τάξη, με τα επόμενα χαρακτηριστικά.

Μία πιθανή αναδιατύπωση

« Βρίσκεστε στη ρόδα ενός λούνα παρκ, στην οποία εισήλθατε από το κατώτατο σημείο της που βρίσκεται σε ύψος $2m$ από το έδαφος και η οποία στη συνέχεια κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα(σταθερό ρυθμό). Μετά από τρεις πλήρεις γύρους της ρόδας, οι οποίοι διήρκησαν $180sec$, διαπιστώσατε ότι το gps στο κινητό σας κατέγραψε συνολική διανυθείσα απόσταση σε ύψος ίση με $72m$. »

Μία διατύπωση όπως αυτή, συνοδευόμενη ενδεχομένως και με μία **εικόνα** του προβλήματος, ώστε να δίνεται και **οπτικοποιημένο**, μπορεί να οδηγήσει σε συζήτηση με κύριο ερώτημα την **εύρεση μίας συνάρτησης** που να περιγράφει το ύψος που βρίσκεται το άτομο σε σχέση με το έδαφος.

- Ποια μπορεί να είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή.
- Τι είδους μεταβολή έχει το ύψος σε σχέση με το χρόνο.
- Τι είδους συνάρτησης, από τις γνωστές των μαθητών, μπορεί να περιγράψει το ύψος ενός ατόμου στη ρόδα.
- Ποια ημιτονοειδής συνάρτηση μπορεί να περιγράφει το ύψος που βρίσκεται κάθε φορά ο αναβάτης της ρόδας σε σχέση με το χρόνο.

Δηλαδή, οι μαθητές να οδηγηθούν, ανάλογα και με την τάξη, σε μία σχεδόν κανονική μοντελοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος, με βάση πάντα τις εμπειρίες που διαθέτουν και τις γνώσεις συναρτήσεων που έχουν. Στη συνέχεια είναι δυνατό να ζητηθούν ως υπόλοιπα ερωτήματα, αυτά που ήδη υπάρχουν στο θέμα ή να διαμορφωθούν κατάλληλα.

Αλλά σχετικά με τα νέα ΠΣ θα μας μιλήσει ο επόμενος ομιλητής Σύμβουλος Α΄του ΙΕΠ κ.Στουραΐτης !

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Σωτήρης Δ. Χασάπης

Πρότυπο ΓΕ.Λ. Αγίων Αναργύρων

Μαθηματικός

shasapis@gmail.com