Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Αποδεικνύοντας ανισότητες .

# 1 Εισαγωγή

Οι ανισότητες είναι ένα μέρος της Άλγεβρας της Α΄λυκείου που δυσκολεύουν σε αρκετές περιπτώσεις εξαιτίας έλλειψης εξοικείωσης με τις διαφορές που υπάρχουν στην εργασία με αυτές σε σχέση με τις ισότητες. Οι ασκήσεις αυτές έχουν στόχο να καλύψουν, σε συνέχεια των μαθημάτων στην τάξη αυτό το κενό.

# 2 Υπενθύμιση βασικών ιδιοτήτων

**Ορισμός 1.** *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ θα λέμε ότι ο $a$* ***είναι μεγαλύτερος του*** *$b$ ή ότι* ***ο $b$ είναι μικρότερος του*** *$a$ και θα γράφουμε $a > b$ αν ισχύει ότι $a - b > 0$.*

Αξιωμα 1.
- $a > 0$ *και* $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$.
- $a < 0$ *και* $b < 0 \Rightarrow a + b < 0$.

Αξιωμα 2.
- $a, b$ *ομόσημοι αν και μόνο αν* $a \cdot b > 0$.
- $a, b$ *ετερόσημοι αν και μόνο αν* $a \cdot b < 0$.

Προταση 1 (Μεταβατική ιδιότητα).

$$\boxed{a > b \text{ και } b > c \Rightarrow a > c}$$

*Απόδειξη.* $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ και $b > c \Leftrightarrow b - c > 0$ [1].

Θα δημιουργήσουμε το $a - c$. Έχουμε: $a - c = a - b + b - c$.

Όμως $a - b > 0$ και $b - c > 0$ οπότε από αξίωμα 1 ισχύει: $a - b + b - c > 0 \Rightarrow a - c > 0$. □

[1] Σκέφτομαι ότι για να δείξω $a > c \Leftrightarrow a - c > 0$

Προταση 2 (Πρόσθεση Αριθμού και στα δύο μέλη).

$$\boxed{a > b \Leftrightarrow a + c > b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}}$$

*Απόδειξη.* $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a + c - c - b > 0 \Leftrightarrow (a + c) - (c + b) > 0 \Leftrightarrow a + c > c + b$. □

Προταση 3 (Πολλαπλασιασμός με θετικό).

$$\boxed{a > b \overset{c>0}{\Leftrightarrow} ac > bc}$$

*Απόδειξη.* $ac > bc \Leftrightarrow ac - bc > 0 \Leftrightarrow c(a - b) > 0 \overset{\text{Αξίωμα 2}}{\Leftrightarrow} a - b, c$ ομόσημοι $\overset{c>0}{\Leftrightarrow} a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$. □

Προταση 4 (Πολλαπλασιασμός με αρνητικό).

$$\boxed{a > b \overset{c<0}{\Leftrightarrow} ac < bc}$$

**Άσκηση 1.** *Να αποδειχθεί η προηγούμενη πρόταση.*


shasapis@gmail.com

Πρόταση 5 (Πρόσθεση κατά μέλη).

$$\boxed{a > b \text{ και } c > d \Rightarrow a + c > b + d}$$

*Απόδειξη.*

$$\begin{aligned} a > b &\Leftrightarrow a - b > 0 \\ c > d &\Leftrightarrow c - d > 0 \\ (\text{ από αξίωμα:2 }) &\Leftrightarrow a - b + c - d > 0 \\ \Leftrightarrow a + c - (b + d) > 0 &\Leftrightarrow a + c > b + d \\ &\text{οπότε προκύπτει το ζητούμενο.} \end{aligned}$$

Αρκεί $a+c-(b+d) > 0$

Δηλαδή, μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες ίδιας φοράς, χωρίς να αλλάζει η φορά. □

Πρόταση 6 (Πολλαπλασιασμός κατά μέλη). *Αν $a, b, c, d$ είναι **θετικοί αριθμοί**, τότε:*

$$\boxed{a > b \text{ και } c > d \Rightarrow ac > bd}$$

*Απόδειξη.*

$$\begin{aligned} a > b &\overset{c>0}{\Rightarrow} ac > bc \\ c > d &\overset{b>0}{\Rightarrow} bc > bd \\ \overset{\text{Μεταβατική}}{\Rightarrow} \quad & ac > bc > bd \Rightarrow ac > bd. \end{aligned}$$

Δηλαδή, μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες ίδιας φοράς όταν περιέχουν **θετικούς αριθμούς μόνο**, χωρίς να αλλάζει η φορά. □

**Άσκηση 2.** *Αν $a, b, c, d$ είναι **αρνητικοί αριθμοί**, τότε:*

$$a > b \text{ και } c > d \Rightarrow ac < bd$$

Πρόταση 7. *Ισχύει ότι:*

$$\boxed{a^2 \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}}$$

*Απόδειξη.* Αν $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$.
Έστω $a \neq 0$ τότε $a < 0$ ή $a > 0$.
Για $a > 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
Για $a < 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
Συνεπώς για κάθε $a \neq 0$ ισχύει ότι $a^2 > 0$ και μόνο για $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$. □

Πρόταση 8. $\boxed{a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } b = 0}$ $\boxed{a^2 + b^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } b \neq 0}$

**Άσκηση 3.** *Να εξεταστεί ποιες από τις επόμενες ανισότητες είναι σωστές και ποιες λάθος, αιτιολογώντας γιατί.*

1. $3 \leq 3$
2. $3 \geq 0$
3. $3 \leq 0$
4. $3 \geq -1$

**Παράδειγμα 1.** *Αν $a, b$ ομόσημοι τότε: $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$*

*Απόδειξη.* Αν $a, b$ ομόσημοι, τότε από αξίωμα 2 ισχύει ότι $ab > 0$.
Συνεπώς: $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ □

**Άσκηση 4.** *Να εξεταστεί τι συμβαίνει αν στην προηγούμενη άσκηση οι $a, b$ ήταν ετερόσημοι.*

Πρόταση 9. *Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς* $a, b$ *και* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ *ισχύει ότι:*

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$$

*Απόδειξη.* Για το ευθύ:

Αν $a > b > 0$ τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη με τον εαυτό της όσες φορές θέλουμε. Για δύο φορές παίρνουμε: $a \cdot a > b \cdot b \Leftrightarrow a^2 > b^2$, οπότε για $n$ φορές έχουμε $a^n > b^n$.

Για το αντίστροφο: Έστω $a^n > b^n$ και θα δείξουμε ότι $a > b$.

Θα εργαστούμε με απαγωγή σε άτοπο[2].

Έστω ότι $a = b$ ,τότε όμως ισχύει $a^n = b^n$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω ότι $a < b$, τότε από το αποδεδειγμένο ευθύ θα ισχύει ότι: $a^n < b^n$ το οποίο είναι επίσης άτοπο.

Συνεπω $a > b$. □

[2] Εφόσον έχει αποδειχθεί το ευθύ μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο στο αντίστροφο

**Άσκηση 5.** *Μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο ανισότητες κατά μέλη; Να εξηγήσετε γιατί, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τις προτάσεις που έχουν αποδειχθεί παραπάνω.*

**Παρατηρήσεις.** Για την απόδειξη μίας ανισότητας, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε ισοδύναμα σε μία από τις βασικές:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \tag{1}$$
$$a^2 \geq 0 \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } a = 0 \tag{2}$$
$$a, b \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow ab > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0 \tag{3}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + \cdots \geq 0 \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } a = b = c = \cdots 0 \tag{4}$$
$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } a = b \tag{5}$$

**Παράδειγμα 2.** *Αν* $1 < x < 2$ *και* $3 \leq y < 5$ *να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:*

1. $x + y$
2. $x - y$
3. $\frac{x}{y}$
4. $x^2$
5. $2x + \frac{1}{y}$
6. $\frac{2x-3}{y}$

*Απόδειξη.* Προσέχουμε σε κάθε βήμα την εφαρμογή των ιδιοτήτων!

1. $1 < x < 2$ και $3 \leq y < 5$ οι ανισότητες έχουν ίδια φορά και μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη για να προκύψει το άθροισμά τους: $1 + 3 < x + y < 3 + 5 \Leftrightarrow 4 < x + y < 8$[3].

[3] Όταν προσθέτουμε γνήσια ανισότητα < με ≤ προκύπτει γνήσια ανισότητα.

2. **Δεν** έχουμε **ιδιότητα αφαίρεσης ανισοτήτων** κατά μέλη, οπότε πρώτα θα δημιουργήσουμε το $-y$ και μετά θα προσθέσουμε κατά μέλη. Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τη δεύτερη με $-1$, ώστε να προκύψει το $-y$: $-3 \geq -y > -5$ και έχουμε:

$1 < x < 2$ και $-5 < -y \leq -3$ τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $1 - 5 < x - y < 2 - 3 \Leftrightarrow -4 < x - y < -1$.

3. Επίσης **δεν** έχουμε **ιδιότητα διαίρεσης ανισοτήτων** κατά μέλη, αλλά μόνο πολλαπλασιασμού, οπότε δημιουργούμε τον αντίστροφο και πολλαπλασιάζουμε.

$3 \leq y < 5$ είναι ομόσημοι οι αριθμοί, οπότε από ιδιότητα για αντιστρόφους έχουμε: $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$, στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες θετικών αριθμών με την ίδια φορά κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{1}{5} \cdot 1 < x \cdot \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$$

4. Από πρόταση 9 έχουμε: $1 < x < 2 \Leftrightarrow 1^2 < x^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 4$.

5. Κατασκευάζουμε το $2x$ και το $\frac{1}{y}$ όπως στα προηγούμενα και προσθέτουμε κατά μέλη.

6. Κατασκευάζουμε το $\frac{2x}{y}$ και το $\frac{-3}{y}$ όπως στα προηγούμενα και προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες με ίδια φορά. □

**Παράδειγμα 3.** *Να αποδειχθεί ότι:* $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

*Απόδειξη.* Θα μετασχηματίσουμε την ανισότητα με **ισοδύναμες πράξεις** για να καταλήξουμε σε γνωστή ανισότητα[4].

Έχουμε διαδοχικά:

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Leftarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \Leftarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftarrow (a - b)^2 \geq 0$$

η οποία τελευταία ανισότητα ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική αφού μπορούμε με διαδοχικές συνεπαγωγές και ιδιότητες από την τελευταία να καταλήξουμε στην αρχική=ζητούμενη. □

[4] ΠΡΟΣΟΧΗ! Όταν ξεκινάμε από αυτό που θέλουμε να δείξουμε μας ενδιαφέρει να ισχύει η συνεπαγωγή '$\Leftarrow$'

**Παράδειγμα 4.** *Να αποδειχθεί ότι:* $a^2 + b^2 - 2a + 1 \geq 0$. *Πότε ισχύει η ισότητα·*

*Απόδειξη.*
$$a^2 + b^2 - 2a + 1 = a^2 - 2a + 1^2 + b^2 = (a - 1)^2 + b^2$$

το οποίο είναι $\geq 0$ . Η ισότητα ισχύει μόνο όταν και τα δύο τετράγωνα είναι ίσα με 0, δηλαδή για $a = 1, b = 0$ και μόνο. □

**Παράδειγμα 5.** *Αν* $a > 1 > b$ *τότε να αποδειχθεί ότι:* $a + b > 1 + ab$.

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη μπορεί να παραγοντοποιηθεί:

$$a + b > 1 + ab \Leftrightarrow a + b - 1 - ab > 0 \Leftrightarrow a(1 - b) - (1 - b) > 0 \Leftrightarrow (1 - b)(a - 1) > 0$$

Από αξίωμα 2 το γινόμενο δύο αριθμών είναι θετικό αν και μόνο αν οι αριθμοί αυτοί είναι ομόσημοι. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αρκεί: $1 - b > 0$ και $a - 1 > 0$ ή $1 - b < 0$ και $a - 1 < 0$.

Από τη δοσμένη σχέση $a > 1 > b$ έχουμε: $a - 1 > 0$ και $1 - b > 0$, δηλαδή είναι ομόσημοι, οπότε ισχύει και η αρχική. □

**Άσκηση 6.** *Αν* $x > y$ *τότε* $x + 10 > y + 9$.

**Παράδειγμα 6.** *Να αποδειχθει ότι:* $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

*Απόδειξη.* Η ανισότητα θυμίζει γνωστή ταυτότητα, αλλά λείπει το διπλάσιο γινόμενο. Αν προσθέσουμε $ab$ ή πολλαπλασιάσουμε με 2 θα προκύψει η ταυτότητα.

Δοκιμάζοντας παρατηρούμε ότι:

$$2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

Η τελευταία ισχύει αφού είναι άθροισμα τετραγώνων. Η ισότητα ισχύει για $a = b = a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$. □

**Άσκηση 7** (Ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού μέσου)**.** *Να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \qquad \forall x, y \geq 0$$

**Άσκηση 8.** *Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα δύο αντιστρόφων αρνητικών αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο του -2. Πότε είναι ίσο;*

**Άσκηση 9.** *Να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)\left(b + 1 + \frac{1}{b}\right)\left(c + 1 + \frac{1}{c}\right) \geq 27$$

**Άσκηση 10.** *Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου να αποδειχθεί ότι:*

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc, \quad \forall a, b, c > 0$$

**Άσκηση 11.** *Αν* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *τότε να αποδείξετε ότι:*
*1.* $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
*2.* $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$.

**Άσκηση 12.** *Αν* $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

**Άσκηση 13.** *Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του* $M \in \mathbb{R}$, *ώστε για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς* $a, b$ *με* $a + b = 1$ *να ισχύει ότι:*

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq M$$

*Υπόδειξη 1: Οι μέγιστες - ελάχιστες τιμές συχνά επιτυγχάνονται σε συμμετρικές σχέσεις. Δοκιμάστε για* $a = b = \frac{1}{2}$ *να δείτε τι ακριβώς συμβαίνει.*
*Υπόδειξη 2: Να αποδείξετε ότι:* $ab \leq \frac{1}{4}$.

**Άσκηση 14.** *Αν* $x, y > 0$ *να αποδειχθεί ότι:*

$$x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$$

**Άσκηση 15** (Μέρος 3ου Θέματος Πανελληνίων εξετάσεων 2010)**.** *Να αποδειχθεί ότι:*

$$x + \sqrt{x^2 + 9} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

*Υπόδειξη: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις τιμές του* $x$.

**Άσκηση 16** (Μέρος 4ου Θέματος Πανελληνίων εξετάσεων 2004)**.** *Αν ισχύει ότι* $a^2 - b^2 = -\frac{1}{2}$, $a > b$ *και* $a > 0$, *τότε να αποδειχθεί ότι* $ab < 0$.