Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

'Ομιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

25 Φεβρουαρίου 2021 | Φύλλο 18α | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

Καθηγητής: Σωτήριος Δ. Χασάπης, www.arithmoi.gr

Πυθαγόρειες τριάδες και ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

1 Αναλυτική Απόδειξη Θεωρήματος Πυθαγόρειων Τριάδων

Ορισμός 1.1. *Μία **Πυθαγόρεια τριάδα** είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί x, y, z, ώστε: $x^2 + y^2 = z^2$ και λέγεται πρωταρχική, αν ισχύει ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των x, y, z είναι ίσος με 1.*

Το πρόβλημα εύρεση Πυθαγόρειων τριάδων ήταν γνωστό ήδη στους Βαβυλώνιους από τον 18ο αι. π.Χ. και έγινε πολύ αγαπητό στους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας είχε έναν τύπο για την εύρεση άπειρου πλήθους Πυθαγόρειων τριάδων :

$$x = 2n+1,\ y = 2n^2+2n,\ z = 2n^2+2n+1,\ n \in \mathbb{N}$$

Τα ερωτήματα που προκύπτουν όμως είναι αν υπάρχει ένας τύπος που να δίνει όλες τις Πυθαγόρειες τριάδες και ειδικότερα ένας τύπος που να δίνει όλες τις πρωταρχικές Πυθαγόρειες τριάδες.

Άσκηση 1. *Αν οι x, y, z αποτελούν μία Πυθαγόρεια τριάδα, τότε κάθε πολλαπλάσιό της: $kx, ky, kz,\ k \in \mathbb{Z}$ αποτελεί επίσης πυθαγόρεια τριάδα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή άσκηση χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της πυθαγόρειας τριάδας για την αρχική γνωστή x, y, z. □

Συνεπώς, έχει νόημα να ασχοληθούμε αποκλειστικά με τις πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες.

Θα διερευνήσουμε για αρχή μερικές ιδιότητες που θα έχουν, μέσω κάποιων βοηθητικών προτάσεων (Λήμματα), τα οποία θα μας βοηθήσουν στην τελική απόδειξη.

Λήμμα 1.1. *Αν x, y, z Πρωταρχική Πυθαγόρεια Τριάδα (Π.Π.Τ.) $x^2 + y^2 = z^2$, τότε ένας από τους x, y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο με περιπτώσεις.

- Αν ήταν οι x, y άρτιοι και οι δύο, τότε:

$$\begin{aligned} 2 \mid x, \quad 2 \mid y &\Rightarrow \\ 2 \mid x^2, \quad 2 \mid y^2 &\Rightarrow && \text{(Κοινός διαιρέτης αριθμών)} \\ 2 \mid (x^2+y^2) = z^2 &\Rightarrow && \text{(διαιρεί γραμμικό συνδυασμό αριθμών)} \\ 2 \mid z^2 &\Rightarrow && (p \mid x^2 \Rightarrow p \mid x,\ \text{αν } p \text{ πρώτος}) \\ 2 \mid z. \end{aligned}$$

Συνεπώς $2 \mid x,\ 2 \mid y,\ 2 \mid z$ άτοπο, αφού η x, y, z πρωταρχική.

- Αν ήταν οι x, y περιττοί και οι δύο, τότε:

Αρχικά, το τετράγωνο κάθε ακεραίου είναι ισοϋπόλοιπο του $0(mod4)$ ή του $1(mod4)$, διότι για τα τετράγων άρτιου ή περιττού ισχύουν:

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1 &= 4m+1 \\ (2k)^2 = 4k^2 &= 4m+0 \end{aligned}$$

Εφόσον x, y και οι δύο περιττοί, τότε:
$x^2 \cong 1(mod4),\ y^2 \cong 1(mod4) \Rightarrow x^2+y^2 \cong 2(mod4) \Rightarrow z^2 \cong 2(mod4)$, το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ένας από τους x, y θα είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. □

Λήμμα 1.2. *Αν x, y, z Π.Π.Τ., τότε οι x, y, z είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο και υπάρχουν δύο με κοινό διαιρέτη: $(x, y) = d > 1$. Τότε θα υπήρχε πρώτος $p \mid d$ οπότε $p \mid x,$ και $p \mid y$. Οπότε:

$$p \mid x^2,\ p \mid y^2\ \Rightarrow p \mid (x^2+y^2) = z^2 \Rightarrow p \mid z$$

□

Από Λήμμα 1.1 προκύπτει ότι δεν υπάρχει Π.Π.Τ. που να αποτελείται μόνο από πρώτους αριθμούς.

Λήμμα 1.3. *Αν $ab = c^n$ με $(a, b) = 1$, τότε οι a, b είναι $n-$οστές δυνάμεις. Δηλαδή, υπάρχουν ακέραιοι a_1, b_1, ώστε: $a = a_1^n,\ b = b_1^n$.*

Απόδειξη. Έστω $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ και $b = q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}$ και $c = u_1^{m_1} \cdot u_2^{m_2} \cdots u_t^{m_t}$ οι μοναδικές παραγοντοποιήσεις των a, b, c από το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής. Τότε θα ισχύει ότι: $c^n = u_1^{nm_1} \cdot u_2^{nm_2} \cdots u_t^{nm_t}$

Συνεπώς, θα ισχύει ότι:

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \cdot q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s} = u_1^{nm_1} \cdot u_2^{nm_2} \cdots u_t^{nm_t}$$

Από την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής τα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας είναι ίσα μεταξύ τους, οπότε θα έχουν την ίδια παραγοντοποίηση. Δηλαδή, θα γράφονται ως γινόμενο των ίδιων πρώτων στην ίδια δύναμη ο καθένας. Εφόσον, οι a, b είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε δεν έχουν κοινούς παράγοντες, δηλαδή καθένας από τους p_i, q_j είναι διαφορετικός. Οπότε το πλήθος των όρων στο δεξί μέλος θα είναι ίσο με το πλήθος των όρων στο αριστερό μέλος, δηλαδή: $r + s = t$. Επίσης καθένας από τους πρώτους αριθμούς που εμφανίζονται στην παραγοντοποίηση στο αριστερό μέλος θα εμφανίζονται και στο δεξιό μέλος και μάλιστα στην ίδια δύναμη. Συνεπώς, κάθε δύναμη πρώτου στο αριστερό μέλος θα είναι ίση με κάποια δύναμη πρώτου στο δεύτερο μέλος, δηλαδή: $k_i = nm_j$. Συνεπώς, καθένας εκθέτης στο αριστερό μέλος είναι πολλαπλάσιο του n. Δηλαδή:

$$a = \left(p_1^{\frac{k_1}{n}} p_2^{\frac{k_2}{n}} \cdots p_r^{\frac{k_r}{n}} \right)^n = a_1^n$$

Ομοίως:

$$b = \left(q_1^{\frac{l_1}{n}} q_2^{\frac{l_2}{n}} \cdots q_r^{\frac{l_r}{n}} \right)^n = b_1^n$$

Οπότε έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.1 (Διόφαντος 250 μ.Χ., Αλεξάνδρεια). *Κάθε λύση της Πυθαγόρειας εξίσωσης:*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

ώστε: $(x, y, z) = 1,\ 2|x,\ x, y, z > 0$ *δίνεται από τις σχέσεις:*

$$x = 2st, y = s^2 - t^2, z = s^2 + t^2$$

για $s > t > 0$ *ακεραίους πρώτους μεταξύ τους και* $s \not\cong t(mod2)$.

Απόδειξη. Έστω x, y, z πυθαγόρεια τριάδα με x άρτιο, τότε από λήμμα οι y, z θα είναι περιττοί και συνεπώς οι $z - y,\ z + y$ θα είναι άρτιοι.

Έστω $z - y = 2k$ και $z + y = 2l$, τότε έχουμε:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 4kl$$

Ακόμα: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = kl$. Επίσης, οι k, l είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους, διότι, αν $(k, l) = d > 1$ τότε: $d|(z - y),\ d|(z + y) \Rightarrow d|y$ και $d|z$, όμως $(y, z) = 1$.

Από λήμμα 1.3 ισχύει ότι: $kl = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ και $(k, l) = 1$, έπεται ότι k, l είναι τέλεια τετράγωνα, οπότε:
$k = s^2,\ l = t^2,\ s, t \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$z = k + l = s^2 + t^2,\ y = k - l = s^2 - t^2 \Rightarrow$$

$$z - y = 2k,\ z + y = 2l \Rightarrow z = k + l,\ y = k - l$$

$$x^2 = 4kl = 4s^2t^2 \Rightarrow x = 2st$$

Εφόσον, ένας κοινός παράγοντας των s, t διαιρεί ταυτόχρονα τους y, z, τότε $(y, z) = 1 \Leftarrow (s, t) = 1$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν s, t ταυτόχρονα άρτιοι ή ταυτόχρονα περιττοί, τότε y, z άρτιοι, άτοπο. Έτσι, ακριβώς ένας από τους s, t είναι άρτιος και ένας είναι περιττός, δηλαδή: $s \not\cong t(mod2)$.

Αντίστροφα : Έστω s, t ακέραιοι με τις ιδιότητες: $s > t > 0,\ (s, t) = 1,\ s \not\cong t(mod2)$,τότε οι: $x = 2st,\ y = s^2 - t^2,\ z = s^2 + t^2$ είναι πυθαγόρεια τριάδα, διότι:

$$x^2 + y^2 = (2st)^2 + (s^2 - t^2)^2 = 4s^2t^2 + s^4 - 2s^2t^2 + t^4 = (s^2 + t^2)^2 = z^2$$

Επίσης, είναι και πρωταρχική, διότι, αν $(x, y, z) = d > 1$ και p πρώτος διαιρέτης του d, τότε $p \neq 2$, διότι p διαιρεί τον περιττό z (αφού ένας από τους δύο s, t είναι περιττός, ενώ ο άλλος είναι άρτιος, έπεται ότι ο $s^2 + t^2 = z$ είναι περιττός).

Επειδή $p|y$ και $p|z \Rightarrow p|(z + y), p|(z - y) \Rightarrow$
$p|2s^2,\ p|2t^2 \Rightarrow p|s,\ p|t$,το οποίο είναι άτοπο, αφού $(s, t) = 1$. Συνεπώς $d = 1$, οπότε η Πυθαγόρεια τριάδα x, y, z είναι πρωταρχική.

$\square$

Άσκηση 2. *Αν* x, y, z *είναι πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, τότε ακριβώς ένας από τους ακέραιους* x, y *διαιρείται από το 3.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν $3|s$ ή $3|t$, τότε $3|x$ και Ο.Κ. Αν $3 \not| s$ και $3 \not| t$, τότε από θεώρημα $Fermat$ ισχύει ότι: $s^2 \cong 1(mod3)$ και $t^2 \cong 1(mod3) \Rightarrow y = s^2 - t^2 \cong 0(mod3) \Rightarrow 3|y$ και Ο.Κ. το ζητούμενο. $\square$