



ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

'Ομιλος Μαθηματικών Α' Λυκείου

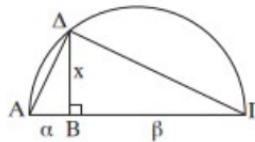
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 10 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2021.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Σ.Χασάπης

Μέρος Ι

1021β-10/12/2021

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο - Ριζικός άξονας



1 Εφαρμογές σε όμοια τρίγωνα

Πρόβλημα 1. Αν a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να κατασκευάσετε γεωμετρικά, τον γεωμετρικό τους μέσο.

Πρόβλημα 2. Να κατασκευάσετε με δύο τρόπους γεωμετρικά τον $\sqrt{2}$.

Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τους $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{11}, \sqrt[8]{2}$;

[Δραστηριότητα Φωτόδεντρου](#)

Άσκηση 1. Να εξεταστεί αν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών $a = 7, b = 8, c = 15$. Μεταβάλλετε το μήκος της πλευράς c κατάλληλα, εφόσον χρειάζεται, ώστε να σχηματίζεται τρίγωνο ABC . Ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου αυτού; Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του;

2 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Θεώρημα 1 (Τέμνουσες Κύκλου). Αν P σημείο εκτός κύκλου και $PAB, P\Gamma\Delta$ τέμνουσές του, τότε να αποδειχθεί ότι:

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$$

Αν μία τέμνουσα γίνει εφαπτομένη του κύκλου, πώς διαμορφώνεται η παραπάνω σχέση;

[Δραστηριότητα](#)

Ορισμός 1 (Δύναμη σημείου ως προς κύκλο). Αν P σημείο του επιπέδου, δ η απόστασή του από το κέντρο του και R η ακτίνα του ονομάζεται **δύναμη του σημείου P , ως προς τον κύκλο (O, R)** η

$$\Delta(P, O, R) = \delta^2 - R^2$$

Άσκηση 2. Να διερευνήσετε ποια η σχέση της θέσης ενός σημείου ως προς δοσμένο κύκλο και του προσήμου της δύναμής του ως προς αυτόν.

2.1 Ομορφιές...

Άσκηση 3. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 + ax - a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Πρόβλημα 3 (Γεωμετρική κατασκευή της λύσης). Με τα παρακάτω βήματα θα επιτευχθεί γεωμετρική κατασκευή - επίλυση της εξίσωσης **1** για $a > 0$.

- Να προσδιορίσετε τη θετική ρίζα της εξίσωσης **1**
- Να υπολογίσετε το λόγο $\varphi = \frac{a}{x}$.
- Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{x}{a-x}$
- Να αποδείξετε ότι $x(x+a) = a^2$.
- Κατασκευάστε τμήμα $AB = a$.
- Βρείτε σημείο Γ εσωτερικό του AB , ώστε $A\Gamma^2 = AB \cdot B\Gamma$.
Υπόδειξη **4.1**
Υπόδειξη **4.1**

Άσκηση 4. Να αποδειχθεί ότι:

1. $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$
2. $\varphi + 1 = \varphi^2$

Πρόβλημα 4. Να υπολογιστούν οι λόγοι των διαδοχικών όρων της ακολουθίας *Fibonacci*.

Μέρος II

1021β-10/12/2021 - Άλλες
εφαρμογές

3 Προβλήματα

Άσκηση 5 (Ανισότητα υπό συνθήκη). Αν $0 < a, b, c < 1$ και $a + b + c = 2$ να αποδειχθεί ότι:

$$8(1-a)(1-b)(1-c) \leq abc$$

Πότε ισχύει η ισότητα ;

Λύση 4

Άσκηση 6 (Ανισότητα). Αν $x < 1$ να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{2}{\sqrt{2-x}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

Λύση 5

Άσκηση 7 (Πρόβλημα σε κύκλο). Αν για τους $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$(a-3)^2 + (b-3)^2 = 6$$

να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του αριθμού $k = \frac{a}{b}$, εφόσον υπάρχουν.

Άσκηση 8 (Ανισότητα υπό συνθήκη). Αν a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 3$$

να αποδειχθεί ότι:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq 1$$

Πρόβλημα 5 (CEMC Uwaterloo). *Πηγή* Τέσσερις μαθητές ο Ανδρέας, ο Βασίλης, η Γεωργία και η Δήμητρα, καθένας τους διατύπωσε δύο προτάσεις, ώστε:

- ένας μαθητής είπε ψέματα και στις δύο προτάσεις,
- ένας μαθητής είπε αλήθεια και στις δύο προτάσεις,
- δύο μαθητές είπαν αλήθεια σε μία πρόταση και ψέματα στην άλλη.

Συγκεκριμένα οι προτάσεις που διατύπωσαν ήταν:

- Ο Ανδρέας είπε: «Ο Βασίλης είπε ακριβώς μία φορά ψέματα» και «Η Δήμητρα είπε δύο φορές ψέματα».
- Ο Βασίλης είπε: «Δε λέω ψέματα ποτέ!» και «Ο Ανδρέας δε λέει επίσης ποτέ ψέματα!».
- Η Γεωργία είπε: «Η Δήμητρα είπε ψέματα δύο φορές» και «Ο Βασίλης δε λέει ψέματα ποτέ!»
- Η Δήμητρα είπε: «Ο Ανδρέας είπε ψέματα δύο φορές» και «Εγώ δε λέω ψέματα ποτέ!»

Ποιος είπε δύο φορές ψέματα; Ποιος δεν είπε ψέματα ποτέ; Ποιος είπε ψέματα ακριβώς μία φορά;

Λύση: 4

Πρόβλημα 6 (CEMC Uwaterloo). Η Ελευθερία επιλέγει τέσσερις αριθμούς. Όταν καθένας από αυτούς προστεθεί στον μέσο όρο των άλλων τριών, προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα αντίστοιχα: 25, 37, 43, 51.

Να βρεθεί ο μέσος όρος των τεσσάρων αριθμών που επέλεξε η Ελευθερία.

Πηγή Λύση 4

4 Υποδείξεις - Λύσεις

Ανισότητα 1

Αν $0 < a, b, c < 1$ και $a+b+c=2$ να αποδείξετε ότι:

$$8(1-a)(1-b)(1-c) \leq abc$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (1-b) + (1-c) \geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)} \\ b = (1-a) + (1-c) \geq 2\sqrt{(1-a)(1-c)} \\ c = (1-b) + (1-a) \geq 2\sqrt{(1-b)(1-a)} \end{array} \right\} \Rightarrow abc \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

Η ισότητα αν και μόνο αν $1-a=1-b=1-c \Rightarrow a=b=c$,

$$\text{δηλ. } a=b=c=\frac{2}{3}.$$

Αν $0 < a, b, c < 1$ και $a+b+c=2$ να αποδείξετε ότι:

$$8(1-a)(1-b)(1-c) \leq abc$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(1)

Από τον Παναγιώτη Δανούση

Λύση

$$\triangleright (1) \Leftrightarrow 2(1-a) \cdot 2(1-b) \cdot 2(1-c) \leq abc \quad (2)$$

$$\triangleright 2(1-a) > 0 \Rightarrow 2-2a > 0 \Rightarrow b+c > a$$

$$\dots c+a > b, a+b > c \quad (3)$$

προκειται για - μήκη - πλευρών - τριγώνου - ABC

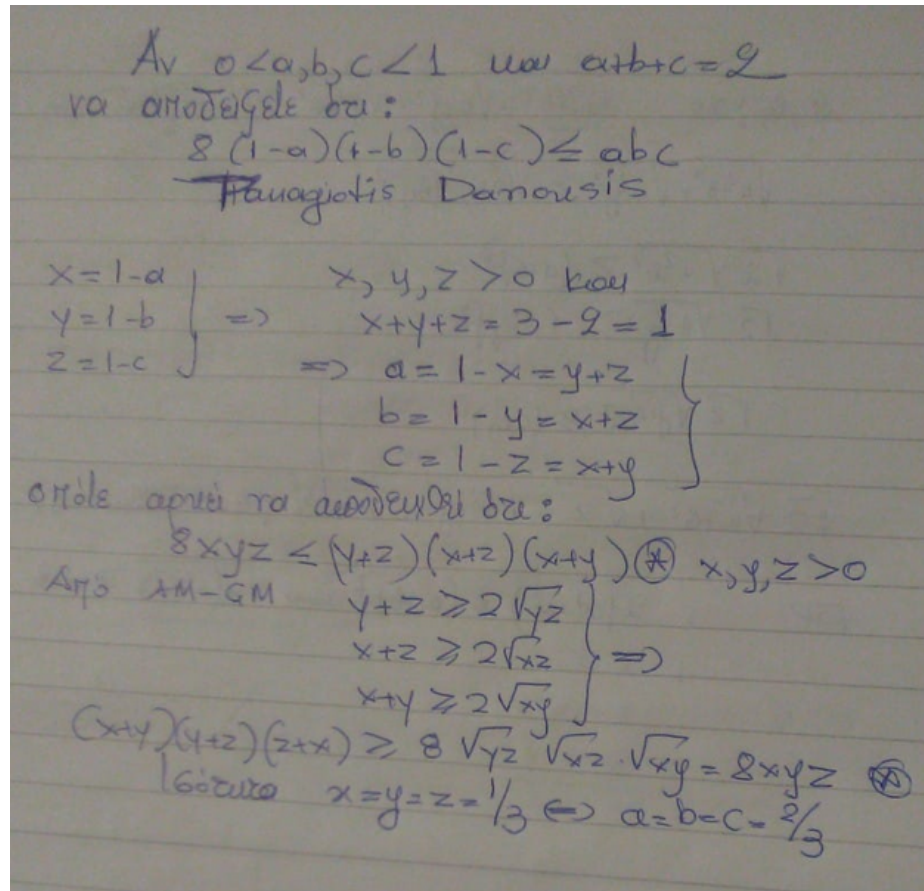
$$\triangleright 2\tau = a+b+c = 2 \Rightarrow \tau = 1 \quad (4)$$

$$2-2a = b+c-a = 2(\tau-a)$$

$$E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)} = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \quad (5)$$

$$\triangleright (2) \Leftrightarrow 8E^2 \leq abc \Leftrightarrow 8E^2 \leq 4RE \Leftrightarrow 2E \leq R \Leftrightarrow 2\tau\rho \leq R \Leftrightarrow 2\rho \leq R \quad (\text{true})$$

$$\triangleright \text{ισότητα} \Leftrightarrow R = 2\rho \Leftrightarrow \text{ισόπλευρο - τρίγωνο} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3}$$



Απόδειξη.

□

$$\triangleright A = \sqrt{1-x}, B = \sqrt{2-x}, C = \sqrt{3-x} \Rightarrow A < B < C \quad (2)$$

$$\triangleright (1) \Leftrightarrow \frac{2}{B} < \frac{1}{A} + \frac{1}{C} \Leftrightarrow 2AC < AB + BC \Leftrightarrow A(C-B) < C(B-A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A(C^2 - B^2)}{C+B} < \frac{C(B^2 - A^2)}{B+A} \xrightarrow{C^2-B^2=1, B^2-A^2=1} \frac{A}{C+B} < \frac{C}{B+A} \Leftrightarrow A(B+A) < C(C+B)$$

$$\Leftrightarrow AB + A^2 < C^2 + CB \Leftrightarrow (C^2 - A^2) + (CB - AB) > 0$$

$$\Leftrightarrow (C-A)(C+A) + B(C-A) > 0 \Leftrightarrow (C-A)(A+B+C) > 0 \text{ (true)}$$

$$\triangleright A = \sqrt{1-x}, B = \sqrt{2-x}, C = \sqrt{3-x}$$

$$\triangleright 2B^2 = A^2 + C^2 > 2AC \Rightarrow B^2 > AC \Rightarrow \frac{1}{B^2} < \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{B} < \sqrt{\frac{1}{A}} \cdot \sqrt{\frac{1}{C}} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{B} < \frac{1}{A} + \frac{1}{C}$$

Συνεπώς αποδείχτηκε.

Ανισότητα 2

Άσκηση 8 Ενδεικτική λύση:

Let a, b, c be positive real numbers, such that $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 3$. Prove that

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq 1. \quad (1)$$

Solution by Marian Cucuones.

$$\begin{aligned} \text{Because: } (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= 3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \\ &= \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2] \text{ and } a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 3 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq 9 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Because: } 9(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2) &- 8(a^2 + b^2 + \\ &+ c^2)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = a^2(b^2 - c^2)^2 + b^2(a^2 - c^2)^2 + \\ &+ c^2(a^2 - b^2)^2 \text{ and } a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 3 \Rightarrow \\ (a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) &\geq \frac{8}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \stackrel{(2)}{\geq} 8 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Because: } (1 + a^4)(1 + b^4) - (a^2 + b^2)^2 &= (a^2b^2 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \\ (1 + a^4)(1 + b^4) &\geq (a^2 + b^2)^2 \\ (1 + a^4)(1 + c^4) &\geq (a^2 + c^2)^2 \\ (1 + b^4)(1 + c^4) &\geq (b^2 + c^2)^2 \end{aligned} \quad \} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (1 + a^4)^2(1 + b^4)^2(1 + c^4)^2 &\geq (a^2 + b^2)^2(a^2 + c^2)^2(b^2 + c^2)^2 \Rightarrow \\ (1 + a^4)(1 + b^4)(1 + c^4) &\geq (a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) \stackrel{(3)}{\geq} 8 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Because: } 2(1 - a + a^2)^2 - 1 - a^4 &= (1 - a)^4 \geq 0 \Rightarrow \\ 2(1 - a + a^2)^2 &\geq 1 + a^4 \\ 2(1 - b + b^2)^2 &\geq 1 + b^4 \\ 2(1 - c + c^2)^2 &\geq 1 + c^4 \end{aligned} \quad \} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 8(1 - a + a^2)^2(1 - b + b^2)^2(1 - c + c^2)^2 &\geq (1 + a^4)(1 + \\ &+ b^4)(1 + c^4) \stackrel{(4)}{\geq} 8 \Rightarrow 8(1 - a + a^2)^2(1 - b + b^2)^2(1 - c + c^2)^2 \geq 8 \\ \Rightarrow (1) &\Rightarrow \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 1 5

We will solve this problem by first figuring out who must have lied twice, and then figuring out who must have told the truth twice. 1. Who lied twice?

(a) Assume that Nathaniel lied twice. If so, “Elizabeth lied once” is a lie. Therefore, “Elizabeth never lied” or “Elizabeth lied twice.” But “Elizabeth never lied” cannot be true because Elizabeth says, “Nathaniel never lied.” This contradicts our assumption that Nathaniel lied twice. Also, “Elizabeth lied twice” cannot be true since that means Elizabeth and Nathaniel both lied twice and this contradicts the fact that only one person lied twice. Therefore, our assumption that Nathaniel lied twice is false.

(b) Assume that Elizabeth lied twice. If so, “Nathaniel never lied” is a lie. Then, Nathaniel lied twice or Nathaniel lied once. Nathaniel cannot have lied twice since both he and Elizabeth would have lied twice and this contradicts the fact that only one person lied twice. But “Nathaniel lied once” is also false since “Elizabeth lied exactly once” is a lie (we assumed she lied twice) and “Joel lied twice” is a lie because it contradicts the assumption that Elizabeth lied twice (and only one person can lie twice). Therefore, our assumption that Elizabeth lied twice is false.

(c) Assume that Libby lied twice. If so, “Elizabeth never lied” is a lie and “Joel lied twice” is a lie. Since “Elizabeth never lied” is a lie, then she lied twice or she lied once. But if Elizabeth lied twice our assumption that Libby lied twice cannot be true since only one person lied twice. If Elizabeth lied exactly once, then “I never lie” must be the lie and “Nathaniel never lied” must be true. But if Nathaniel never lied, then “Joel lied twice” must be true and this contradicts the fact that only one person can lie twice. Therefore, our assumption that Libby lied twice is false.

We are told that one person lied twice and none of Nathaniel, Elizabeth or Libby lied twice. Therefore, by elimination, Joel is the one who lied twice.

2. Who never lied?

(a) Assume that Elizabeth never lied. Then her statement that “Nathaniel never lied” must be true. Then, there are then two people who never lied. This contradicts the fact that only one person never lied. Therefore, our assumption that Elizabeth never lied is false.

(b) Assume that Libby never lied. Then her statement that “Elizabeth never lied” must be true. Then, there are then two people who never lied. This contradicts the fact that only one person never lied. Therefore, our assumption that Libby never lied is false.

Joel lied twice. Elizabeth and Libby lied. Therefore, by elimination, Nathaniel is the one who never lied. It then follows that Elizabeth and Libby each make one true statement and tell one lie.

We can now check our results.

Nathaniel never lied. Then his statements are both true. Elizabeth lied exactly once is true and Joel lied twice is true.

Elizabeth lied once. Then one of her statements is true and the other is a lie. Her statement that she never lies is a lie and her statement that Nathaniel never lies is true.

Libby lied once. Then one of her statements is true and the other is a lie. Her statement that Joel lied twice is true and her statement that Elizabeth never lied is a lie.

Joel lied twice. Then both of his statements are lies. Nathaniel lied twice is a lie. And his statement the he never lies is a lie.

όμ 6 Let a , b , c , and d represent the four numbers. It is possible to precisely determine the four numbers, but the problem asks for only their average, which is $a+b+c+d/4$. When the first number is added to the average of the other three numbers, the result is 25. Thus, $a + \frac{b+c+d}{3} = 25$

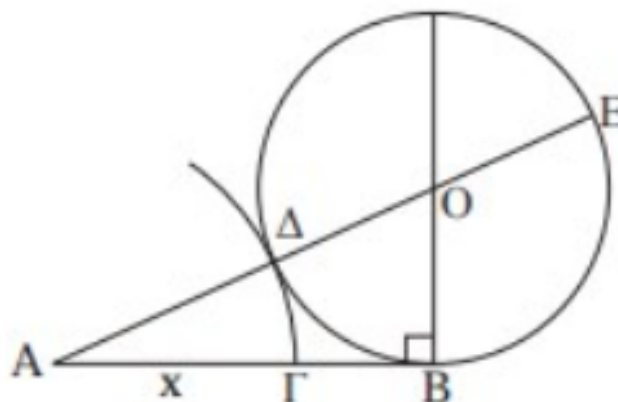
which can be rewritten as $3a + b + c + d = 75$ (1) When the second number is added to the average of the other three numbers, the result is 37. Thus, $b + a + c + d = 37$ which can be rewritten as $a + 3b + c + d = 111$ (2) When the third number is added to the average of the other three numbers, the result

is 43. Thus, $c + a + b + d \cdot 3 = 43$ which can be rewritten as $a + b + 3c + d = 129$ (3) When the fourth number is added to the average of the other three numbers, the result is 51. Thus, $d + a + b + c \cdot 3 = 51$ which can be rewritten as $a + b + c + 3d = 153$ (4) Adding equations (1), (2), (3), and (4), we obtain $6a + 6b + 6c + 6d = 468$. Dividing this equation by 6 gives $a + b + c + d = 78$. It follows that $a + b + c + d \cdot 4 = 19.5$. Therefore, the average of the four numbers is 19.5. Although it is not required, we could solve the system of equations to determine that the numbers are: 1.5, 16.5, 25.5, and 37.5.

4.1 Χρυσή τομή Υποδείξεις

Υπόδειξη 1 Θυμηθείτε στο θεώρημα τεμνουσών κύκλου ότι $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$.

Υπόδειξη 2 Κατασκευάστε στο άκρο B του $AB = a$ εφαπτόμενο κύκλο ακτίνας $R = \frac{a}{2}$.



Σχήμα 1: Γεωμετρική κατασκευή της χρυσής τομής