Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

*Όμιλος*

# Μαθηματικών

*Α' Λυκείου*

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 2 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

## Η Ταυτότητα της Διαίρεσης

## 1 Εισαγωγή

Όλοι γνωρίζουμε να κάνουμε διαίρεση. Μαθαίνουμε ήδη από το Δημοτικό.

Η διαδικασία με την οποία κάνουμε τη διαίρεση είναι συγκεκριμένη ΚΑΙ ΠΑΝΤΑ οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που αποτελείται από δύο αριθμούς: το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο**.

Η διαδικασία που ακολουθείται περιλαμβάνει τις ίδιες σκέψεις - πράξεις για κάθε ψηφίο που υπολογίζουμε στο πηλίκο και τον ίδιο έλεγχο για το υπόλοιπο που προκύπτει σε κάθε βήμα.

Πρόκειται για έναν **αλγόριθμο**[1].

Φυσιολογικά, προκύπτουν τα ερωτήματα :

1) Γιατί υπάρχει πάντα λύση για κάθε ζεύγος αριθμών (διαιρετέου και διαιρέτη);

2) Γιατί όλοι βρίσκουμε την ίδια λύση όταν εκτελούμε τη διαδικασία της διαίρεσης;

## 2 Η ταυτότητα της Διαίρεσης

**Θεώρημα 2.1** (Ταυτότητα - Αλγόριθμος της διαίρεσης). *Αν $a, b \in \mathbb{N}$ με $b \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $p, y$, ώστε:*

$$a = p \cdot b + y, \quad 0 \leq y < b$$

*. Οι αριθμοί $p, y$ είναι μοναδικοί.*

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του $a$. □

Μία δεύτερη απόδειξη μπορεί να γίνει με χρήση του παρακάτω λήμματος, το οποίο επίσης αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή.

**Λήμμα 2.1** (Αρχή Καλής Διάταξης). *Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο.*

**Παράδειγμα 2.1.** *Να γίνει η διαίρεση $a : b$, $a = 22$, $b = 5$.*

Στην επίλυση αυτής της διαίρεσης αναζητούμε τα πολλαπλάσια του 5, τα οποία δεν ξεπερνούν τον αριθμό 22. Δηλαδή κατασκευάζουμε το σύνολο :

$$S = \{22,\ 22 - 1 \cdot 5,\ 22 - 2 \cdot 5,\ 22 - 3 \cdot 5,\ 22 - 4 \cdot 5\} =$$

$$\{22,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2\}$$

Από το οποίο σύνολο επιλέγουμε το ελάχιστο στοιχείο που είναι μεγαλύτερο του 0 και υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης. Ο μέγιστος αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το 5 (δηλ.τον διαιρέτη) είναι το πηλίκο.

Η ταυτότητα της διαίρεσης μπορεί να γενικευτεί και για ακέραιους αριθμούς.

**Θεώρημα 2.2** (Ταυτότητα διαίρεσης για ακέραιους). *Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, $\quad b \neq 0$ υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι $p, y$, ώστε : $a = b \cdot p + y, 0 \leq y < |b|$.*

**Άσκηση 1.** *Να γίνουν οι διαιρέσεις :*

[1]Ως **αλγόριθμος** ορίζεται μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, που στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος. Πιο απλά αλγόριθμο ονομάζουμε μία σειρά από εντολές που έχουν αρχή και τέλος, είναι σαφείς και εκτελέσιμες που σκοπό έχουν την επίλυση κάποιου προβλήματος.

Η λέξη αλγόριθμος προέρχεται από μία μελέτη του Πέρση μαθηματικού του 8ου αιώνα μ.Χ. Αλ Χουαρίζμι (Abu Ja'far Mohammed ibn Musa Al-Khwarismi), η οποία περιείχε συστηματικές τυποποιημένες λύσεις αλγεβρικών προβλημάτων και αποτελεί ίσως την πρώτη πλήρη πραγματεία άλγεβρας. Πέντε αιώνες αργότερα η μελέτη μεταφράστηκε στα Λατινικά και άρχιζε με τη φράση "Algorithmus dixit ...." (ο Αλγόριθμος είπε...). Έτσι η λέξη αλγόριθμος καθιερώθηκε αργά τα επόμενα χίλια χρόνια με την έννοια «συστηματική διαδικασία αριθμητικών χειρισμών». Τη σημερινή της σημασία την οφείλει στη γρήγορη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών στα μέσα του 20ου αιώνα.

1. $a = 80, \ b = 6$
2. $a = 80, \ b = -6$
3. $a = -80, \ b = 6$
4. $a = -80, \ b = -6$

# 3 Εφαρμογές της ταυτότητας της διαίρεσης

**Άσκηση 2.** *Κάθε ακέραιος* $a \in \mathbb{Z}$ *γράφεται σε μία από τις μορφές :* $a = 2k+1, \ a = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z}$.

**Άσκηση 3.** *Κάθε ακέραιος γράφεται ακριβώς σε μία από τις μορφές :*

$$a = 3k, \ a = 3k+1, \ a = 3k-1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

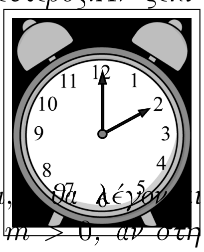
**Άσκηση 4.** *Για κάθε περιττό αριθμό* $p \in \mathbb{N}$ *ο αριθμός :* $a = \frac{p^2-1}{4}$ *είναι άρτιος.*

**Άσκηση 5.** *Για κάθε ακέραιο* $a$ *ο αριθμός:* $\frac{a^2+a+3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

# 4 Ισοϋπόλοιποι αριθμοί

Είναι γνωστό ότι οι ακέραιοι μπορούν να χωριστούν με διάφορους τρόπους σε κατηγορίες. Για παράδειγμα : Πολλαπλάσια του 3 και μη πολλαπλάσια του 3 ή ακόμα άρτιοι και περιττοί. Παρόμοια με κριτήριο τη διαίρεση με το 3 μπορούμε να τους κατατάξουμε ανάλογα με το υπόλοιπο που αφήνουν.

**Άσκηση 6.** *Δύο ποδηλάτες κάνουν το γύρο της Ελλάδας σε* $330h$ *ο πρώτος και σε* $342h$ *ο δεύτερος.Αν ξεκινήσουν από την Ακρόπολη της Αθήνας στις* $08:00$ *και ποδηλατούν καθημερινά μέχρι τις* $20:00$, *να βρεθεί τι ώρα θα τερματίσει ο καθένας τους.*




**Ορισμός 4.1.** *Οι ακέραιοι αριθμοί* $a, b$ *θα λέγονται* *ισοϋπόλοιποι με μέτρο τον* $m$ *ή modulus* $m > 0$, *αν στη διαίρεση με τον* $m$ *έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Δηλαδή :* $a = mk + y, \ b = ml + y, \qquad 0 \le y < m$. *Συμβολίζουμε:* $a \equiv b(mod m)$.

*Η σχέση:* $a \equiv b(mod m)$ *λέγεται ισοτιμία.*

**Παράδειγμα 4.1.** $4 \equiv 6(mod 2), 3 \equiv 15(mod 2)$ *κ.ο.κ.*

**Άσκηση 7.** *Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.*

1. $3 \equiv 12(mod 3)$
2. $11 \equiv 12(mod 3)$
3. $13 \equiv 12(mod 3)$
4. $15 \equiv 3(mod 12)$
5. $15 \equiv 27(mod 12)$
6. $-3 \equiv 17(mod 10)$
7. $11 \equiv 68(mod 3)$
8. $-3 \equiv 0(mod 3)$

**Άσκηση 8.** *Αν* $a \equiv b(mod m)$ *μπορείτε να βρείτε μία σχέση που να συνδέει τους* $m$ *και* $a - b$ *;*

**Άσκηση 9.** *Να βρεθούν οι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί* $a$, *ώστε :* $a \equiv 37(mod 41)$.

**Άσκηση 10.** *Αν 4 Νοέμβρη είναι ημέρα Δευτέρα, τότε να βρεθεί ποια ημέρα της εβδομάδας του ίδιου έτους είναι οι :* $12/11, \ 20/11, \ 17/11, \ 27/11$.

**Άσκηση 11.** *Θεωρούμε ένα κανονικό εξάγωνο* $ABCDEF$ *με κέντρο* $O$. *Αν το περιστρέψουμε γύρω από το κέντρο του* $3$ *φορές κατά* $60^o$ *ή* $9$ *φορές κατά* $60^o$ *να βρεθεί σε κάθε περίπτωση η νέα θέση των κορυφών του. Αν από την αρχική του θέση θεωρήσουμε το συμμετρικό του ως προς τη διαγώνιο* $AD$ *ποια θα είναι τότε η νέα θέση των κορυφών του;*

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

---

Ο Πλάτων στους Νόμους του χρησιμοποιεί ένα αριθμό μικρότερο του 10000 ο οποίος έχει διαιρέτες 10 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Βρείτε τον.