Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Αποδείξεις στη Διάταξη των πραγματικών αριθμών .

Εισαγωγή

Το κείμενο αυτό αποτελεί μία ενδεικτική αξιωματικά θεμελιωμένη παρουσίαση της διάταξης. Η διδασκαλία στην τάξη μπορεί να περιλαμβάνει μερικές από τις αποδείξεις που παρουσιάζονται. Κάποιες από αυτές έχουν την αντίστοιχη «προφανή» ερμηνεία που βλέπουν οι μαθητές σε παρόμοιες προτάσεις της γεωμετρίας. Πιθανόν η απόδειξη όλων των προτάσεων αυτών μέσα στην τάξη θα προκαλούσε δυσανασχέτηση και βαρεμάρα για τους μαθητές. Από την άλλη πλευρά η παρουσίαση ενός «καταλόγου ιδιοτήτων» στην τάξη έχουμε διαπιστώσει ότι δε βοηθά το μαθητή να εμπεδώσει πότε αυτές οι ιδιότητες ισχύουν και γιατί. Δηλαδή δεν κατανοεί τις συνθήκες που απαιτούνται, ώστε να γίνει κατάλληλα και σωστά η χρήση τους. Σε αυτό το πλαίσιο θεωρείται χρήσιμο να παρουσιαστούν αποδείξεις τουλάχιστον για κάποιες από τις προτάσεις, στις οποίες διαπιστώνονται συχνά λάθη.

Διάταξη και αποδείξεις

Αξιωμα 1 (Ιδιότητα Τριχοτομίας).

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a < b \text{ ή } a = b \text{ ή } a > b$$

Αξιωμα 2 (Μεταβατική).

$$a, b, c \in \mathbb{R}\ a < b \text{ και } b < c \ \Rightarrow a < c$$

Αξιωμα 3 (Πρόσθεση).

$$a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Αξιωμα 4 (Πολλαπλασιασμός).

$$a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b,\ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

Προταση 1. *Αν* $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

Απόδειξη. Έστω $-a = 0 \Rightarrow a = 0$. Άτοπο.
Έστω $-a > 0 \Rightarrow -a + a > 0 + a \Rightarrow 0 > a$. Άτοπο. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση $-a < 0$. □

Προταση 2 (Πρόσθεση κατά μέλη).

$$a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b \text{ και } c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

Απόδειξη. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Ακόμα $c < d \Rightarrow b + c < b + d$. Από μεταβατική ιδιότητα $a + c < b + c < b + d$. □

Προταση 3 (Πολλαπλασιασμός ομόσημων αριθμών). $a, b \in \mathbb{R},\ a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$

Απόδειξη. $a < 0 \Rightarrow -a > 0, b > 0 \Rightarrow -a \cdot b > 0 \Rightarrow -(a \cdot b) > 0 \Rightarrow -(-(a \cdot b)) < 0 \Rightarrow ab < 0$ □

Προταση 4 (Πολλαπλασιασμός ετερόσημων αριθμών). *Αν* $a < 0,\ b > 0 \Rightarrow a \cdot b < 0.$

Απόδειξη. $a < 0 \overset{Aξ.4}{\Longrightarrow} ab < 0 \cdot b \Rightarrow ab < 0$ □

Πρόταση 5 (Ορισμός βιβλίου). $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$

Απόδειξη. $a < b \Rightarrow a + (-b) < b + (-b) \Rightarrow a - b < 0$ □

Πρόταση 6 (Αλλαγή φοράς ανισότητας). $c < 0,\ a < b \Rightarrow ac < bc$

Απόδειξη. $c < 0 \overset{Π.1}{\Longrightarrow} -c > 0 \Rightarrow -ca < -cb \overset{Aξ.3}{\Longrightarrow} ca - ca < ca - cb \Rightarrow 0 < ca - cb \Rightarrow cb < ca.$ □

Πρόταση 7 (Πολλαπλασιασμός κατά μέλη). *Αν* $a, b, c, d > 0$ *και* $a < b, c < d$ *τότε* $ac < bd$.

Απόδειξη. [1] $a < b \overset{c>0}{\Longrightarrow} ac < bc$ και $c < d \overset{b>0}{\Longrightarrow} bc < bd$. Από τις προηγούμενες σχέσεις με χρήση της μεταβατικής ιδιότητας προκύπτει ότι : $ac < bd$. □

Παράδειγμα 1. *Τι συμβαίνει στην προηγούμενη πρόταση, αν όλοι ή κάποιοι από τους αριθμούς είναι αρνητικοί;*

Πρόταση 8 (Πρόσημο αντιστρόφου). *Αν* $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\frac{1}{a} < 0 \overset{a>0}{\Longrightarrow} a \cdot \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow 1 < 0$. Άτοπο.
Έστω $\frac{1}{a} = 0 \overset{a>0}{\Longrightarrow} a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot 0 \Rightarrow 1 = 0$. Άτοπο. Συνεπώς $\frac{1}{a} > 0$. □

Πρόταση 9. $a^2 \geq 0$, *για κάθε* $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αν $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$.
Αν $a > 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
Αν $a < 0 \Rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a \Rightarrow a^2 > 0$. □

Άσκηση 1. $a^2 + b^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ *ή* $b \neq 0$.

Άσκηση 2. $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *και* $b = 0$.

[1] Μέσα από αυτήν την απόδειξη - όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις γίνεται κατανοητό πώς, γιατί και σε ποιες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η ιδιότητα.