ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

΄΄ Εισαγωγή στις ανισότητες΄΄

Μπάμπης Στεργίου , 2004

Το άρθρο αυτό είχε την τύχη να ολοκληρωθεί σε βιβλίο , το οποίο κυκλοφορεί με τον τίτλο :

Μπάμπης Στεργίου – Νίκος Σκομπρής : Αλγεβρικές Ανισότητες , Εκδόσεις Σαββάλα

Εισαγωγή

Αν ξεφυλλίσει κάποιος οποιοδήποτε βιβλίο με θέματα μαθηματικών διαγωνισμών ή μαθηματικών ολυμπιάδων θα διαπιστώσει ότι ανάμεσα στα αλγεβρικά θέματα που τίθενται, δεσπόζουν ασκήσεις που αφορούν τις ανισότητες. Οι ανισότητες παίζουν τεράστιο ρόλο στα ανώτερα μαθηματικά, τόσο που ο **D. Hilbert** , μεγάλος Γερμανός μαθηματικός του 20ου αιώνα , έκανε την εξής διαπίστωση:

“Η σχέση που πραγματικά κυβερνάει τα μαθηματικά είναι η ανισότητα. Η ισότητα παρουσιάζεται μόνο ως μια ειδική περίπτωση!”

Η σημασία λοιπόν των ανισοτήτων από τη μια και η ανάγκη ευφυών επινοήσεων, που απαιτούνται για την απόδειξή τους από την άλλη έχουν ως αποτέλεσμα την συχνότατη εμφάνισή τους σχεδόν σε κάθε διαγωνισμό. Στη **Βαλκανιάδα Νέων - 2003** τέθηκε ξανά θέμα ανισότητας που προτάθηκε από τη Ρουμανία και κατασκευάστηκε από τον καθηγητή ***Laurentiu Panaïtopol***.

Το θέμα αυτό , δημοσιευμένο και στο περιοδικό Ευκλείδης Α΄ , είναι το εξής:

Αν $x, y, \omega > -1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1+x^2}{1+y+\omega^2}+\frac{1+y^2}{1+\omega+x^2}+\frac{1+\omega^2}{1+x+y^2}\geq 2 \qquad (1)$$

Είναι σίγουρο πως κανείς μαθητής του Γυμνασίου ή του Λυκείου, ο οποίος δεν έχει παρακολουθήσει ειδικά μαθήματα ή δεν έχει μελετήσει βιβλία σχετικά με ανισότητες, δεν μπορεί να λύσει το θέμα αυτό. Κι όμως, στη Βαλκανιάδα Νέων (μαθητές μέχρι δεκαπεντέμιση ετών) πολλοί μαθητές έλυσαν το συγκεκριμένο θέμα.

Στο άρθρο αυτό θα επιχειρήσουμε να δώσουμε στους μαθητές του Γυμνασίου – μέσω του Ευκλείδη Α΄ – όλες τις απαραίτητες γνώσεις, ώστε ακόμα και ένα τέτοιο θέμα να είναι προσιτό όχι μόνο στα “παιδιά θαύματα”, αλλά και σε κάθε παιδί που τρέφει αγάπη για τα μαθηματικά και διαθέτει τα στοιχειώδη πνευματικά προσόντα. Πριν όμως προχωρήσουμε στον μαθηματικό πυρήνα του άρθρου, πρέπει να επισημάνουμε και τα εξής:

♦ Όπως κανένας μαθητής που έχει κλίση στον αθλητισμό δεν αρκείται στις δύο ώρες εβδομαδιαία που αθλείται στο σχολείο του, έτσι και όποιος θέλει να διαγωνιστεί στον μαθηματικό στίβο δεν πρέπει να αρκεστεί στις λίγες και μάλλον εισαγωγικές γνώσεις του σχολείου. Αυτό δε σημαίνει ότι το σχολείο δεν προσφέρει σημαντικές γνώσεις, αλλά ότι οι γνώσεις αυτές δεν επαρκούν, ούτε σε βάθος ούτε σε πλάτος, για τον διεθνή ανταγωνισμό σε επίπεδο ολυμπιάδων.

♦ Για να διακριθεί κάποιος μαθητής σε διεθνή μαθηματικό διαγωνισμό πρέπει μέχρι το τέλος της Γ΄ Γυμνασίου να έχει μυηθεί σε όλα τα σχολικά μαθηματικά που διδάσκονται μέχρι και το τέλος της Β΄ Λυκείου καθώς και να γνωρίζει το εισαγωγικό μέρος των συναρτήσεων. Εδώ είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι στους μαθηματικούς διαγωνισμούς δεν εξετάζεται το πλήθος αλλά η ποιότητα των μαθηματικών γνώσεων και η ικανότητα αξιοποίησής τους. Δεν εξετάζεται δηλαδή η ποσότητα των μαθηματικών που κατέχει κάποιος αλλά η δυνατότητα να χρησιμοποιεί αυτά που γνωρίζει για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων.

♦ Αφού οι σχολικές γνώσεις δεν αρκούν για τη συμμετοχή με αξιώσεις σε διαγωνισμούς, τίθεται εύλογα το ερώτημα: Πώς θα μπορέσει ένας μαθητής με ικανότητα και ζήλο για τα μαθηματικά να αποκτήσει γερό υπόβαθρο, ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει το υψηλό επίπεδο των θεμάτων που τίθενται; Η απάντηση είναι απλή: με τη μελέτη ανάλογων βιβλίων, δηλαδή βιβλίων με περιεχόμενο τις Ολυμπιάδες Μαθηματικών. Στα βιβλία αυτά αναφέρονται οι απαραίτητες γνώσεις της θεωρίας (τύποι, θεωρήματα, κ.λπ.), κατάλληλες εφαρμογές, λυμένα θέματα από αντίστοιχους διαγωνισμούς καθώς και προβλήματα για εξάσκηση. Στο τέλος του άρθρου αυτού θα παρουσιάσουμε ορισμένα από τα βιβλία αυτά που, είναι γραμμένα ή μεταφρασμένα στην Ελληνική γλώσσα. Μετά από αυτές όμως τις απαραίτητες αναφορές, προχωράμε στο μαθηματικό μέρος.

Μέρος 1ο

Βασικές ιδιότητες της Διάταξης

Για τη διάταξη ισχύουν οι εξής θεμελιώδεις ιδιότητες:

A. **α)** $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 0$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \leq 0$

β) αν $\alpha, \beta > 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$ και $\alpha\beta > 0$

γ) αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$, τότε $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$

δ) αν $\alpha \geq \beta \geq 0$ και $\gamma \geq \delta \geq 0$, τότε $\alpha\gamma \geq \beta\delta$

ε) αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma \geq \beta\delta$

στ) αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$

ζ) αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$, τότε $\alpha \geq \gamma$ *(μεταβατική ιδιότητα)*

η) το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός

B. Ισχύει ότι:

α) $\alpha^{2\nu} \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$

β) $\alpha^{2\nu+1} \leq \beta^{2\nu+1} \Leftrightarrow \alpha \leq \beta,\ \nu \in \mathbb{N}^*$

γ) $\alpha^{2\nu} \leq \beta^{2\nu} \Leftrightarrow |\alpha| \leq |\beta|$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

δ) αν $\alpha \geq \beta > 0$, τότε $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$

Παρατηρήσεις

1. Ποτέ δεν αφαιρούμε ή διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.
2. Οι πιο πολλές ιδιότητες των ανισοτήτων ισχύουν για μη αρνητικούς αριθμούς $(\alpha \geq 0)$ και για το λόγο αυτό χρειάζεται κάθε φορά να ελέγχουμε, αν πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή των ιδιοτήτων αυτών.
3. Όλες οι παραπάνω ιδιότητες είναι πολύ βασικές και προκύπτουν από τον ορισμό. Η έκταση του άρθρου αυτού δεν μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε τις σχετικές αποδείξεις.

Μέρος 2ο

Στο δεύτερο μέρος θα παρουσιάσουμε τις πιο σημαντικές ανισότητες. Όλες αυτές τις ανισότητες ο μαθητής πρέπει να γνωρίζει πολύ καλά, ώστε να μπορεί να τις εφαρμόσει κατάλληλα και αποτελεσματικά, όπου αυτό κριθεί απαραίτητο. Πριν όμως περάσουμε στις ανισότητες αυτές, επισημαίνουμε ότι:

> **Η μητέρα των ανισοτήτων είναι η:**
>
> $$(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$
>
> **Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta$.**

Πιθανόν να φαίνεται υπερβολική η σημασία μιας τόσο προφανούς ανισότητας, όπως η $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, αφού κάθε άρτια δύναμη πραγματικού αριθμού είναι αριθμός μη αρνητικός. Κι όμως, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, η απόδειξη πολλών βασικών ανισοτήτων βασίζεται ή ανάγεται στην παραπάνω ανισότητα.

Θεώρημα 1ο

Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι ανισότητες:

Α. **α)** $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$ **β)** $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

γ) $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$ **για κάθε** $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

Β. **α)** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ **β)** $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

γ) $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$ **για κάθε** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$

Απόδειξη

Α. **α)** Είναι:

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha-\beta)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

β) $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει

γ) $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2 \;\Leftrightarrow\; 2^{\alpha 2}+2\beta^2 \geq \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει

Και στις τρεις από τις παραπάνω ανισότητες η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta$.

Β. **α)** Ισχύει ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \;\Leftrightarrow\; 2^{\alpha 2}+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \geq 0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

Άλλος τρόπος

Οι βασικές ανισότητες $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, $\beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta\gamma$ και $\gamma^2 + \alpha^2 \geq 2\gamma\alpha$ με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$2^{\alpha 2} + 2\beta^2 + 2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

β) Είναι:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geq 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

που ισχύει από το ερώτημα (α). Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

γ) Είναι:

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\alpha 2} + 3\beta^2 + 3\gamma^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\alpha 2} + 2\beta^2 + 2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

$\boxed{\text{Εφαρμογή 1}}$

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{1}{\gamma+\alpha}\right)$$

(Ρουμανία)

Λύση

Ισχύει ότι:

$$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \overset{\alpha\beta>0}{*,} \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta}$$

Όμοια:

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{4}{\beta+\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \geq \frac{4}{\gamma+\alpha}$$

Επομένως:

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) \geq \frac{4}{\alpha+\beta} + \frac{4}{\beta+\gamma} + \frac{4}{\gamma+\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 4\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$, αφού στην ανισότητα $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta$.

Παρατήρηση

Είναι λογικό να εξετάσουμε μήπως $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$, διότι τότε με κυκλική εναλλαγή και πρόσθεση παίρνουμε τη ζητούμενη. Αλλά αυτή γίνεται $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$, που ισχύει.

Εφαρμογή 2

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha+\beta+\gamma$.

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα:

$$x^2+y^2+\omega^2\geq xy+y\omega+\omega x$$

η οποία ισχύει για κάθε $x, y, \omega\in\mathbb{R}$ παίρνουμε:

- $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \qquad (1)$

1. $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=$
   $=\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma \qquad (2)$

Οι ανισότητες (1) και (2) δίνουν:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha+\beta+\gamma$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Με βάση την ανισότητα $\quad xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}\quad$ είναι:

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2(\beta\gamma)+\beta^2(\gamma\alpha)+\gamma^2(\alpha\beta)\leq\alpha^2\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}+\beta^2\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2}+\gamma^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=$$

$$=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\leq\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$$

σύμφωνα με την $\quad xy+y\omega+\omega x\leq x^2+y^2+\omega^2$.

Εφαρμογή 3

Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2)(\gamma^2 - \gamma\alpha + \alpha^2) \geq \alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Λύση

Είναι:

$$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

που ισχύει. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες:

$$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \alpha\beta, \quad \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 \geq \beta\gamma \quad \text{και} \quad \gamma^2 - \gamma\alpha + \alpha^2 \geq \gamma\alpha$$

παίρνουμε τη ζητούμενη.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$, κάτι που προκύπτει από την (1).

Θεώρημα 2ο

Ισχύει ότι:

α) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$ **για κάθε** $\alpha > 0$ **β)** $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2$ **για κάθε** $\alpha < 0$

γ) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$ **αν οι α και β είναι ομόσημοι**

δ) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \leq -2$ **αν οι α και β είναι ετερόσημοι**

Απόδειξη

α) Είναι:

- $\alpha > 0$
- $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 1$.

Β) Είναι:

- $\alpha < 0$
- $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) \geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = -1$.

Γ) Είναι:

♦ $\alpha\beta > 0$

♦ $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta$.

δ) Είναι:

♦ $\alpha\beta < 0$

♦ $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν οι α και β είναι αντίθετοι $(\alpha = -\beta)$.

Εφαρμογή 4

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + 1 + \frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma + 1 + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 27$$

Λύση

Προφανώς η εκτέλεση των πράξεων είναι ασύμφορη.

Ισχύει ότι $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x > 0$. Έτσι:

$$\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

και όμοια:

$$\beta + 1 + \frac{1}{\beta} \geq 3 \quad \text{και} \quad \gamma + 1 + \frac{1}{\gamma} \geq 3$$

Άρα:

$$\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + 1 + \frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma + 1 + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Εφαρμογή 5

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9 \qquad (1)$$

Λύση

Η ανισότητα (1) αποτελεί βασική πρόταση και πρέπει να αναγνωρίζεται εύκολα, όπου παρουσιαστεί το α΄ μέλος. Η απόδειξη γίνεται ως εξής:

Εκτελούμε τις πράξεις και παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}+1+\frac{\beta}{\gamma}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1\right)\geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\geq 6$$

που ισχύει διότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2, \quad \frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\geq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\geq 2$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Με βάση την ιδιότητα (γ) του επόμενου θεωρήματος παίρνουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}$$

Έτσι, με πολλαπλασιασμό, παίρνουμε $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$, αφού:

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}=\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\cdot\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}=\sqrt[3]{1}=1$$

Θεώρημα 3°

Για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι:

α) $\quad \boldsymbol{\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}}$ **και** $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}}$

β) $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma}$ **γ)** $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma \geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$

δ) $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}}$

Απόδειξη

α) Είναι:

$$\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \geq \left(2\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

Άλλος τρόπος

Η βασική ανισότητα $x^2+y^2 \geq 2xy$ για $x=\sqrt{\alpha}$ και $y=\sqrt{\beta}$ δίνει:

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt{\beta}\right)^2 \geq 2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta$ και μόνο.

Η δεύτερη ανισότητα και ειδικά το β΄ σκέλος προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ή θέτοντας στην πρώτη όπου α και β τα $\dfrac{1}{\alpha}$ και $\dfrac{1}{\beta}$ αντίστοιχα.

Β) Από την ταυτότητα του Euler:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

και επειδή $\alpha+\beta+\gamma \geq 0$, προκύπτει ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$$

Προφανώς η παράσταση στην αγκύλη είναι μη αρνητικός αριθμός. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

γ) Η προηγούμενη ανισότητα $x^3+y^3+\omega^3 \geq 3xy\omega$ για $x=\sqrt[3]{\alpha}$, $y=\sqrt[3]{\beta}$ και $\omega=\sqrt[3]{\gamma}$ δίνει:

$$\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\gamma}\right)^3 \geq 3\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[3]{\gamma} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma \geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $\sqrt[3]{\alpha}=x \Leftrightarrow x^3=\alpha$.) Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

δ) Το α΄ σκέλος $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ είναι το ερώτημα (γ). Αν τώρα στην ανισότητα $\alpha+\beta+\gamma \geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ θέσουμε όπου α, β και γ τα $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\gamma}$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$$

Άρα:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

Εφαρμογή 6

Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\mathbf{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma}$$

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta},\quad \beta+\gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma} \quad \text{και} \quad \gamma+\alpha \geq 2\sqrt{\gamma\alpha}$$

Οι σχέσεις αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$$

διότι:

$$\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\beta\gamma}\cdot\sqrt{\gamma\alpha} = \sqrt{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\alpha} = \sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \sqrt{(\alpha\beta\gamma)^2} = \alpha\beta\gamma$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Από τις ανισότητες $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$, $(\beta+\gamma)^2 \geq 4\beta\gamma$ και $(\gamma+\alpha)^2 \geq 4\gamma\alpha$ με πολλαπλασιασμό παίρνουμε τελικά τη ζητούμενη.

Εφαρμογή 7

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8$$

Λύση

Τίποτα σχεδόν δεν μαρτυράει ότι πρέπει να στηριχθούμε στην ανισότητα $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, εκτός από το γεγονός ότι $8=2^3$ και το α΄ μέλος περιέχει τρεις παράγοντες. Έτσι:

- $\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\geq 2\sqrt{\alpha\cdot\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}}=2\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}$
- $\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\geq 2\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ και $\gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}\geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων αυτών παίρνουμε:

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=8\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}=8$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma=1$. Πραγματικά, πρέπει:

$$\alpha=\frac{\beta}{\gamma\alpha},\quad \beta=\frac{\gamma}{\alpha\beta}\quad \text{και}\quad \gamma=\frac{\alpha}{\beta\gamma},\quad \alpha,\beta,\gamma\geq 0$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν:

$$\alpha\beta\gamma=1$$

Έτσι προκύπτει:

$$\alpha=\beta^2,\quad \beta=\gamma^2\quad \text{και}\quad \gamma=\alpha^2$$

Άρα:

$$\alpha=\beta^2=(\gamma^2)^2=\gamma^4=(\alpha^2)^4=\alpha^8$$

δηλαδή $\alpha=1$ και τελικά $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Εφαρμογή 8

Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\geq 9\alpha\beta\gamma$ **β)** $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq 9\alpha\beta\gamma$

Λύση

α) Είναι:

- $\alpha+\beta+\gamma\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha}=3\cdot\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}$
- $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\geq\left(3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right)\left(3\cdot\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}\right)=9\cdot\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^3}=9\alpha\beta\gamma$

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9\alpha\beta\gamma$$

αφού $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$.

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$.

β) Είναι:

- $\alpha+\beta+\gamma\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$
- $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=3\cdot\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν τη ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλιο

Το ερώτημα (α) προκύπτει αμέσως από το (β) διότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

Θεώρημα 4ο

Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι:

α) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$

β) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$

(Ανισότητα B.C.S.)

Απόδειξη

α) Είναι:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2\Leftrightarrow\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2\geq\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy\geq 0\Leftrightarrow(\alpha y-\beta x)^2\geq 0$$

η οποία ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\alpha y-\beta x=0\Leftrightarrow\alpha y=\beta x\Leftrightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}\ (\text{για } x,y\neq 0)\ \text{ή όταν } \chi=y=0$$

Γενικά η ισότητα ισχύει όταν υπάρχει $\lambda>0$, τέτοιος ώστε :

$$\alpha=\lambda\chi\quad\text{και}\quad\beta=\lambda y$$

β) Η ανισότητα μετά τις πράξεις μας οδηγεί στην ισοδυναμία ανισοτήτων:

$$(\alpha^2y^2 + \beta^2x^2 - 2\alpha\beta xy) + (\beta^2\omega^2 + \gamma^2y^2 - 2\beta\gamma y\omega) + (\alpha^2\omega^2 + \gamma^2x^2 - 2\alpha\gamma x\omega) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta\omega - \gamma y)^2 + (\alpha\omega - \gamma x)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega}, \text{ όπου } x, y, \omega \neq 0 \text{ ή } x = y = \omega = 0$$

Γενικά , η ισότητα ισχύει όταν υπάρχει $\lambda > 0$, τέτοιος ώστε

$$\alpha = \lambda\chi \,,\, \beta = \lambda\, y \;\text{ και }\; \gamma = \lambda\, \omega$$

Η ανισότητα **B.C.S.** (Buniakovski – Cauchy – Schwarz) είναι πολύ σπουδαία, αποδεικνύεται δε πολύ πιο απλά με τη θεωρία τριωνύμου και ισχύει για τυχαίο πλήθος όρων.

Εφαρμογή 9

Αν α, β, γ και δ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\mathbf{(1 + \alpha^4)(1 + \beta^4)(1 + \gamma^4)(1 + \delta^4) \geq (1 + \alpha\beta\gamma\delta)^4}$$

Λύση

Από τη γενική ανισότητα $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$ παίρνουμε:

- $(1+\alpha^4)(1+\beta^4) = \left[1^2 + (\alpha^2)^2\right]\cdot\left[1^2 + (\beta^2)^2\right] \geq (1+\alpha^2\beta^2)^2$

και όμοια:

- $(1 + \gamma^4)(1 + \delta^4) \geq (1 + \gamma^2\delta^2)$
- $(1 + \alpha^2\beta^2)(1 + \gamma^2\delta^2) \geq (1 + \alpha\beta\gamma\delta)^2$

Επομένως:

$$(1 + \alpha^4)(1 + \beta^4)(1 + \gamma^4)(1 + \delta^4) \geq (1 + \alpha^2\beta^2)^2(1 + \gamma^2\delta^2)^2 =$$
$$= \left[(1+\alpha^2\beta^2)(1+\gamma^2\delta^2)\right]^2 \geq \left[(1+\alpha\beta\gamma\delta)^2\right]^2 = (1+\alpha\beta\gamma\delta)^4$$

Η ισότητα ισχύει (όχι προφανώς) για $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.

Εφαρμογή 10

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\boldsymbol{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

Λύση

Από την ανισότητα B.C.S. παίρνουμε:

$$\left[\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2+\left(\sqrt{\beta\gamma}\right)^2+(\beta\gamma)^2\right]\left[\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left(\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\beta\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}+\sqrt{\gamma\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

διότι:

$$\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\alpha^2}=\alpha\ \text{ κ.λπ.}$$

Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta=\gamma$.

Θεώρημα 5ο

α) **Αν $\alpha,\beta>0$, τότε $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\geq\dfrac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$.** **β)** **Αν $\alpha,\beta>0$, τότε $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.**

γ) **Αν $\alpha,\beta>0$, τότε $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\dfrac{\alpha+\beta}{4}$.** **δ)** **Αν $\alpha,\beta>0$, τότε $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$.**

ε) **Αν $\alpha,\beta>0$, τότε $\dfrac{4}{\alpha+\beta}\leq\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$.**

στ) **Αν $\alpha,\beta\geq0$, τότε:**

i) $\alpha^3+\beta^3\geq\alpha\beta(\alpha+\beta)$ **ii)** $\alpha^4+\beta^4\geq\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

iii) $\alpha^5+\beta^5\geq\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)\geq\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

ζ) **Αν $\alpha,\beta,\gamma\geq0$, τότε $\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}\geq\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}$.**

Απόδειξη

Τα ερωτήματα του θεωρήματος αυτού αποτελούν θεμελιώδη τεχνάσματα για τη λύση πολλών ασκήσεων που τίθενται συχνά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Τα ερωτήματα (στ) και (ζ) χρειάζονται απομνημόνευση. Τα υπόλοιπα όμως προκύπτουν από τις βασικές ανισότητες ως εξής:

α) Η ανισότητα $\alpha+\beta\geq2\sqrt{\alpha\beta}$ δίνει:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq2\cdot\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

διότι $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$.

β) Η ανισότητα $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$ δίνει $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$, διότι $\alpha+\beta>0$.

Γ) Η βασική ανισότητα $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ δίνει $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{4}$, διότι $\alpha+\beta>0$.

Δ) Ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$, οπότε:

$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\leq\frac{1}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}\leq\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

ε) Η ανισότητα $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ δίνει:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta}\leq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

Τα ερωτήματα (στ) και (ζ) αποδεικνύονται όμως με ισοδυναμίες.

Στ) **i)** $\alpha^3+\beta^3\geq\alpha\beta(\alpha+\beta) \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)\geq 0 \Leftrightarrow$

1. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2\geq 0$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta$.

1. Είναι:

$$\alpha^4+\beta^4\geq\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) \Leftrightarrow \alpha^4-\alpha^3\beta+\beta^4-\alpha\beta^3\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^3(\alpha-\beta)-\beta^3(\alpha-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow$$

2. $(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\geq 0$

που ισχύει, διότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ για κάθε α και β. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta$.

iii) Η πρώτη ανισότητα γράφεται:

$$\alpha^4(\alpha-\beta)-\beta^4(\alpha-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^4-\beta^4)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\geq 0$ που ισχύει

Επίσης $\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)\geq\alpha\beta\cdot\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$, λόγω του ερωτήματος (i).

Ζ) Είναι:

$$\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}\geq\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\geq\left(\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta\geq\alpha\gamma+\beta\delta+2\sqrt{\alpha\gamma\beta\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta+\beta\gamma-2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha\delta}-\sqrt{\beta\gamma}\right)^2\geq 0$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ή $\gamma=\delta=0$.

Σημείωση

Να μην υποτιμηθεί η αξία των παραπάνω απλών ερωτημάτων γιατί αποτελούν το κλειδί για τη λύση ασκήσεων που ακολουθούν.

Εφαρμογή 11

Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(x^3+y^3)(y^3+\omega^3)(\omega^3+x^3)}{x^3y^3\omega^3} \geq \frac{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}{xy\omega}$$

Λύση

Επειδή $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$, παίρνουμε:

$$\frac{x^3+y^3}{xy} \geq x+y, \quad \frac{y^3+\omega^3}{y\omega} \geq y+\omega \quad \text{και} \quad \frac{\omega^3+x^3}{\omega x} \geq \omega+x$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν:

$$\frac{(x^3+y^3)(y^3+\omega^3)(\omega^3+x^3)}{x^2y^2\omega^2} \geq (x+y)(y+\omega)(\omega+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3+y^3)(y^3+\omega^3)(\omega^3+x^3)}{x^3y^3\omega^3} \geq \frac{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}{xy\omega}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=y=\omega$.

Εφαρμογή 12

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha} \leq 1$$

(Προταθέν θέμα σε I.M.O. – 1996)

Λύση

Η άσκηση αυτή δείχνει πόσο σημαντικό είναι για κάποιο μαθητή να γνωρίζει ορισμένες απλές στοιχειώδεις ανισότητες και να τις εφαρμόζει για τη λύση σύνθετων θεμάτων. Σύμφωνα με το θεώρημα 5, (στ) ισχύει $\alpha^5+\beta^5 \geq \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$. Επομένως:

$$\frac{1}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}\le\frac{1}{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\iff\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}\le\frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

Είναι δηλαδή:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5}\le\frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

διότι $\alpha\beta\gamma=1$. Άρα, εργαζόμενοι κυκλικά, παίρνουμε:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha}\le$$

$$\le\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Θεώρημα 6°

Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $x,y,\omega\in\mathbb{R}$, τότε:

α) $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\ge\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$$

β) $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\ge\frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Απόδειξη

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ισοδυναμιών. Είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\ge\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}\iff(\beta x^2+\alpha y^2)(\alpha+\beta)\ge\alpha\beta(x+y)^2\iff$$

$$\iff\alpha\beta x^2+\beta^2x^2+\alpha^2y^2+\alpha\beta y^2\ge\alpha\beta x^2+2\alpha\beta xy+\alpha\beta y^2\iff$$

$$\iff\beta^2x^2-2\alpha\beta xy+\alpha^2y^2\ge0\iff(\beta x-\alpha y)^2\ge0$$

η οποία ισχύει. Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν:

$$\beta x-\alpha y=0\iff\beta x=\alpha y\iff\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}$$

β) Με βάση το ερώτημα (α) παίρνουμε:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}=\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)+\frac{\omega^2}{\gamma}\ge\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\ge\frac{[(x+y)+\omega]^2}{(\alpha+\beta)+\gamma}$$

δηλαδή:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\ge\frac{x+y+\omega}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}$.

Σχόλιο

Το ερώτημα (β) έχει τεράστια σημασία και πάρα πολλές εφαρμογές. Μια από αυτές είναι και το θέμα της Βαλκανιάδας Νέων του 2003.

Εφαρμογή 13

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq 1$$

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα 6 είναι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq \frac{\left[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\right]^2}{(\gamma+1)+(\alpha+1)+(\beta+1)}=$$

$$=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)+3}=\frac{4}{1+3}=1$$

Έτσι η απόδειξη έχει επιτευχθεί. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+1}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta+1}$. Οι δύο πρώτες δίνουν τελικά $(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+1)=0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma$. Άρα η ισότητα ισχύει όταν:

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$$

Εφαρμογή 14

Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\geq\frac{3}{2}$$

36η I.M.O. – 1995

Λύση

Είναι $\alpha\beta\gamma = 1$, οπότε:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha(\beta+\gamma)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}$$

Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα 6 (β) παίρνουμε:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}+\frac{(\gamma\alpha)^2}{\beta\gamma+\beta\alpha}+\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha+\gamma\beta}\geq$$

$$\geq\frac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{2}\geq\frac{3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha}}{2}=\frac{3}{2}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $x+y+\omega\geq 3\cdot\sqrt[3]{xy\omega}$, με $x=\alpha\beta$, $y=\beta\gamma$ και $\omega=\gamma\alpha$.

Προφανώς:

$$xy\omega=\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$, αφού πρέπει $x=y=\omega$.

Μέρος τρίτο

Λυμένα θέματα

Προχωράμε τώρα στην παρουσίαση ορισμένων χαρακτηριστικών θεμάτων, τα περισσότερα από τα οποία έχουν προταθεί σε διάφορους διαγωνισμούς, τοπικού ή εθνικού επιπέδου. Στη λύση των θεμάτων – που δεν είναι και η μοναδική – καταδεικνύεται η αξία και ο τρόπος χρήσης των βασικών ανισώσεων που περιγράψαμε στα προηγούμενα θεωρήματα. Είμαστε σίγουροι ότι μετά τη μελέτη τους, οι μαθητές θα αισθάνονται ιδιαίτερα ασφαλείς όταν λύνουν ανισότητες και θα ασχοληθούν με περισσότερο πείσμα με το σχετικό αντικείμενο, αφού πια θα έχουν στα χέρια ισχυρά όπλα.

1. Αν $x, y, \omega > 0$ και $xy\omega = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1}+\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}+\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le 1$$

(Διαγωνισμοί ΕΜΕ)

Λύση

Από την ανισότητα του Cauchy $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge 3\alpha\beta\gamma)$ παίρνουμε:

$$x^3+y^3+1^3\ge 3xy\cdot 1 \Leftrightarrow x^3+y^3+1\ge 3xy \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{3xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{x^3+y^3+1}\le\frac{xy}{3xy}\Leftrightarrow \frac{xy}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{3} \qquad (1)$$

Όμοια:

$$\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}\le\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le\frac{1}{3} \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση δίνουν:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1}+\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}+\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le 1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y=\omega=1$.

Άλλος τρόπος

Επειδή $x^3+y^3\ge xy(x+y)$ (βασική ανισότητα) παίρνουμε:

$$x^3+y^3+1\ge xy(x+y)+1 = xy(x+y)+xy\omega = xy(x+y+\omega)$$

Έτσι:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1} \le \frac{1}{x+y+\omega}$$

Όμοια:

$$\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1} \le \frac{1}{x+y+\omega} \quad \text{και} \quad \frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1} \le \frac{1}{x+y+\omega}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1} + \frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1} + \frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1} \le \frac{3}{x+y+\omega}$$

Αρκεί:

$$\frac{3}{x+y+\omega} \le 1 \Leftrightarrow x+y+\omega \ge 3$$

που ισχύει διότι:

$$x+y+\omega \ge 3\cdot\sqrt[3]{xy\omega} = 3\cdot 1 = 3$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y=\omega=1$.

2. Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}=1$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}$$

Λύση

Θα επιχειρήσουμε ορισμένα αλγεβρικά τεχνάσματα. Είναι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} = \frac{(\alpha^2+\alpha\beta)-\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \ge \alpha - \frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \alpha - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}$$

διότι:

- $\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta}$
- $\frac{1}{\alpha+\beta} \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \Leftrightarrow -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \ge -\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}} \Leftrightarrow \alpha - \frac{\alpha\beta}{2\alpha+\beta} \ge \alpha - \frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}$
- $\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}$

Είναι λοιπόν:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} \geq \alpha - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}, \quad \frac{\beta^2}{\beta+\gamma} \geq \beta - \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha} \geq \gamma - \frac{\sqrt{\gamma\alpha}}{2}$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν:

$$A = \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma - \frac{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}}{2} = \alpha+\beta+\gamma - \frac{1}{2}$$

Όμως:

$$\alpha+\beta+\gamma = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 + \left(\sqrt{\gamma}\right)^2 \geq \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\alpha} =$$

$$= \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha} = 1$$

Επομένως:

$$A \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

δηλαδή η ελάχιστη τιμή του Α είναι η $A = \frac{1}{2}$. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

3. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma} = 1$, να αποδειχθεί ότι $\alpha\beta\gamma \geq 8$.

Λύση

Θέτουμε:

$$\frac{1}{1+\alpha} = x, \quad \frac{1}{1+\beta} = y \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+\gamma} = \omega$$

οπότε:

$$\alpha = \frac{1-x}{x}, \quad \beta = \frac{1-y}{y} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{1-\omega}{\omega} \qquad (1)$$

Τότε:

$$x + y + \omega = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma} = 1$$

Είναι τώρα $1 - x = y + \omega \geq 2\sqrt{y\omega}$ και όμοια:

$$1 - y = \omega + x \geq 2\sqrt{\omega x} \quad \text{και} \quad 1 - \omega = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν:

$$(1-x)(1-y)(1-\omega) \geq 8\sqrt{y\omega \cdot \omega x \cdot xy} \Leftrightarrow (1-x)(1-y)(1-\omega) \geq 8xy\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} \cdot \frac{1-\omega}{\omega} \geq 8 \overset{(1)}{*}, \quad \alpha\beta\gamma \geq 8$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = 2$.

Σχόλιο

Η ανισότητα γενικεύεται για τυχαίο πλήθος αριθμών.

4. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta^3} + \frac{\beta}{\gamma^3} + \frac{\gamma}{\alpha^3} \geq \frac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Λύση

Από την ανισότητα

$$x^3 + y^3 + \omega^3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xy\omega}$$

παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta^3} + \frac{\beta}{\gamma^3} + \frac{\gamma}{\alpha^3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}} = 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta\gamma}$$

Όμως:

$$\frac{3}{\alpha\beta\gamma} \cdot \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{3}{\alpha\beta\gamma} \cdot \frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{9}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{9}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \geq \frac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

που ισχύει. Άρα ισχύει και η δοσμένη ανισότητα. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma$.

5. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$1 + \frac{3}{\alpha+\beta+\gamma} \geq \frac{6}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

(Team Selection Test, Ρουμανία 2003)

Λύση

Θέτουμε:

$$\alpha=\frac{1}{x},\quad \beta=\frac{1}{y}\quad \text{και}\quad \gamma=\frac{1}{\omega}$$

Τότε:

- $\alpha\beta\gamma=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{xy\omega}=1 \Leftrightarrow xy\omega=1 \qquad (1)$

- $1+\dfrac{3}{\alpha+\beta+\gamma}\geq\dfrac{6}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \Leftrightarrow 1+\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}}\geq\dfrac{6}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3xy\omega}{xy+y\omega+\omega x}\geq\frac{6xy\omega}{x+y+\omega} \overset{(1)}{\underset{,}{*}} \quad 1+\frac{3}{xy+y\omega+\omega x}\geq\frac{6}{x+y+\omega} \qquad (2)$$

Επειδή:

$$(x+y+\omega)^2\geq 3(xy+y\omega+\omega x) \Leftrightarrow xy+y\omega+\omega x\leq\frac{(x+y+\omega)^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{xy+y\omega+\omega x}\geq\frac{3}{(x+y+\omega)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{xy+y\omega+\omega x}\geq\frac{9}{(x+y+\omega)^2}$$

παίρνουμε:

$$1+\frac{3}{xy+y\omega+\omega x}\geq 1+\frac{9}{(x+y+\omega)^2} \qquad (3)$$

Αρκεί λοιπόν τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$1+\frac{9}{(x+y+\omega)^2}\geq\frac{6}{x+y+\omega} \Leftrightarrow 1-2\cdot\frac{3}{x+y+\omega}+\frac{9}{(x+y+\omega)^2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{3}{x+y+\omega}\right)^2\geq 0 \ \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$1-\frac{3}{x+y+\omega}=0 \Leftrightarrow x+y+\omega=3$$

Επειδή $xy\omega=1$ παίρνουμε:

$$x+y+\omega\geq 3\cdot\sqrt[3]{xy\omega} \Leftrightarrow x+y+\omega\geq 3$$

Η ισότητα ισχύει κατά τα γνωστά όταν $x=y=\omega$, οπότε τελικά $\alpha=\beta=\gamma=1$.

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha+\beta+\gamma=1$ και οι αριθμοί $3^{\alpha}-\beta$, $3\beta-\gamma$ και $3\gamma-\alpha$ είναι επίσης θετικοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha^3}{3\alpha-\beta}+\frac{\beta^3}{3\beta-\gamma}+\frac{\gamma^3}{3\gamma-\alpha}\geq\frac{1}{6}$$

Λύση

Διαιρούμε τους όρους των κλασμάτων του α΄ μέλους με α, β και γ αντίστοιχα, οπότε:

$$A=\frac{\alpha^3}{3\alpha-\beta}+\frac{\beta^3}{3\beta-\gamma}+\frac{\gamma^3}{3\gamma-\alpha}=\frac{\alpha^2}{3-\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{\beta^2}{3-\frac{\gamma}{\beta}}+\frac{\gamma^2}{3-\frac{\alpha}{\gamma}}$$

Σύμφωνα με τη βασική ανισότητα $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$ παίρνουμε:

$$A\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{9-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha}{\gamma}}\Leftrightarrow A\geq\frac{1}{9-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)}\qquad(1)$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{9-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)}\geq\frac{1}{6}\Leftrightarrow 6\geq 9-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 3\qquad(2)$$

Αυτή όμως ισχύει διότι:

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}}=3$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$.

7. Αν $x, y, \omega > 0$ και $xy\omega=1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{x+xy}+\frac{1}{y+y\omega}+\frac{1}{\omega+\omega x}\geq\frac{3}{2}$$

(G.M. 2000)

Λύση

Θέτουμε $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $y=\frac{\beta}{\gamma}$ και $\omega=\frac{\gamma}{\alpha}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Έτσι η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}}+\frac{1}{\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\gamma\alpha}}+\frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\alpha\beta}}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma+\alpha\beta}+\frac{\gamma\alpha}{\beta\gamma+\beta\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma\alpha+\gamma\beta}\geq\frac{3}{2}\qquad(1)$$

Θέτουμε $\kappa = \alpha\beta,\ \lambda = \beta\gamma,\ \mu = \gamma\alpha$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\lambda+\kappa}+\frac{\kappa}{\mu+\lambda}\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}\geq\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Αυτή όμως προκύπτει από την ανισότητα B.C.S. για τις τριάδες:

$$\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda+\mu}},\sqrt{\frac{\lambda}{\mu+\kappa}},\sqrt{\frac{\mu}{\kappa+\lambda}}\right) \quad \text{και} \quad \left(\sqrt{\kappa(\lambda+\mu)},\sqrt{\lambda(\mu+\kappa)},\sqrt{\mu(\kappa+\lambda)}\right)$$

Έτσι:

$$\left[\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda+\mu}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu+\kappa}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\mu}{\kappa+\lambda}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{\kappa(\lambda+\mu)}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda(\mu+\kappa)}\right)^2+\left(\sqrt{\mu(\kappa+\lambda)}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left[\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda+\mu}}\cdot\sqrt{\kappa(\lambda+\mu)}+\sqrt{\frac{\lambda}{\mu+\kappa}}.\sqrt{\lambda(\mu+\kappa)}+\sqrt{\frac{\mu}{\kappa+\lambda}}\cdot\sqrt{\mu(\kappa+\lambda)}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}\right)(\kappa\lambda+\kappa\mu+\lambda\mu+\lambda\kappa+\mu\kappa+\mu\lambda)\geq(\kappa+\lambda+\mu)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}\right)\geq\frac{(\kappa+\lambda+\mu)^2}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}$$

Είναι όμως $(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)$ και έτσι:

$$\frac{(\kappa+\lambda+\mu)^2}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}\geq\frac{3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}=\frac{3}{2}$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Η ισότητα ισχύει αν $x = y = \omega = 1$.

Σχόλιο

Η σχέση (2) αποδεικνύεται και ως εξής:

Είναι:

$$\frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}=\frac{\kappa^2}{\kappa\lambda+\kappa\mu}+\frac{\lambda^2}{\lambda\mu+\kappa\lambda}+\frac{\mu^2}{\kappa\mu+\lambda\mu}\geq\frac{(\kappa+\lambda+\mu)^2}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}\geq\frac{3}{2}$$

διότι $(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)$.

8. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{3}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1}\geq\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Λύση

Έστω Α το α΄ μέλος. Τότε:

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha^3-\alpha\beta\gamma+\alpha}+\frac{\beta^2}{\beta^3-\alpha\beta\gamma+\beta}+\frac{\gamma^2}{\gamma^3-\alpha\beta\gamma+\gamma}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{3}+1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Άρα:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1}\geq\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

9. Αν $x, y, \omega > -1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1+x^2}{1+y+\omega^2}+\frac{1+y^2}{1+\omega+x^2}+\frac{1+\omega^2}{1+x+y^2}\geq 2$$

(Βαλκανιάδα Νέων – 2003)

Λύση

Θα ακολουθήσουμε μια σειρά βασικών τεχνασμάτων. Ο μόνη μεταβλητή που δεν είναι τετράγωνο στο πρώτο κλάσμα είναι ο y στον παρονομαστή. Όμως:

$$1+y^2\geq 2y \iff y\leq\frac{1+y^2}{2}$$

Έτσι:

$$1+y+\omega^2\leq 1+\frac{1+y^2}{2}+\omega^2 \iff \frac{1+x^2}{1+y+\omega^2}\geq\frac{1+x^2}{1+\omega^2+\frac{1+y^2}{2}}=\frac{2(1+x^2)}{2(1+\omega^2)+(1+y^2)}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{2(1+x^2)}{2(1+\omega^2)+(1+y^2)}+\frac{2(1+y^2)}{2(1+x^2)+(1+\omega^2)}+\frac{2(1+\omega^2)}{2(1+y^2)+(1+x^2)}\geq 2 \qquad (1)$$

Θέτουμε $1 + x^2 = \alpha$, $1 + y^2 = \beta$, $1 + \omega^2 = \gamma$ και η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2\gamma+\beta}+\frac{\beta}{2\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{2\beta+\alpha}\geq 1 \qquad (2)$$

Όμως το α΄ μέλος, έστω A, γράφεται:

$$A=\frac{\alpha^2}{2\alpha\gamma+\alpha\beta}+\frac{\beta^2}{2\alpha\beta+\beta\gamma}+\frac{\gamma^2}{2\beta\gamma+\alpha\gamma}$$

και από το Θεώρημα 6 προκύπτει ότι:

$$A\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\gamma\alpha}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\geq\frac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}=1$$

αφού $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$. Ισχύει λοιπόν η σχέση (1), συνεπώς και η δοσμένη ανισότητα. Το ίσον ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$, δηλαδή για $x = y = \omega$.

Σχόλιο

Η σχέση (2) αποδεικνύεται και με άλλο τρόπο. (Δες Ευκλείδη Α, 49 : 36.)

10. Έστω x, y, z θετικοί αριθμοί με $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

Λύση

Θα βασιστούμε στη θεμελιώδη ανισότητα $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Έχουμε λοιπόν

$$S^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2(x^2+y^2+z^2)\geq$$

$$\geq \frac{xy}{z}\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}\frac{zx}{y}+\frac{zx}{y}\frac{xy}{z}\ \ 2(x^2+y^2+z^2)=$$

$$\geq (y^2+z^2+x^2)+2(x^2+y^2+z^2)=$$

$$=3+6=9$$

Επομένως $S^2 \geq 9$, οπότε $S \geq 3$. Επειδή για $x = y = z = 1$ έχουμε ισότητα , δηλαδή $S = 3$, συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης S είναι ίση με 3.

Επίλογος

Στο σημείο αυτό τελειώνει το κύριο μέρος του άρθρου αυτού. Πιστεύουμε ότι ο αναγνώστης και κυρίως οι μαθητές που θα το μελετήσουν σχολαστικά θα αποκομίσουν μια σημαντική ευχέρεια στη λύση προβλημάτων με ανισότητες. Τελειώνουμε με λίγα προτεινόμενα θέματα, στα οποία θα δοκιμαστεί η εμπειρία που αποκτήθηκε.

Μέρος τέταρτο

Προτεινόμενα θέματα

1. Τα ερωτήματα της πρώτης ομάδας αποδεικνύονται με την κλασσική μέθοδο των ισοδυναμιών και πιθανόν λίγες πράξεις.

2. Για τη λύση των ασκήσεων της δεύτερης ομάδας υπάρχει ένα και μόνο μυστικό: η πρώτη ομάδα.

Ομάδα 1η

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

1. $\dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}} \leq \dfrac{1}{\beta+\gamma}$

2. $\dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)$

3. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+\gamma}} \geq \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$

4. **i)** $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \geq \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}$ **ii)** $\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$, όπου $x = \beta+\gamma$ και $y = \gamma+\alpha$

5. $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \geq \dfrac{2\alpha-\beta}{3}$

6. $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$

7. $(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

8. $\sqrt{2\alpha(\beta+\gamma)} \leq \dfrac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}$

Ομάδα 2η

9. Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(2\beta^2+\gamma^2+\alpha^2)(2\gamma^2+\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2$$

10. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha\beta}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

11. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}\geq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

- (Kömal – Ουγγαρία)
- ΕΜΕ

12. Αν $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha(\beta+\gamma)}+\sqrt{\beta(\gamma+\alpha)}+\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}\leq\sqrt{2}(\alpha+\beta+\gamma)$$

13. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, $x=\beta+\gamma$, $y=\gamma+\alpha$ και $\omega=\alpha+\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\leq\frac{xy\omega}{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}$$

14. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}+\sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\alpha}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}\geq 2$$

Μπορεί να ισχύει η ισότητα;

15. Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}+\frac{\beta}{\sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}}+\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}}\leq\frac{3}{2}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

16. Αν $x,y,\omega>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+\omega^2)}}+\frac{y}{\sqrt{(y^2+\omega^2)(y^2+\alpha^2)}}+\frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2+x^2)(\omega^2+y^2)}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+\omega}+\frac{1}{\omega+x}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Βιβλιογραφία

Α. ΒΙΒΛΙΑ

1. Μπάμπης Στεργίου - Νίκος Σκομπρής :

Αλγεβρικές Ανισότητες , *εκδόσεις Σαββάλα 2005*

2. Μπάμπης Στεργίου - Νίκος Σκομπρής :

Κλασσικές και Νέες Ανισότητες , *εκδόσεις Σαββάλα 2006*

3. Μπάμπης Στεργίου: ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Β΄ Γυμνασίου, *εκδόσεις Σαββάλα*
4. Μπάμπης Στεργίου: ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Γ΄ Γυμνασίου, *εκδόσεις Σαββάλα*
5. Μπάμπης Στεργίου: ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Α΄ Λυκείου, *εκδόσεις Σαββάλα*
6. Ανδρέας Πούλος: Ο ΟΙΔΙΠΟΔΑΣ ΚΑΙ Η ΣΦΙΓΓΑ, *εκδόσεις Σαββάλα*
7. Ιωάννης Απλακίδης: ΕΙΝΑΙ ΑΡΑΓΕ ΝΕΚΡΟΣ Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, *εκδόσεις Σαββάλα*
8. Ν. Βασίλιεφ – Α. Γεγκόροφ: ΠΑΝΕΝΩΣΙΑΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ (2 τεύχη), *εκδόσεις Κάτοπτρο*
9. Ανδρέα Αθανασιάδη, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ, *εκδόσεις Διόσκουροι*
10. Βλάμος – Δούναβης – Λουρίδας – Μπαραλής – Πουλόπουλος – Τυρλής – Φελλούρης
    - **α)** ΒΑΛΚΑΝΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ, *εκδόσεις ΕΜΕ*
    - **β)** ΔΙΕΘΝΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ, *εκδόσεις ΕΜΕ*
11. Βλάμος – Ράππος – Ψαρράκος , ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ , *εκδόσεις ΕΜΕ*

    Δ. Γ. Κοντογιάννη
    - **α)** Μαθηματικές Ολυμπιάδες, Γεωμετρία
    - **β)** Ισότητες και ανισότητες στο τρίγωνο, *εκδόσεις Εκπαιδευτική πράξη*
12. M. S. Klamkin, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΤΩΝ ΗΠΑ , *εκδόσεις Κάτοπτρο*

Β. Περιοδικά

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ, *εκδόσεις Χάρη Βαφειάδη*
2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ, *εκδόσεις ΕΜΕ , παράρτημα Τρικάλων*
3. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ, *εκδόσεις Κωστόγιαννος*
4. ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ , *εκδόσεις ΕΜΕ , παράρτημα Ημαθίας*