

**Αποσαφήνιση ιδιαζουσών
περιπτώσεων**

στην

ΑΝΑΛΥΣΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θανάσης Ξένος

thanasixenos@yahoo.gr

Μαθηματικός 2^{ου} ΓΕΛ Χορτιάτη

Καταγράφουμε παρακάτω ορισμένα από τα πλέον χαρακτηριστικά λάθη που γίνονται από μαθητές της Γ' Λυκείου και όχι μόνο . Επίσης, παρουσιάζουμε μερικές ιδιάζουσες περιπτώσεις , που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής.

1. Ισότητα συναρτήσεων

«Κυκλοφορούν» οι παρακάτω ορισμοί.

α) Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες , όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.

β) Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες , όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και παίρνουν ίδιες τιμές.

γ) Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες , όταν έχουν την ίδια γραφική παράσταση.

Και οι τρεις είναι **λανθασμένοι**, διότι :

- Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$ με κοινό πεδίο ορισμού το $A = \{-1, 0, 1\}$ είναι ίσες, ενώ δεν έχουν ίδιο τύπο.
- Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και παίρνουν ίδιες τιμές αλλά δεν είναι ίσες.
- Ο τρίτος «ορισμός» είναι ιδιότητα-γεωμετρική ερμηνεία.

Επισήμανση: Να τονίζουμε στους μαθητές , όταν δίνουμε ορισμό , να υπάρχουν οι φράσεις «ονομάζεται» ή «λέγεται» ή «λέμε ότι», διότι στους ορισμούς ισχύει και το αντίστροφο. Επίσης , όταν δίνουμε ορισμό , **δε** γράφουμε «αν και μόνον αν».

- Οι μαθητές διδάσκονται τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη στην Α' Λυκείου, αλλά δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν πλήρως τους περιορισμούς που απαιτούνται. Έτσι, γίνονται λάθη για τις δυνάμεις $\sqrt[\nu]{x^\mu}$ με μ άρτιο.

$$\text{Ισχύει } \sqrt[\nu]{x^\mu} = \sqrt[\nu]{|x|^\mu} = |x|^{\frac{\mu}{\nu}} = \begin{cases} x^{\frac{\mu}{\nu}} & , x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{\mu}{\nu}} & , x < 0 \end{cases}, \text{ όπως επίσης}$$

$$\sqrt[\nu]{x^\mu} = (x^\mu)^{\frac{1}{\nu}}$$

Η γραφή μιας δύναμης είναι πιο «ισχυρή» από τη γραφή μιας ρίζας.

π.χ, η δύναμη $x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ δε γράφεται ως ρίζα. Αν όμως έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[x]{x}$, τότε ο x είναι θετικός ακέραιος και άρα η συνάρτηση αυτή είναι ακολουθία.

- Οι ιδιότητες των λογαρίθμων εφαρμόζονται όταν ικανοποιούνται οι απαραίτητοι περιορισμοί .

Για παράδειγμα :

i) Αν $f(x) = \ln x^2$, $x \in \mathbb{R}^*$

δε μπορούμε να γράψουμε $f(x) = 2 \ln x$, αλλά

$$f(x) = \ln |x|^2 = 2 \ln |x|$$

ii) Αν $\alpha, \beta < 0$, τότε ισχύει

$$\ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \ln \left(\frac{-\alpha}{-\beta} \right) = \ln(-\alpha) - \ln(-\beta)$$

2. Συναρτήσεις 1-1

- Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow R$, $A \subseteq R$ είναι 1-1 (αμφιμονοσήμαντη), σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ορισμός)

Συνήθως, η μέθοδος αυτή αποφεύγεται, διότι ή δεν μπορεί να εφαρμοστεί ή από την εφαρμογή της γίνονται λάθη, όπως π.χ.

$$\alpha \neq \beta \text{ και } \gamma \neq \delta \Rightarrow \alpha + \gamma \neq \beta + \delta$$

β) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

γ) Η f είναι γνησίως μονότονη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν όμως η f είναι συνεχής και 1-1 σε διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ . Η απόδειξη γίνεται με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

δ) Η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μοναδική λύση ως προς x στο A .

Η μέθοδος αυτή είναι «αδικημένη» παρόλο που για την εύρεση της f^{-1} συντομεύει τη λύση.

➤ Για να εξηγήσουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ δεν είναι 1-1 ,
αρκεί ένα αντιπαράδειγμα , δηλαδή να βρούμε δύο διαφορετικά
 x_1, x_2 του A με $f(x_1) = f(x_2)$.

Για παράδειγμα , η $f(x) = x^4 - x^3 + 2$, δεν είναι 1-1, διότι $f(0) = f(1)$.

➤ Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x) , & x \in A_1 \\ h(x) , & x \in A_2 \end{cases}$$

όπου οι g, h είναι συναρτήσεις 1-1 και $A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \emptyset$

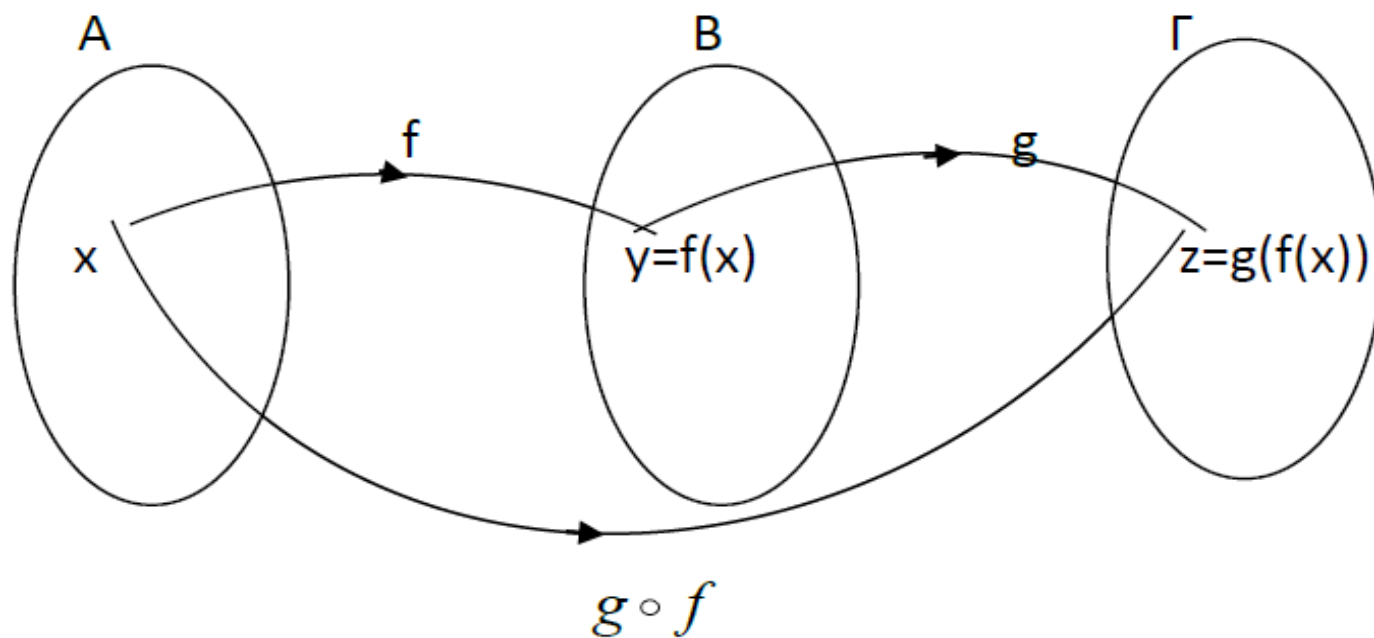
Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1 ως εξής :

- Αν $x_1, x_2 \in A_1$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $g(x_1) = g(x_2)$ και $x_1 = x_2$
- Αν $x_1, x_2 \in A_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $h(x_1) = h(x_2)$ και $x_1 = x_2$
- Αν $x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$ (οπότε $x_1 \neq x_2$), βρίσκουμε τα σύνολα τιμών $f(A_1)$ και $f(A_2)$, διαπιστώνουμε ότι είναι ξένα μεταξύ τους και άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Σύνθεση συναρτήσεων

Γιατί η συνάρτηση $g \circ f$ ονομάζεται σύνθεση της f με την g και όχι σύνθεση της g με την f ;

Ας πάρουμε τις συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \Gamma$



Στην αντιστοίχιση έχουμε πρώτα την f και μετά την g .

Η γραφή $g \circ f$ «ταιριάζει» με τον τύπο $g(f(x))$.

4. Όριο συνάρτησης

- Για την εύρεση του ορίου , χρειάζεται να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;

Ας πάρουμε , για παράδειγμα , το $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^7 + x - 3}$.

Είναι δυνατόν να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x) = \sqrt{x^7 + x - 3}$; Όχι βέβαια!

Απλώς , εφαρμόζουμε την ιδιότητα :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lambda}$$



«Κυκλοφορεί» η ιδιότητα

«Μηδενική επί φραγμένη είναι μηδενική συνάρτηση» ,

για την εύρεση ορίων της μορφής:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^k \cdot \eta\mu \frac{1}{x}) , \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^k \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}) , \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^k} , \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^k}$$

με το κριτήριο παρεμβολής.

Η φράση αυτή είναι λανθασμένη , αφού η μηδενική συνάρτηση είναι η $f(x)=0$ και όχι αυτή που έχει όριο μηδέν. (Υπάρχει σύγχυση με τη μηδενική ακολουθία)



Δίνεται η εξής άσκηση :

«Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η $f(x) = \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{|x-1|}$ να έχει πεπερασμένο όριο στο $x_0 = 1$ » ή «Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ να έχει τοπικό ακρότατο το $f(1)=2$ ».

Συχνά εδώ υπάρχει σύγχυση και θεωρείται δεδομένο ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός ή ότι η f έχει τοπικό ακρότατο το $f(1)=2$.

- Οι φράσεις «Το όριο της f στο x_0 έχει νόημα ή είναι καλώς ορισμένο» και «η f δεν έχει όριο στο x_0 »

ΔΕΝ είναι ταυτόσημες.

Για παράδειγμα:

α) Το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 0 δεν έχει νόημα, αφού η f δεν είναι ορισμένη κοντά στο 0.

β) Η $f(x) = \frac{|x|}{x}$ είναι ορισμένη κοντά στο 0, αλλά δεν έχει όριο στο 0.

➤ Το όριο της ακολουθίας (a_n) έχει νόημα μόνον όταν $n \rightarrow +\infty$ και επομένως δεν έχει νόημα να μιλάμε για παράγωγο ακολουθίας.

«Όμορφη» άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

5. Εύρεση συνεχούς συνάρτησης από το τετράγωνό της.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε **συνεχή** συνάρτηση f , ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ , ώστε να ισχύει

$$f^2(x) = g^2(x) , x \in \Delta \quad (1)$$

όπου g γνωστή συνεχής συνάρτηση στο Δ .

Υποθέτουμε ότι η g έχει k διαδοχικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_k$ στο εσωτερικό του Δ .

Τότε το Δ χωρίζεται σε $k+1$ διαστήματα και σε καθένα από αυτά η f διατηρεί πρόσημο .

Αν $f(x) > 0$, η (1) γράφεται $f(x) = |g(x)|$, ενώ

αν $f(x) < 0$, τότε $f(x) = -|g(x)|$

Έτσι προκύπτουν 2^{k+1} λύσεις για τη ζητούμενη συνάρτηση f .

Προσοχή! Αν η f δεν είναι απαραίτητα συνεχής τότε το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

Για παράδειγμα , αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f^2(x) = x^2(x-1)^2$ τότε έχουμε τις εξής λύσεις :

$$\alpha) f(x) = x(x-1) , x \in \mathbb{R} \quad \beta) f(x) = -x(x-1) , x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x(x-1) , & x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1 \\ -x(x-1) , & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \delta) f(x) = \begin{cases} x(x-1) , & x < 0 \\ -x(x-1) , & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon) f(x) = \begin{cases} x(x-1) , & x \leq 1 \\ -x(x-1) , & x > 1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} -x(x-1) , & x \leq 1 \\ x(x-1) , & x > 1 \end{cases}$$

$$\zeta) f(x) = \begin{cases} -x(x-1) , & x < 0 \\ x(x-1) , & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\eta) f(x) = \begin{cases} -x(x-1) , & x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1 \\ x(x-1) , & 0 < x < 1 \end{cases}$$

6. Παραγωγισιμότητα της f^{-1}

Η πρόταση
«Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \Delta \text{ »}$$

Αποδεικνύεται ως εξής:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

και όχι με παραγωγή της ισότητας $f^{-1}(f(x)) = x$ αφού η παραγωγισιμότητα της f^{-1} είναι ζητούμενο.

➤ Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

7. Συνέχεια της f^{-1}

Δημιουργείται η εντύπωση ότι , αν μία αντιστρέψιμη συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Δ , τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.

Δεν ισχύει η πρόταση αυτή παρά μόνον όταν η f είναι και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ .

8. α) Κάθε συνάρτηση έχει γραφική παράσταση;
β) Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού τους;

Και στα δύο ερωτήματα δίνει απάντηση η συνάρτηση Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

που δεν έχει γραφική παράσταση και είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

9. Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για μια παράγωγο.

Γνωρίζουμε ότι , αν μία συνεχής συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ παίρνει δύο διαφορετικές τιμές ,τότε παίρνει και οποιαδήποτε ενδιάμεση τιμή

Οι παράγωγοι όμως ,έχουν την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, χωρίς απαραίτητα να είναι συνεχείς.

i) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με
$$f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

(Αντίστοιχο του θεωρήματος Bolzano , χωρίς να γνωρίζουμε αν η f είναι συνεχής).

Η f έχει ελάχιστο σε σημείο $\xi \in [\alpha, \beta]$, οπότε ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$
για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Αν $\xi = \alpha$, τότε $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$, άτοπο

Αν $\xi = \beta$, τότε $f'(\beta) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \leq 0$, άτοπο.

Άρα $\xi \in (\alpha, \beta)$ και σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, ισχύει
 $f'(\xi) = 0$.

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$ και εφαρμόσουμε την παραπάνω πρόταση για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \kappa x$, με κ μεταξύ $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$, τότε προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = \kappa$.

iii) Συνέπεια του (ii) είναι η πρόταση:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

10. Κανόνας De L' Hospital

Έστω ότι το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ έχει τη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες κοντά στο α .

Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, εκτός από την περίπτωση που τα πλευρικά όρια στο α υπάρχουν και είναι διαφορετικά, δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital.

Για παράδειγμα, το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{\eta \mu x}$ έχει τη μορφή $\frac{0}{0}$ και γράφεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta \mu \frac{1}{x}}{\eta \mu x} = \frac{0}{1} = 0, \text{ ενώ το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \eta \mu \frac{1}{x} - \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}}{\sigma \upsilon \nu x}$$

δεν υπάρχει και αποδεικνύεται με τη βοήθεια των ακολουθιών.

11. Εύρεση της $f(x)$ από την $f'(x)$

Επειδή δε διδάσκεται το αόριστο ολοκλήρωμα, αλλά ούτε και η συνάρτηση –ολοκλήρωμα, αν είναι γνωστή η $f'(x)$ σε ένα διάστημα Δ , τότε για ένα σταθερό $\alpha \in \Delta$ ισχύει:

$$f(x) - f(\alpha) = [f(t)]_{\alpha}^x = \int_{\alpha}^x f'(t) dt, \text{ δηλαδή}$$

$$f(x) = f(\alpha) + \int_{\alpha}^x f'(t) dt$$

Παράδειγμα: Αν $f'(x) = \frac{x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$, τότε

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{t}{e^t} dt = 1 + \int_0^x te^{-t} dt = \dots = 2 - (x+1)e^{-x}.$$

Θ. Ξένος