

1 Α Θέμα

- A1.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
 - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

A3. Πότε η ευθεία $X=X_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

A1. Απόδειξη. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 186

A2. Θεώρημα. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 76

A3. Ορισμός. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 161

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

γ) Αν $v \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

A4. α) Σωστό. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 35

β) Σωστό. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 26

γ) Λάθος. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 60

δ) Λάθος. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 156

ε) Σωστό. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 116

2 Β Θέμα

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

B1. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα B2 έως B4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B4. Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

Λύση Β. B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική συνάρτηση, με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$.

Από το **Θεώρημα Fermat** έχουμε ότι $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Rightarrow 2\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -6$.

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

$$\text{Οπότε έχουμε: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Ακολουθεί ο πίνακας προσήμων της f'

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

$$\text{Είναι } f(0) = -3, f(1) = 1, f(3) = -3 \text{ και } f(4) = 1$$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 4]$ και $f(0)f(1) < 0$, $f(1)f(3) < 0$, $f(3)f(4) < 0$.

Από το **θεώρημα Bolzano** η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, που λόγω μονοτονίας οι ρίζες είναι μοναδικές σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Η εκφώνηση **ΔΕΝ** απαιτεί να αποδειχθεί ότι έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες, διότι σ' αυτήν την περίπτωση θα έπρεπε να δείξουμε ότι δεν έχει άλλες εκτός αυτών των διαστημάτων.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

$$\text{Όμως } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2. \text{ Τότε: } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ και } f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Πίνακας προσήμων της f''

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Ισχύει $f(2) = -1$. Οπότε το σημείο $(2, -1)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

B4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 1 + f'(x)$.

$$\text{Όμως } g(\xi) = \xi + f(\xi) \text{ και } g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $A(\xi, f(\xi))$ είναι:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_g στο σημείο της $B(\xi, g(\xi))$ είναι:

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi) \Leftrightarrow y = (1 + f'(\xi))x + \xi + f(\xi) - \xi(1 + f'(\xi)) \Leftrightarrow y = (1 + f'(\xi))x + f(\xi) - \xi f'(\xi) \quad (2)$$

Για να βρούμε την τετμημένη του σημείου τομής των δύο εφαπτόμενων, λύνουμε το σύστημα, εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (1) και (2):

$$f'(x)f(x) + f(x) - xf'(x) = (1 + f'(x))x + f(x) - xf'(x) \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες τέμνονται στον άξονα $y'y$.

□

3 Θέμα Γ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\eta\mu x} & , x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2)
αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

- Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Μονάδες 5

- Γ4.** Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

Μονάδες 7

Λύση Γ. Η f είναι συνεχής στο μηδέν καθώς ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x\eta\mu(x)} = 1 \cdot 0 = 0 = f(0)$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x\eta\mu(x)} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x\eta\mu(x)} \frac{\eta\mu(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Γ2.

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Εφόσον η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$\frac{1}{2}$

οπότε η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

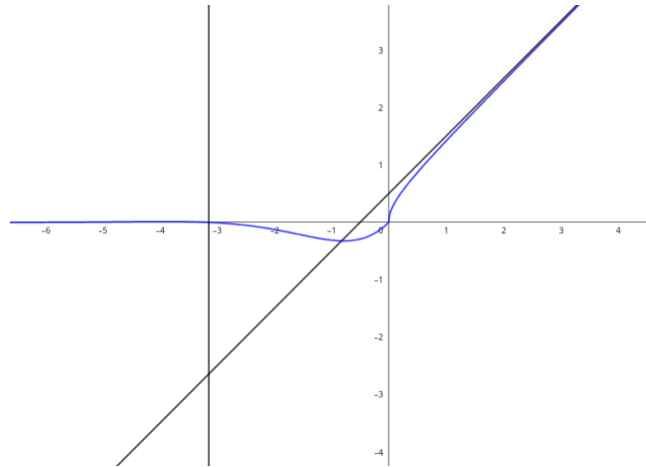
Για πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x\eta\mu(x)}}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

Οπότε αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x\eta\mu(x)} = 0, \text{ διότι}$$

$$|e^{x\eta\mu(x)}| = e^{x|\eta\mu(x)|} \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^{x\eta\mu(x)} \leq e^x, \text{ οπότε:}$$



Σχήμα 1

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$ και από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta\mu(x) = 0$.

Συνεπώς, η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Γ3.

Αρκεί η εξίσωση $e^x \eta\mu(x) = x + \frac{1}{2}$ να έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-\pi, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x \eta\mu(x) - x - \frac{1}{2}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$ και ισχύουν:

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \eta\mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \cdot 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

οπότε από Θεώρημα Βολζανο υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ έτσι ώστε $g(\xi) = 0$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Γ4.

Ισχύει ότι $x \geq 0, x'(t) > 0, \forall t \geq 0$

Επιπλέον $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ και

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Αναζητείται λύση της εξίσωσης:

$$y'(t) = x'(t)$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t) \Leftrightarrow \\ \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} &= x'(t) \quad x'(t) > 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} &= 1 \Leftrightarrow \\ 2x(t) + 1 &= 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \quad x(t) \geq 0 \Leftrightarrow \\ 4x^2(t) + 4x(t) + 1 &= 4x^2(t) + 4x(t) \Leftrightarrow \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοιο $t_0 > 0$.

□

4 Θέμα Δ

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F , της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$, είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα x' ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

Λύση Δ. Δ1. Παρατηρούμε ότι για $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{x^{2\ln x}} = \frac{x^{\ln x}(xf'(x) - 2F(x)\ln x)}{x^{1+2\ln x}} = 0.$$

Άρα η g είναι σταθερή.

Δ2. Με $x = 1$ στη δοθείσα παίρνουμε $f(1) = F(1)\ln 1 = 0$ και από τη συνθήκη της εφαπτομένης $f'(1) = 2$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$, από L'Hospital.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 2 \cdot 1 = 2$.

Είναι $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$.

Αφού η g είναι σταθερή, είναι $g(x) = g(1) = 1$ για κάθε $x > 0$, οπότε $F(x) = x^{\ln x}$ για κάθε $x > 0$.

Δ3. Είναι $F'(x) = F(x) \frac{2\ln x}{x}$ για $x > 0$.

Για $x > 0$ είναι $F(x) > 0$

Για $0 < x < 1$ είναι $F'(x) < 0$, ενώ αν $x > 1$, τότε $F'(x) > 0$.

Άρα η F είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Προφανώς μια λύση της δοθείσας εξίσωσης $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ είναι η $x = 1$.

Αν $0 < x < 1$, τότε $0 < x^2 < x < 1$, οπότε, λόγω μονοτονίας, $F(x^2) > F(x)$ ενώ αν $x > 1$, τότε $x^2 > x > 1$ οπότε $F(x^2) > F(x)$.

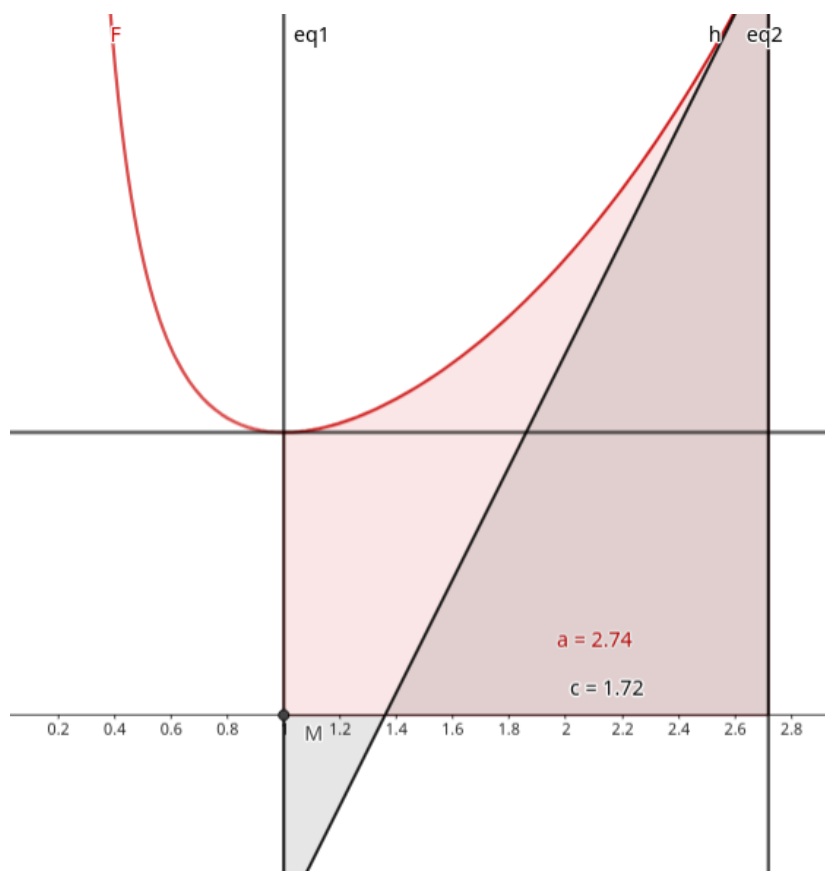
Σε κάθε περίπτωση, αν $0 < x \neq 1$, τότε $F(x) - F(x^2) < 0 \leq (x-1)^2$.

Συνεπώς, η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = 1$.

Δ4. Αφού $F(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το " $\equiv$ " αν-ν $x = 0$ έχουμε:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{(\ln x)^2} dx > \int_1^e ((\ln x)^2 + 1) dx = 2e - 3.$$

□



Εναλλακτική Δ4:

Λειτουργεί να φέρουμε τις εφαιτομένες στη γραφική παράσταση της F στα σημεία με τετμημένη 1 και e αντίστοιχα και να δείξουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου και του τριγώνου, του κατάλληλου που σχηματίζονται είναι μεγαλύτερα από $2e-3$, οπότε λόγω κυρτότητας και το εμβαδόν κάτω από τη C_F θα είναι ακόμα μεγαλύτερο.

Εναλλακτική Δ2:

Ισχύει ότι $f'(1) = 2$ και $xf(x) = 2F(x)\ln x, x > 0$.

Οπότε: $f(1) = 2F(1)\ln 1 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2F(x)\ln x}{x}, x > 0$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2F(x)\ln x}{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = 2F(1)$, αφού F παραγωγίσιμη και άρα συνεχής.

Επειδή $\frac{F(x)}{x \ln x} = c, \forall x > 0$ και $F(1) = c$.

Ακόμα $f'(x) = 2 \frac{(F'(x)\ln x + \frac{F(x)}{x})x - F(x)\ln x}{x^2}, x > 0$

Οπότε $f'(1) = 2 \frac{0 + \frac{F(1)}{1^2} - 0}{1^2} = 2F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Συνεπώς $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$.