

Εκπαιδευτικό Σενάριο: Διερεύνηση των Κριτηρίων Ισότητας Τριγώνων ΓΓΠ και ΠΠΓ

Σωτήριος Χασάπης

1. Ταυτότητα Εκπαιδευτικού Σεναρίου

- **Τίτλος:** Διερεύνηση των Κριτηρίων Ισότητας Τριγώνων ΓΓΠ και ΠΠΓ
- **Δημιουργός:** Σωτήριος Χασάπης
- **Βαθμίδα – Τάξη:** Λύκειο (Α' Λυκείου)
- **Διδακτικές ώρες:** 2
- **Θεματικό πεδίο ΠΣ:** Γεωμετρία
- **Θεματική Ενότητα:** Ισότητα Τριγώνων
- **Προτεινόμενες διαθεματικές συγκλίσεις:** Μαθηματικά – Πληροφορική – Ιστορία της Γεωμετρίας
- **Προϋποθέσεις μάθησης μαθητών:** Οι μαθητές γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των τριγώνων και μπορούν να χρησιμοποιούν ψηφιακά εργαλεία (GeoGebra) για να κατασκευάζουν και να μετρούν σχήματα. Ενδέχεται να συγχέουν τη μορφική ομοιότητα με την ισότητα ή να θεωρούν ότι δύο τρίγωνα με «ίδιες πλευρές» ή «παρόμοιες γωνίες» είναι πάντα ίσα.

Προϋποθέσεις μάθησης μαθητών

Γνωστικές προϋποθέσεις:

- Έχουν κατανοήσει τις βασικές έννοιες της γεωμετρίας που σχετίζονται με τα τρίγωνα (πλευρές, γωνίες, ύψη, μεσοκάθετοι, μεσοπαράλληλες).
- Μπορούν να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν τα στοιχεία ενός τριγώνου, καθώς και να διακρίνουν είδη τριγώνων (ισοσκελές, ισόπλευρο, ορθογώνιο).
- Κατανοούν τη σημασία της αντιστοιχίας πλευρών και γωνιών κατά τη σύγκριση δύο τριγώνων.
- Διαθέτουν βασική εμπειρία στη λογική διατύπωση υποθέσεων και στον έλεγχο αυτών μέσω παραδείγματος ή αντιπαραδείγματος.

- Μπορούν να μεταφράζουν γεωμετρικές σχέσεις σε συμβολική μορφή (π.χ. $=$ ", $\angle = \angle'$).

Συναισθηματικές και κοινωνικοπολιτισμικές προϋποθέσεις:

- Είναι εξοικειωμένοι με διερευνητικές και συνεργατικές μορφές διδασκαλίας που βασίζονται σε πειραματισμό και διάλογο.
- Δείχνουν θετική στάση απέναντι στη χρήση εργαλείων που συνδυάζουν θεωρία και πράξη, όπως το GeoGebra.
- Αντιλαμβάνονται τα Μαθηματικά ως μέσο περιγραφής και ερμηνείας της πραγματικότητας και όχι ως απομνημόνευση τύπων.
- Μπορούν να συνεργάζονται αποτελεσματικά σε μικρές ομάδες, να συζητούν και να αιτιολογούν τις αποφάσεις τους, σεβόμενοι διαφορετικές απόψεις.

Ψηφιακές δεξιότητες:

- Έχουν βασική εξοικείωση με το λογισμικό *GeoGebra* ή αντίστοιχα ψηφιακά εργαλεία γεωμετρικής αναπαράστασης.
- Μπορούν, με καθοδήγηση, να δημιουργούν και να μεταβάλλουν γεωμετρικά σχήματα, να μετρούν γωνίες και πλευρές και να ερμηνεύουν τις μεταβολές.
- Είναι ικανοί/ές να αποθηκεύουν και να διαμοιράζονται τις κατασκευές τους μέσω σχολικής πλατφόρμας ή cloud περιβάλλοντος.
- Γνωρίζουν βασική χρήση εργαλείων παρουσίασης (π.χ. Canva, Google Slides ή Jamboard) για την οπτικοποίηση συμπερασμάτων.

Βιβλιογραφική τεκμηρίωση:

Σύμφωνα με το μοντέλο *Van Hiele* (1986), η κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών αναπτύσσεται μέσω διαδοχικών επιπέδων σκέψης (οπτική αναγνώριση, ανάλυση, τυπικός συλλογισμός). Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου βρίσκονται στο στάδιο της *ανάλυσης*, όπου είναι έτοιμοι να διερευνήσουν ιδιότητες και σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία των σχημάτων, εφόσον υποστηριχθούν με κατάλληλα εργαλεία και δραστηριότητες. Η διερευνητική προσέγγιση, σε συνδυασμό με δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα όπως το GeoGebra, συμβάλλει στη μετάβαση προς ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, ενισχύοντας ταυτόχρονα τη συνεργατική και μεταγνωστική μάθηση.

2. Σκοπός και Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα

2.1 Σκοπός

Οι μαθητές να διερευνήσουν, να ερμηνεύσουν και να κατανοήσουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, με έμφαση στα ΓΓΠ και ΠΠΓ, και να ερμηνεύσουν μέσω

κατάλληλου αντιπαραδείγματος γιατί το Π-Π-Γ δεν αποτελεί κριτήριο ισότητας.

2.2 Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα

Σύμφωνα με το ΠΜΑ Γ.Ε.9.1: Να διερευνούν τον ρόλο των κριτηρίων ισότητας τριγώνων στη σύγκριση τριγώνων και να τα συσχετίζουν με τον ορισμό της ισότητας των τριγώνων.

- **Γνώσεις:**
 - Αναγνωρίζουν τα βασικά κριτήρια ισότητας τριγώνων.
 - Διακρίνουν την έννοια της ισότητας από την ομοιότητα.
- **Δεξιότητες:**
 - Χρησιμοποιούν το GeoGebra για κατασκευή και διερεύνηση ιδιοτήτων τριγώνων.
 - Ελέγχουν με δυναμικές μεταβολές την εγκυρότητα κάθε κριτηρίου.
 - Διατυπώνουν και ελέγχουν υποθέσεις με βάση μετρήσεις και παρατηρήσεις.
- **Στάσεις:**
 - Αντιμετωπίζουν κριτικά τα γεωμετρικά συμπεράσματα και εικασίες.
 - Αναγνωρίζουν τη σημασία της σκέψης μέσω αντιπαραδειγμάτων.
 - Αναπτύσσουν πνεύμα συνεργασίας και επιχειρηματολογίας, στηριζόμενο σε θεωρητικές γνώσεις και οπτικοποιήσεις.

3. Περιεχόμενο Διδασκαλίας

- Υπενθύμιση της ισότητας τριγώνων και των τριών βασικών κριτηρίων ισότητας τριγώνων.
- Το κριτήριο ΓΓΠ και η επαλήθευσή του με δυναμικό σχήμα.
- Το κριτήριο ΠΠΓ και η διερεύνηση της μη εγκυρότητάς του μέσω αντιπαραδείγματος.
- Συζήτηση για τη σημασία των κριτηρίων στη γεωμετρία.

4. Διδακτική Πλαισίωση και Διαχείριση Τάξης

4.1 Κεντρικό ερευνητικό ερώτημα

Ποια κριτήρια εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων και γιατί το Π-Π-Γ δεν αποτελεί ένα από αυτά;

4.2 Εκπαιδευτικές στρατηγικές

Διερευνητική μάθηση και συνεργατική εργασία σε ομάδες. Χρήση του GeoGebra για ψηφιακή πειραματική επαλήθευση και δημιουργία αντιπαραδείγματος.

Διδακτική τεκμηρίωση επιλογής στρατηγικής: Η επιλογή της διερευνητικής στρατηγικής με χρήση αντιπαραδειγμάτων στηρίζεται στις αρχές του εποικοδομητισμού και του μοντέλου γεωμετρικής σκέψης του *Van Hiele*. Οι μαθητές δεν δέχονται έτοιμη γνώση, αλλά οικοδομούν τη μαθηματική κατανόηση μέσα από πειραματισμό, παρατήρηση και αιτιολόγηση. Το *GeoGebra* λειτουργεί ως δυναμικό περιβάλλον πειραματισμού, επιτρέποντας τη μεταβολή των σχημάτων και τη διατύπωση υποθέσεων που ελέγχονται εμπειρικά. Η δημιουργία και ανάλυση αντιπαραδειγμάτων ενισχύει την κριτική και αναστοχαστική διάσταση της σκέψης, ενώ η ομαδοσυνεργατική δομή προάγει τη συζήτηση και την κοινωνική διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών. Έτσι, η τεχνολογία δεν λειτουργεί ως απλό εποπτικό μέσο, αλλά ως εργαλείο ανάπτυξης μαθηματικού συλλογισμού και εννοιολογικής κατανόησης.

4.3 Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1 – Επαλήθευση του ΓΓΠ Οι μαθητές κατασκευάζουν δύο τρίγωνα με δύο ίσες γωνίες και την περιεχόμενη πλευρά ίση. Παρατηρούν με δυναμική μεταβολή ότι τα τρίγωνα παραμένουν ίσα.

Δραστηριότητα 2 – Διερεύνηση του ΠΠΓ Οι μαθητές κατασκευάζουν δύο τρίγωνα με δύο ίσες πλευρές και την περιεχόμενη γωνία διαφορετική. Παρατηρούν ότι τα τρίγωνα δεν συμπίπτουν. Με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, κατασκευάζουν αντιπαραδείγματα όπου $\Pi_1 = \Pi_2$, $\Pi_2 = \Pi_3$, $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, αλλά τα τρίγωνα είναι μη ίσα.

Δραστηριότητα 3 – Συμπεράσματα και συζήτηση Συνολική συζήτηση: γιατί η θέση της γωνίας παίζει ρόλο; Ποια είναι η μαθηματική αιτιολόγηση;

4.3 Διδακτικές ενέργειες εκπαιδευτικού – Δραστηριότητες μαθητών

Δραστηριότητα	Χρονική διάρκεια	Ρόλος Εκπαιδευτικού	Ρόλος Μαθητών	Διδακτική τεχνική / στρατηγική	Οργάνωση τάξης	Μέσα / Εργαλεία
1. Εισαγωγή – Ενεργοποίηση ενδιαφέροντος (Ανάκληση προηγούμενων γνώσεων και οπτική αναγνώριση τριγώνων)	3'	Θέτει ερωτήσεις για τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Ενεργοποιεί τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών.	Απαντούν προφορικά, αναγνωρίζουν τρίγωνα, διατυπώνουν τις πρώτες υποθέσεις για την ισότητα.	Καταιγισμός ιδεών – Διερευνητική συζήτηση.	Ολομέλεια	Πίνακας, χαρτί-μολύβι
2. Δραστηριότητα 1 – Επαλήθευση κριτηρίου ΓΠΠ	5'	Καθοδηγεί τους μαθητές στη χρήση <i>GeoGebra</i> για την κατασκευή δύο τριγώνων με δύο ίσες γωνίες και την περιεχόμενη πλευρά ίση. Θέτει ερωτήσεις καθοδήγησης.	Κατασκευάζουν τα τρίγωνα, μεταβάλλουν δυναμικά πλευρές και γωνίες, παρατηρούν τη σταθερότητα του σχήματος.	Διερευνητική μάθηση – Πειραματισμός με δυναμικό σχήμα.	Ομάδες 2-3 μαθητών	<i>GeoGebra</i> , προβολέας
3. Συζήτηση – Συμπεράσματα για το ΓΠΠ	2'	Καθοδηγεί τη συζήτηση, συνοψίζει παρατηρήσεις και οδηγεί στη διατύπωση του κριτηρίου.	Διατυπώνουν το συμπέρασμα: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες και την περιεχόμενη πλευρά ίση, τότε είναι ίσα.	Καθοδηγούμενη ανακαλυπτική μάθηση.	Ολομέλεια	Πίνακας, <i>GeoGebra</i>

Δραστηριότητα	Χρονική διάρκεια	Ρόλος Εκπαιδευτικού	Ρόλος Μαθητών	Διδακτική τεχνική / στρατηγική	Οργάνωση τάξης	Μέσα / Εργαλεία
4. Δραστηριότητα 2 – Διερεύνηση του ΠΠΓ	10'	Ζητά να κατασκευάσουν δύο τρίγωνα με δύο ίσες πλευρές και μη ίση περιεχόμενη γωνία. Ενθαρρύνει πειραματισμό και παρατήρηση.	Κατασκευάζουν δυναμικά τρίγωνα, μεταβάλλουν τη γωνία και διαπιστώνουν ότι δεν είναι ίσα. Δημιουργούν αντιπαράδειγμα.	Διερεύνηση με κατασκευή αντιπαραδείγματος – Επαγωγική συλλογιστική.	Ομάδες	GeoGebra, χάρακας, μοιρογνωμόνιο
5. Συζήτηση – Ερμηνεία αποτελεσμάτων ΠΠΓ	10'	Καθοδηγεί την τάξη στη σύγκριση των δύο περιπτώσεων (ΓΠΠ και ΠΠΓ). Εστιάζει στον ρόλο της περιεχόμενης γωνίας.	Συγκρίνουν, επιχειρηματολογούν και συνάγουν ότι το ΠΠΓ δεν εξασφαλίζει ισότητα.	Συνεργατική συζήτηση – Κριτική ανάλυση.	Ολομέλεια	Πίνακας, GeoGebra, φύλλο εργασίας
6. Εμπέδωση – Εφαρμογή	10'	Διανέμει σύντομο φύλλο εργασίας με τρία σχήματα σε δραστηριότητα H5P στην n-τάξη ή την e-me και ζητά να εντοπίσουν ποια είναι ίσα και ποια όχι, αιτιολογώντας.	Εφαρμόζουν τα κριτήρια ισότητας σε νέα παραδείγματα, συνεργάζονται και εξηγούν τη συλλογιστική τους.	Πρακτική εφαρμογή – Συνεργατική επίλυση προβλημάτων.	Ομάδες	Φύλλο εργασίας/ερωτηματολόγιο σε H5P
7. Αξιολόγηση – Αναστοχασμός	5'	Συντονίζει τη συζήτηση και καταγράφει τα συμπεράσματα. Ενθαρρύνει τους μαθητές να αναστοχαστούν για τη διαδικασία.	Εκφράζουν τα συμπεράσματά τους, αναφέρουν τι έμαθαν και τι τους προβληματίσε.	Αναστοχασμός – Μεταγνωστική συζήτηση.	Ολομέλεια	Πίνακας, H5P / Essay

5. Αξιολόγηση και Αναστοχασμός

Διαμορφωτική αξιολόγηση κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων: παρατήρηση, ερωτήσεις διερεύνησης, αυτοαξιολόγηση ομάδων (π.χ. συμπλήρωση πίνακα “Τι παρατηρήσαμε – Τι συμπεράναμε”). **Τελική δραστηριότητα αξιολόγησης:** Δημιουργία μικρής παρουσίασης (π.χ. στο Canva ή H5P) που εξηγεί ποια είναι τα έγκυρα κριτήρια και γιατί. **Αναστοχασμός εκπαιδευτικού:** Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν γιατί το ΠΠΓ αποτυγχάνει· χρειάζεται ενίσχυση στην έννοια «περιεχόμενη γωνία».

6. Ψηφιακές Τεχνολογίες – Πηγές

Τα ψηφιακά εργαλεία, ειδικά στο τμήμα της διερευνητικής προσέγγισης μέσω του λογισμικού geogebra, προσθέτουν αξία διότι όλοι οι μαθητές μπορούν να διαχειριστούν τη διερεύνηση, όχι μόνο νοητικά αλλά και χειραπτικά σέρνοντας και δημιουργώντας καταστάσεις και πειράματα. Οι μαθητές διερευνούν δυναμικά και χειραπτικά τις μαθηματικές ιδιότητες, πειραματίζονται, κάνουν υποθέσεις και εξακριβώνουν σχέσεις μέσω δραστικών ενεργειών στην οθόνη, γεγονός που βελτιώνει την εννοιολογική κατανόηση και ενισχύει τη συμμετοχή (Zagoto et al.2025) και (ΙΕΠ 2014).

Επιπλέον, πρόσφατες μελέτες (Batiibwe, 2024) καταγράφουν σημαντική αύξηση στη συμμετοχή και στον ενθουσιασμό των μαθητών όταν χρησιμοποιούνται ψηφιακά εργαλεία όπως το Geogebra στη διερευνητική διδασκαλία, επιτρέποντας ενεργή, οπτική και θεωρητική αλληλεπίδραση.

- **GeoGebra:** Δυναμική κατασκευή τριγώνων και μέτρηση γωνιών.
- **H5P ή Google Forms:** Δραστηριότητα αντιστοίχισης ή πολλαπλής επιλογής.
- **Canva / Jamboard:** Οπτικοποίηση συλλογικών συμπερασμάτων.

7. Βιβλιογραφία – Δικτυογραφία

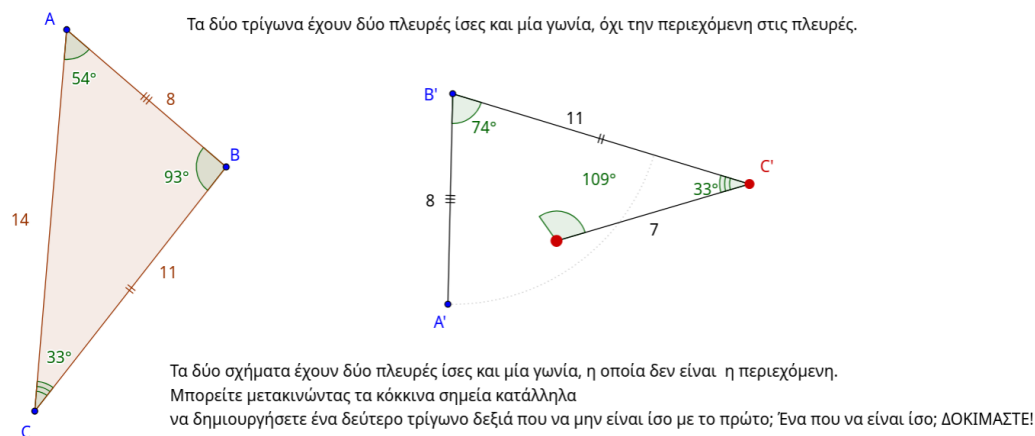
- ΙΕΠ (2014). *Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»* [Ανάκτηση: Οκτώβριος 2025](#).
- ΙΕΠ (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου*.
- Batiibwe, M. S. (2024). *Integration of GeoGebra in Learning Mathematics: Benefits and Challenges*. East African Journal of Education Studies, 7(4), 684-697. <https://doi.org/10.37284/eajes.7.4.2454> [Ανάκτηση: Οκτώβριος 2025](#).
- GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/ekkwdxbv>
- Gurmu, F., Tuge, C., & Hunde, A. B. (2024). *Effects of GeoGebra-assisted*

instructional methods on students' conceptual understanding of geometry. Cogent Education, 11(1). <https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2379745>

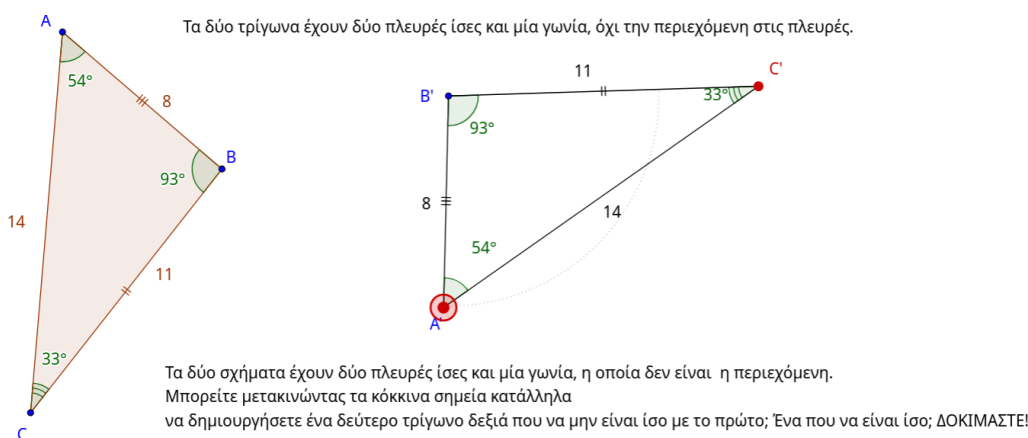
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*.
- Zagoto et al. (2025). *Effectiveness of Geogebra-Based Learning on Students' Cognitive and Affective*, Salud, Ciencia y Tecnología. 2025; 5:2001 [Ανάκτηση: Οκτώβριος 2025](#).

8. Παράρτημα

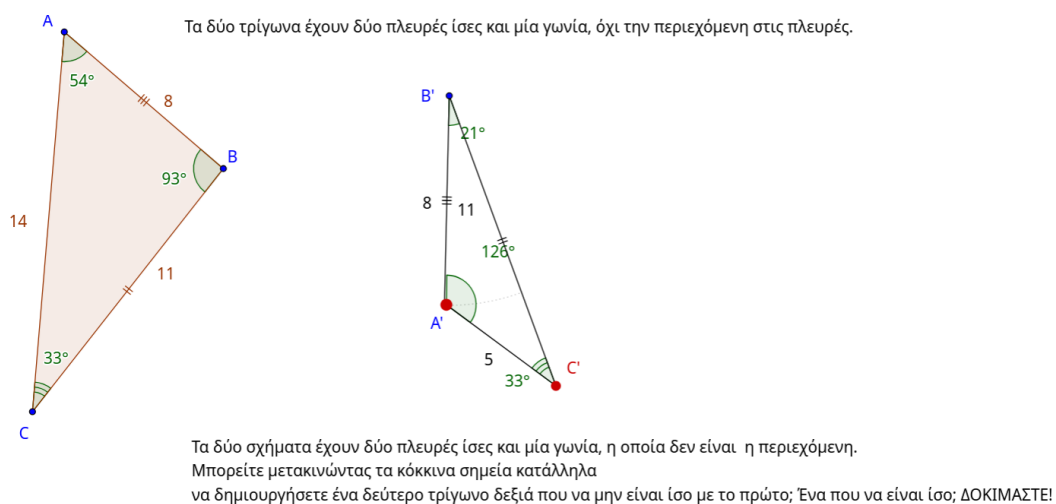
Η ψηφιακή εφαρμογή ως φύλλο εργασίας



Σχήμα 1: Η εφαρμογή Geogebra για τη διερεύνηση ΠΠΓ



Σχήμα 2: Δημιουργώντας ένα ίσο τρίγωνο με το αρχικό.



Σχήμα 3: Δημιουργώντας ένα άνισο τρίγωνο με το αρχικό και δύο πλευρές και μία γωνία ίση(όχι την περιεχόμενη).