Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

'Ομιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 1 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis

Η Μαθηματική Επαγωγή 

1 Εισαγωγικά

Στα Μαθηματικά ο πειραματισμός μπορεί να προσφέρει ενδείξεις αλλά όχι αποδείξεις. Με άλλα λόγια δε μπορούμε να συνάγουμε την αλήθεια μιας πρότασης δοκιμάζοντας μερικές ειδικές περιπτώσεις. Φυσικά αυτό ισχύει και για προτάσεις που αναφέρονται σε θετικούς ακεραίους.

Ένα ιστορικό παράδειγμα είναι το τριώνυμο του Euler. O Euler για λίγο νόμισε ότι το τριώνυμο $\nu^2+\nu+41$ όταν το ν διατρέχει τους φυσικούς μας δίνει πρώτους αριθμούς.
Δοκιμάστε τιμές! Θα διαπιστώσετε ότι ο πράγματι έως την τιμή $\nu = 39$ το τριώνυμο μας δίνει πρώτους αριθμούς. Αλλά για την τιμή $\nu = 41$ μας δίνει αριθμό σύνθετο. Στη σημερινή συνάντηση θα ασχοληθούμε με μία αποδεικτική μέθοδο που μας δίνει την δυνατότητα να αποδεικνύουμε προτάσεις που εξαρτώνται για από κάποιον θετικό ακέραιο χωρίς να καταφεύγουμε στην (ανασφαλή) μέθοδο των δοκιμών.

Leonard Euler 1707-1783

Άσκηση 1 Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+2+3+...+100$$

Άσκηση 2 Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+2+3+...+1000$$

Άσκηση 3 Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+2+3+...+\nu$$

Άσκηση 4 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$1+3$$

$$1+3+5$$

$$1+3+5+7$$

$$1+3+5+7+9$$

Άσκηση 5 Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+3+...+(2\nu-1)$$

Ερώτηση 1 Είναι άραγε βέβαιον ότι η απάντηση που δώσατε στις ασκήσεις 3 και 5 είναι σωστή;

2 Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από κάποιον θετικό ακέραιο ν. Μία μέθοδος απόδειξης είναι η ακόλουθη.

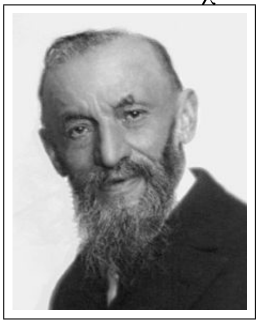
Βήμα 1 Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$.

Βήμα 2 Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k$.

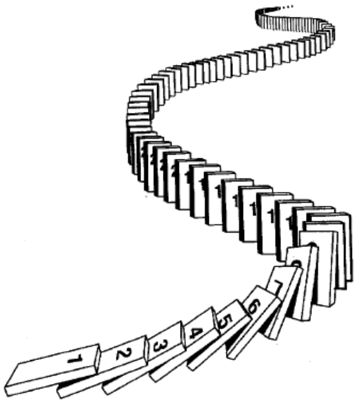
Βήμα 3 Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k+1$.

Τότε η πρόταση αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Η ιδέα πίσω από την παραπάνω αρχή που οφείλεται στον Peano είναι η εξής: Στο Βήμα 3 ουσιαστικά έχουμε αποδείξει ότι αν η πρόταση ισχύει για ένα θετικό ακέραιο τότε ισχύει και για τον επόμενο του. Η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του 1 δηλαδή το 2. Ισχύει για τον 2. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 3. Ισχύει για τον 3. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 4 κ.ο.κ.



Giuseppe Peano
1858-1932



Άσκηση 6 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{\nu\left(\nu+1\right)}=1-\frac{1}{\nu+1}$$

Άσκηση 7 Να αποδείξετε ότι

$$1^2+2^2+...+\nu^2=\frac{\nu\left(\nu+1\right)\left(2\nu+1\right)}{6}$$

Άσκηση 8 Να αποδείξετε αν ν αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 τότε ισχύει:

$$\left(1+\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right)...\left(1+\alpha_\nu\right)\geq 1+\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu$$

Άσκηση 9 Να αποδείξετε αν ν θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ έχουν γινόμενο 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu\geq\nu$$

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Παίρνουμε ένα τριψήφιο αριθμό που δεν έχει όλα του τα ψηφία ίδια και σχηματίζουμε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο αριθμό χρησιμοποιώντας τα ψηφία του. Αφαιρούμε τους δύο αριθμούς και με τον αριθμό που θα βρούμε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

1. Τι παρατηρείτε;

2. Μπορείτε να δώσετε εξηγήσεις;